數學傳播 32卷1期, pp. 54-59

三次多項式圖形的基本探討

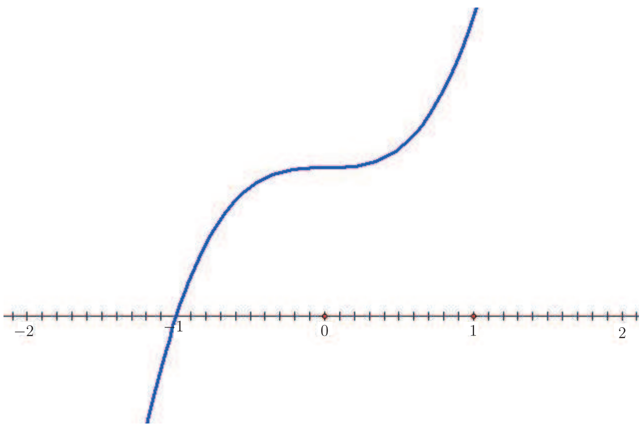
張海潮

照現行高中課程的設計, 到了高三才開始學多項式的微分; 學了之後, 要分析三次多項式 (註一) 的函數圖形當然不是問題。但是考量到高一上就要學多項式根的初步理論和勘根定理; 此時, 除了理解一次和二次多項式之外, 如果同時也能理解三次多項式的圖形, 對掌握根的性質和勘根定理一定更有幫助。本文因此嘗試以基本幾何和代數的方法來探討三次多項式的函數圖形, 期望能夠提供高一教學現場有關多項式的學習資料 (註二)。

給定多項式 x^3+ax^2+bx+c, 將 x 以 $x-\dfrac{1}{3}a$ 代入, 得到一個缺 x^2 項的多項式 x^3+px+q。這個代換, 就函數圖形而言, 只是作了一個向左或向右的平移, 因此在往後的討論中, 我們假設 $f(x)=x^3+px+q$, $p>0$, 或是 $f(x)=x^3-px+q$, $p>0$(註三)。

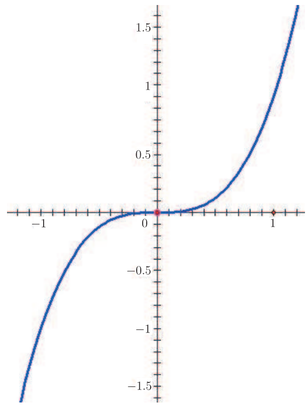
先討論 $f(x)=x^3+px+q$, 並設 $g(x)=x^3+px$, 顯然, g 的圖形和 f 的圖形只差一個向上或向下的平移, 並且 g 的圖形與原點對稱。當 x 從很負變化到很正, 函數 $g(x)=x^3+px$ 的圖形從坐標平面的左下變化到右上, 其間至少穿過 x 軸一次, 我們要說明這個圖形是上升的。

因爲如果 $\beta>\alpha$, 則 $g(\beta)-g(\alpha)=\beta^3+p\beta-\alpha^3-p\alpha=(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2+p)$, 又因爲 $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2+p$ 恆正 (註四), 所以 $g(\beta)-g(\alpha)>0$, 這表示 $g(x)=x^3+px$ 有一個上升的圖形, 因此圖形與任意水平軸只交一點, 圖形如下 (圖一)。注意 x^3+px 的圖形對稱於原點, 此時由於 $f(x)=x^3+px+q$ 沒有 x^2 項, 所以 $f(x)=0$ 只能有一個實根 (註五)。



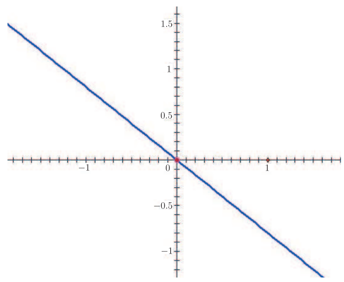
(圖一)

接著討論 $p>0$ 但是 $g(x)=x^3-px$ 的情形; 不如先看看 $y=x^3$ 和 $y=-px$ 的圖形。$y=x^3$ 的圖形如下 (圖二):



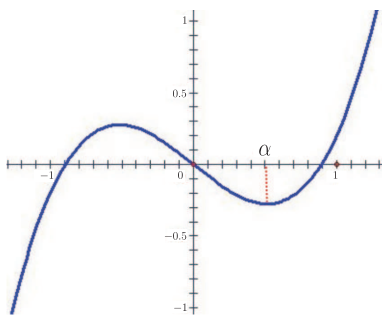
(圖二)

$y=-px$ $(p>0)$ 的圖形如下 (圖三):



(圖三)

$g(x)$ 的圖形是 (圖二) 和 (圖三) 相加, 因此就 (圖二) 而言, $x<0$ 的部份會略微抬起而 $x>0$ 的部分會略微下降 (圖四)。



(圖四)

由於 $g(x)=x^3-px$ 的圖形對稱於原點, 在下面的討論中, 我們只看 $x>0$ 的部份。

在 $x>0$ 的部分, 假設圖形的最低點發生在 $x=\alpha$, 也就是說, 若 $x>\alpha$, 則

$$g(x)-g(\alpha)=x^3-\alpha^3-p(x-\alpha)=(x-\alpha)(x^2+x\alpha+\alpha^2-p)\ge 0$$

並且, 若 $0<x<\alpha$, 一樣有

$$g(x)-g(\alpha)=(x-\alpha)(x^2+x\alpha+\alpha^2-p)\ge 0$$

這相當於

$$x>\alpha \text{ 則有 } x^2+x\alpha+\alpha^2-p\ge 0,$$

$$0<x<\alpha \text{ 則有 } x^2+x\alpha+\alpha^2-p\le 0$$

因此可得 (註六)

$$\text{當 } x=\alpha \text{ 時, } \alpha^2+\alpha\cdot\alpha+\alpha^2-p=0,$$

或者

$$3\alpha^2-p=0$$

也就是說在 $x>0$ 的部份, 最低點發生在 $\alpha=\sqrt{p/3}$。再看 α 的右邊, 假設 $\alpha<\beta<\gamma$, 則

$$g(\gamma)-g(\beta)=(\gamma-\beta)(\gamma^2+\gamma\beta+\beta^2-p)$$

但是因爲 $\gamma>\beta>\alpha>0$

$$\gamma^2+\gamma\beta+\beta^2>3\alpha^2=p$$

所以

$$g(\gamma)-g(\beta)>0$$

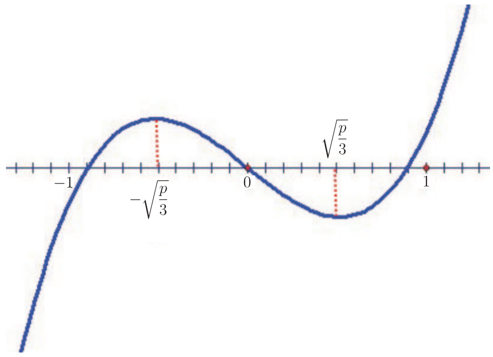
同理, 如果 $0<\beta<\gamma<\alpha$ 則

$$g(\gamma)-g(\beta)=(\gamma-\beta)(\gamma^2+\gamma\beta+\beta^2-p)$$

因爲 $\gamma^2+\gamma\beta+\beta^2<3\alpha^2=p$, 所以

$$g(\gamma)-g(\beta)<0$$

換句話說, 圖形在 $x>\alpha$ 這個部分是上升, 但是在 $0<x<\alpha$ 這個部分是下降。以上的討論說明了 $g(x)=x^3-px$, $p>0$ 的圖形如下 (註七):

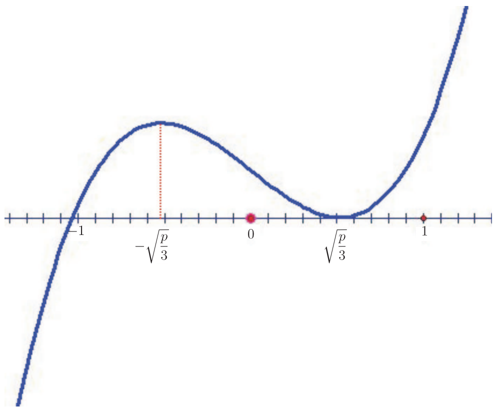


(圖五)

由於 $x^3 - px$ 對稱於原點, 因此圖五的左邊有一個波峰, 右邊是一個波谷, 波峰和波谷到 x-軸的垂直距離都是

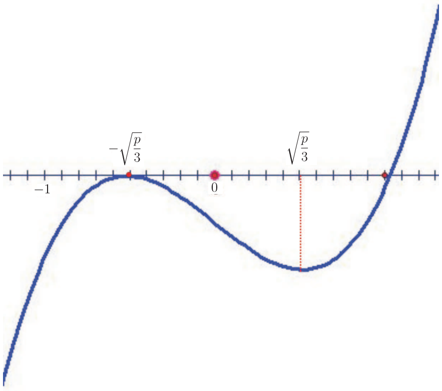
$$\begin{aligned} & g\Big(-\sqrt{\frac{p}{3}}\Big) \\ & \quad = p\sqrt{\frac{p}{3}} - \frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}} \\ & \quad = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}} \end{aligned}$$

回到 $f(x) = x^3 - px + q$, $p > 0$, $f(x)$ 的圖形是 $g(x)$ 的圖形 (圖五) 在鉛垂方向移動 q 單位。如果 $q > 0$, 圖五向上移動, 當 $q = \dfrac{2}{3}p\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ 時 $f(x)$ 的圖形如下 (圖六):



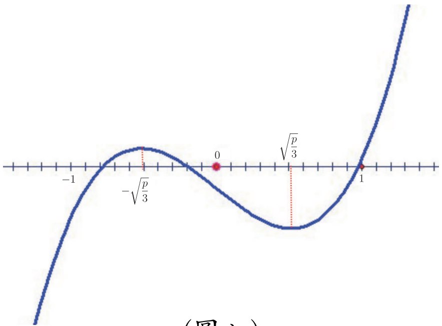
(圖六)

此時 $f(x) = 0$ 有二重根 $\sqrt{p/3}$, 同理當 $q = -\dfrac{2}{3}p\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ 時 $f(x)$ 的圖形如下 (圖七):



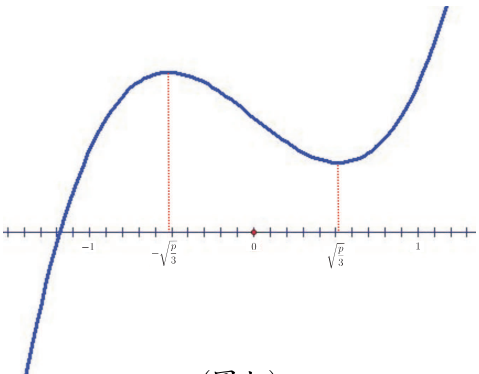
(圖七)

此時 $f(x)=0$ 有二重根 $-\sqrt{p/3}$; 當 q 介於 $-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$ 和 $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$ 時 $f(x)$ 的圖形如下 (圖八):



(圖八)

此時, $f(x)=0$ 有三相異實根; 最後, 如果 $q>\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$ 或 $q<-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$ 時, $f(x)$ 的圖形如下 (以 $q>\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$ 爲例):



(圖九)

此時 $f(x)=0$ 只有一根。

下表是本文的結論 (註八):

	$f(x)$ 的函數圖形	$f(x)=0$ 的根	q, p 的關係
$f(x)=x^3$	自左向右上升	$f(x)=0$ 有三重根	
$f(x)=x^3+q,\ q\neq 0$	自左向右上升	$f(x)=0$ 只有一個實根	
$f(x)=x^3+px+q,\ p>0$	自左向右上升	$f(x)=0$ 只有一個實根	
$f(x)=x^3-px+q, p>0$ $q=\pm\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$	有一波峰和一波谷	$f(x)=0$ 有二重根 和另一實根	$27q^2=4p^3$
$f(x)=x^3-px+q, p>0$ $-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}<q<\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$	有一波峰和一波谷	$f(x)=0$ 有三個相異實根	$27q^2<4p^3$
$f(x)=x^3-px+q, p>0$ $q>\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$ 或 $q<-\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}$	有一波峰和一波谷	$f(x)=0$ 只有一個實根	$27q^2>4p^3$

註一: 本文只談實係數多項式。

註二: 本文的論證難免有不夠嚴謹之處, 敬請各界指正。

註三: $p=0$ 是簡單的情形, 不特別討論。

註四: $\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2=\left(\beta+\frac{1}{2}\alpha\right)^2+\frac{3}{4}\alpha^2\geq 0$。

註五: 此時因爲 $p>0$, $f(x)=0$ 只可能有一個實根, 不能有三重根。

註六: 論證的依據可以是勘根定理。

註七: 圖中上升, 下降的區域是確定的, 以 $-\sqrt{p/3}$, $\sqrt{p/3}$ 爲分界, 因爲缺乏微積分的工具, 不談兩個局部極値的平滑性。

註八: 對多項式實根完整的處理, 請見網站 http : //scicomp.math.ntu.edu.tw/calculus/ 有關 Sturm 定理的討論。

—本文作者爲台大數學系退休教授—