數學傳播 32卷1期, pp. 48-53

阿呆展神威

呂文賓

敎數學的寶哥心想著下一節要敎“數學歸納法”, 就先給了全班一題作業, 問題是:「一個凸 n 邊形的內角總和是多少度?」憨厚老實的寶貝學生阿呆只利用了兩次下課休息時間, 就自認爲解答出來, 立刻找寶哥“繳卷”, 並要求貼在班上的公佈欄, 向班上同學『挑戰』, 以激發同學學習數學的興趣, 阿呆又怕班上同學沒有人理會, 主動“懸賞”一碗牛肉麵, 給指出此公告有疑問或錯誤的同學。寶哥開頭有一點爲難, 後來看到阿呆那一副胸有成竹的樣子, 寶哥只好允其所請, 並特別賞賜標題, 公告如下:

奉天承運阿呆詔曰:

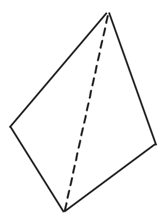
關於作業:「一個凸 n 邊形的內角總和是多少度?」我的解答如下:

①$n=3$, 凸 n 邊形是三角形, 所以內角和 $=180^\circ$(基本幾何知識)

②$n=4$, 凸 n 邊形是四邊形, 所以內角和 $=360^\circ$, 圖解如右下圖:

(1) 畫一對角線

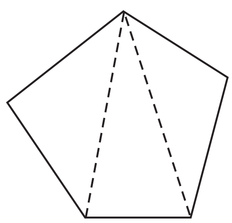
(2) 四邊形成兩個三角形, 所以內角和 $=180^\circ\times 2=360^\circ$



③$n=5$, 凸 n 邊形是五邊形, 所以內角和 $=180^\circ\times 3=540^\circ$, 圖解如右下圖:

(1) 自同一頂點畫兩條對角線

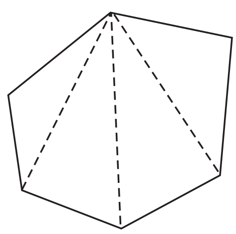
(2) 五邊形成三個三角形, 所以內角和 $=180^\circ\times 3=540^\circ$



④$n=6$, 凸 n 邊形是六邊形, 所以內角和 $=180^\circ\times 4=720^\circ$, 圖解如右下圖:

(1) 自同一頂點畫三條對角線

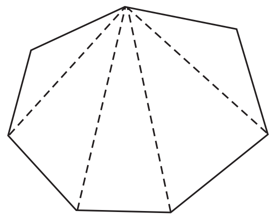
(2) 六邊形成四個三角形, 所以內角和 $=180^\circ\times 4=720^\circ$



⑤$n=7$, 凸 n 邊形是七邊形, 所以內角和 $=180^\circ\times5=900^\circ$, 圖解如右下圖:

(1) 自同一頂點畫四條對角線

(2) 七邊形成五個三角形, 所以內角和 $=180^\circ\times5=900^\circ$



歸納:

邊數 n	3	4	5	6	7	$\cdots\cdots$	n
凸 n 邊形的內角和	180°	$180^\circ\times2$	$180^\circ\times3$	$180^\circ\times4$	$180^\circ\times5$	$\cdots\cdots$	$180^\circ\times(n-2)$

總結: 一個凸 n 邊形的內角總和是 $180^\circ\times(n-2)$, 其中 $n\geq3$, n 是自然數

例子: 問一個凸十邊形的內角總和是多少度?

答: 把 $180^\circ\times(n-2)$ 中的 n 代入10, 得 $180^\circ\times(10-2)=180^\circ\times8=1440^\circ$

附帶廣告:「你在看我嗎? 你還可以再靠近一點! 」

※ 各位看倌: 若仔細看這一份條理淸楚的公告內容與例子, 還有很有創意的附帶廣告, 就知道其實阿呆並不呆, 只是活在一個不被了解的環境罷了, 因爲公告後不久, 就有惡作劇的同學用紅筆在此公告後寫上:「看了就吐血, 靠近就聞到大便味。」並在旁邊用黑筆畫了一隻豬, 豬頭上還用紅筆寫了一個笨字。

不久, 阿呆知道此事並看了公佈欄, 可想而知, 此時阿呆的心情盪到了谷底。

中午吃飯時, 班花小玉就偏偏又來踢館找碴, 小玉質疑地說:「在你的大作中, 只證明到 $n=7$, 沒有證明出 $n=10$ 時, 凸 n 邊形的內角和是多少? 所以在例子中你不可以將10代入公式 $180^\circ\times(n-2)$的 n, 得......」先前公告被寫紅字並被畫笨豬, 阿呆心裡已經很不爽了, 不耐煩的阿呆不等小玉說完, 立刻氣沖沖的說:「若要求證明凸100邊形的內角總和? 那就要從 $n=3$ 一直證明到 $n=100$, 你難道不知道, 這樣會累死人, 你是不是想累死我, 你不會推理一下就知道, 白癡! 」小玉被罵白癡立刻反唇相譏說:「你才是超級大白癡, 在公式 $180^\circ\times(n-2)$ 沒有被證明出來是正確之前, 你絕不可使用它, 也就是說, 你不可以將 n=10代入。」此時阿呆已聽不進去小玉在講什麼, 阿呆臉紅脖子粗的高聲嚷著:「我捍衛眞理, 絕不容許挑釁! 」(此時阿呆講出他心中最眞誠的吶喊。) 這時在一旁的數學小老師智多星眼看快不可收拾了, 趕快出面打圓場說:「那阿呆你現在就把公式 $180^\circ\times(n-2)$ 證明出來是正確的, 那不就得了! 」阿呆心想著連好友智多星都替小玉講話, 此時心情才開始冷靜下來。

阿呆吃了幾口飯菜, 抬頭看看四周的同學, 他發現今天的同學很不一樣, 好像都變成了“敵人”! 這時阿呆的心裡興起唯一的念頭, 那就是寧願“戰死沙場”, 也不願意“苟且偷生”。於是, 阿

呆仔細思考著如何去證明公式, 但心中老是嘀咕著, 這麼簡單的公式也要證明, 會不會同學們被女色所迷都靠向小玉? (小玉是校花級的大美女。) 或者同學們聯合起來故意唬我? 這時阿呆午飯已吃不下, 想了二十分鐘, 什麼也沒想出來。午休正好到來, 阿呆疲倦地睡著了, 阿呆夢見自己被敵人圍剿, 且衆叛親離, 只有自己仍秉持正義, 寧死不屈! 午休鐘聲響起, 阿呆正好驚醒, 阿呆發現書桌上壓著一張紙, 上頭這樣寫著:

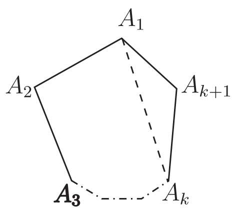
阿呆:

爲了表示本王寬宏大量, 能容“異己”, 特別教你怎麼證明, 也順便讓你見識見識本王的厲害, 現在本王想起來, 你也眞是的, 不秤秤自己有幾斤幾兩重, 竟敢“染指”本王的小玉。自古英雄配美女, 只有像本王這樣絕世聰明的英雄才配得起小玉這樣絕世美女, 說實在的, 你太笨了, 這是命, 認命吧! 看本王的如來神掌, 一掌劈死你的色心, 納命來!

證明如下:

① 當 $n=3$ 時, 代入公式得 $180°(3-2)=180°$, 凸 n 邊形是三角形, 由基本的幾何知識知: 三角形的內角和是 $180°$, 所以公式是正確的。

② 假設 $n=k$ ($k\geq 3, k$是自然數) 時, 凸 k 邊形的內角和 $=180°\times(k-2)$ 成立, 則 (如右下圖)



(1) 在凸 $k+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots\ldots A_{k+1}$ 中
連接 A_1A_k, 在凸 k 邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots\ldots A_k$ 中,
由前述假設知凸 k 邊形內角總和 $=180°\times(k-2)$

(2) 由圖知, 凸 $k+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots\ldots A_{k+1}$
的內角總和 $=$ 凸 k 邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots\ldots A_k$ 的
內角總和 $+\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的內角和 $=180°\times(k-2)+180°$
$=180°\times(k-2+1)=180°\times(k+1-2)$
所以, 當 $n=k+1$, 凸 $k+1$ 邊形的內角總和 $=180°\times(k+1-2)$
也是正確的

(3) 同上之理可證, n 在所有的自然數公式均成立

P.S. 這叫做數學歸納法的證明, 瞭解之後, 記得面向北方, 心誠意敬, 開口高呼千歲, 向本王叩頭謝恩。

聰明的本王 手筆

阿呆接到這一封狂妄無禮且囂張跋扈的信之後, 心中開始不斷地地詛咒對方, 後來覺得自己不應該這麼容易被激怒, 要有風度, 要冷靜, 才有機會扳倒對手, 更何況阿呆心中早就有一股“寧願戰死, 也不願屈膝求生”的氣概, 所以阿呆相信自己的自信心絕不可能被一封信就輕易擊垮。

阿呆下午的課都心不在焉, 而在仔細“研究”信中的證明, 最後還是無法瞭解其中的奧秘, 阿呆這時才驚覺本王眞是一位“可敬畏”的對手!

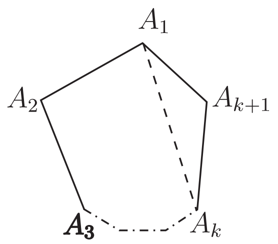
放學鐘聲一響, 阿呆早就按耐不住地直奔寶哥辦公室, 討救兵去矣!

寶哥明瞭來意之後, 寶哥說:「小玉的質疑, 智多星與本王的想法, 在數學上, 都是正確的。」

這時阿呆的眼淚忽然奪眶而出, 阿呆說:「老師, 我是不是眞的比較笨? 」寶哥說:「聰明才智有一些是天生註定的, 說實在的, 並沒有什麼好比的, 生而爲人最可貴的, 就是在比後天的努力與認眞, 俗話說得好:『認眞的女人最美』, 而認眞的學生最可愛! 數學歸納法我都還沒有教, 你們就預習如此深入, 這實在是值得“世人”的尊敬, 如果別人簡單說你幾句, 你的自信心就被擊垮, 那你才是眞正的笨。只要你有堅定的信心, 正確的方向, 認眞打拼, 又在乎別人怎麼說呢? 」

阿呆說:「但是我連信中的證明都看不懂! 」寶哥說:「這是很正常的, 因爲你還沒有學, 要你懂, 事實上, 很簡單, 你有什麼疑問, 現在儘量問我就是了。」

阿呆這時才收拾眼淚問:「爲什麼有人會“發明”數學歸納法這種證明方式? 它當初是怎麼來的? 有什麼用途呢?」寶哥說:「首先我有一點要澄淸: 一個凸 n 邊形的內角總和 $= 180^\circ \times (n-2)$, 其中 $n \geq 3$, n 是自然數, 以上等式是你歸納出來的, 不是數學歸納法的證明, 眞正數學歸納法的證明是在證明: 一個凸 n 邊形的內角總和 $= 180^\circ \times (n-2)$, 其中 $n \geq 3$, n 是自然數, 等式中的 n 在所有的自然數中, 等式均成立。」阿呆說:「我明白了, 原來小玉就是在質疑我這方面。」阿呆接著又問:「那本王的證明爲什麼可以證明等式中的 n 在所有的自然數中, 等式均成立? 」寶哥說:「這可從你的作業談起, 因爲自然數有無限多個, 所以 ......」阿呆接著說:「所以我們腦筋必須急轉彎, 看看能不能用別的方式去證明, 不必一個接一個算。自然數有無限多個, 我們一輩子也證明不完! 」寶哥說:「對! 關於本王的證明我用骨牌倒下去與下表來說明:

①當 n=3時, 代入公式得 $180^\circ(3-2) = 180^\circ$, 凸 n 邊形是三角形, 由基本的幾何知識知: 三角形的內角和是 180°, 所以公式是正確的。	①第一個位子沒有骨牌, 第二個位子沒有骨牌, 第三個位子有一個骨牌, 此骨牌倒下去了。
② 假設 $n = k$ ($k \geq 3, k$是自然數) 時, 凸 k 邊形的內角和 $= 180^\circ \times (k-2)$ 成立, 則 (如下圖)  (1) 在凸 k+1 邊形 $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_{k+1}$ 中, 連接 A_1A_k, 在凸 k 邊 $A_1A_2A_3 \ldots\ldots A_k$ 中, 由前述假設知凸 k 邊形內角總和 $= 180^\circ \times (k-2)$	② 假設前面 k 個位子, 有 $k-2$ 個骨牌都倒下去了。

(2) 由圖知, 凸 $k+1$ 邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots A_{k+1}$ 的內角總和 $=$ 凸 k 邊形 $A_1A_2A_3\ldots\ldots A_k$ 的內角總和 $+\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的內角和 $=180^\circ\times(k-2)+180^\circ=180^\circ\times(k-2+1)=180^\circ\times(k+1-2)$ 所以, 當 $n=k+1$, 凸 $k+1$ 邊形的內角總和 $=180^\circ\times(k+1-2)$ 也是正確的	(2) 本王證明出來第 $k+1$ 個位子的骨牌必定會倒下去。
③同上之理可證, n 在所有的自然數公式均成立	③同上之理可證即第 $k+2$ 個位子的骨牌必定倒下去, 第 $k+3$ 個位子的骨牌必定倒下去, 第 $k+4$ 個位子的骨牌必定倒下去, ………, 所有的骨牌都會倒下去! 所以 n 在所有的自然數公式均成立。

。」

阿呆說:「我懂了, 本王是不是聰明到預習一下課本就懂呢? 」寶哥說:「本王不是神, 本王與你是同學, 同學之間的聰明才智都差不了多少, 他一定是跟老師學的! 你就不要懷疑了! 」

阿呆這時才露出會心的一笑, 雙手合十, 九十度鞠躬以謝師, 離去時還屢屢回頭望師也。

隔日早自修, 阿呆主動整理一些數學歸納法的證明當作業, 請老師批改, 寶哥由此作業知道阿呆的火候已足, 上數學課時, 寶哥故意簡單的點一下, 就請阿呆上台代師講解, 台下同學個個面面相覷, 大家都不敢相信自己的眼睛, 怎麼會是他呢? (他自開學以來, 數學大小考試從沒有一次及格過), 這時只見阿呆胸有成竹的步向講台, 台下四十多雙眼睛緊盯著阿呆, 阿呆的講述如下:

以前我們學過 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, 證明如下:

$$\begin{array}{cccccl}
1 & +\quad 2 & +\quad 3 & +\cdots\cdots+ & n & =x\\
n & +(n-1) & +(n-2) & +\cdots\cdots+ & 1 & =x\\
\hline
(n+1) & +(n+1) & +(n+1) & +\cdots\cdots+ & (n+1) & =2x
\end{array}$$

$$n(n+1)=\ 2x$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=\ x$$

以上是等式的證明, 不是數學歸納法的證明, 眞正數學歸納法的證明是: 證明等式 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的 n 在所有自然數中, 等式都成立。

此題眞正數學歸納法的證明如下:

“步驟一” $n=1$ 代入等式的兩邊, 即等式左邊 $=1$, 等式右邊 $=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=\dfrac{1\times 2}{2}=1$, $1=1$, 等式成立。

“步驟二” 假設 $n=k$ 時, 等式成立,

試證: $n=k+1$ 時, 等式也成立, 即

已知: $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

求證: $1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

證明: 由已知 $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, 使用等量公理, 對等式的兩邊同加 $(k+1)$, 得 $1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k^2+k+2k+2}{2}=\dfrac{k^2+3k+2}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

"步驟三" 同"步驟二"之理, 可證 $n=k+2$, $n=k+3$, $n=k+4$, ..., 等式都成立。所以我們得證 n 在所有自然數中, 等式都成立。

※ 作業 (1) 求 $1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=$? (請用 n 表示, 並用數學歸納法證明 n 在所有的自然數中, 等式都成立。)

※ 作業 (2) 求 $1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots\cdots+3+2+1=$? (請用 n 表示, 並用數學歸納法證明 n 在所有的自然數中, 等式都成立。)

寶哥發現阿呆在講解的時候, 台風穩健, 不疾不徐, 由淺入深, 幽默風趣的口白與生動活潑的肢體語言, 使台下的每一位同學都陶醉在春風之中。講解完, 還請同學儘量提問, 台下立即舉起十幾隻手, 只見阿呆兵來將擋, 水來土掩, 輕鬆化解所有疑難。阿呆公開向小玉道歉, 並感謝老師的教導, 最後, 阿呆以非常感性的口吻向本王喊話:「本王的信是我進步的原動力, 事過境遷, 我對本王只有敬愛沒有仇恨, 希望本王現在能出面, 讓我們能再做最眞摯的朋友! 」這時台下鴉雀無聲, 也沒有任何動靜。這時阿呆爲了表示誠意, 竟然眞的面向北方跪下並高呼千歲。終於智多星步向講台並伸出眞誠友誼的手, 這時台下響起如雷的掌聲。(全文完)

—本文作者任教於大直高中—