數學傳播 32卷1期, pp. 19-24

Steinhaus 三角形 ——數學實驗的一個案例

張鎮華

> 做數學應該像做實驗, 先做計算,
> 推想可能的定理, 再設法證明定理。
> 首要之務是計算。
>
> Euler

1. 數學實驗

我們在學習自然科學 (例如物理和化學) 時, 伴隨的總有實驗課, 但是在學習數學時, 從來不曾聽說有實驗這門課。我向來主張數學要有實驗, 二十年前在交通大學應數系任教時, 就曾經嚐試開過一門數學實驗的課, 認爲數學可以借助實驗尋求定理, 而做實驗的工具除了傳統的紙筆之外, 電腦是一種很有效的工具。我的這個想法可以回溯到三十年前的經驗, 那時候我剛從金門退伍, 在劉豐哲老師的幫忙下, 到中央研究院數學所當助理。

中研院眞是一個讀書的好地方, 環境清幽、圖書豐富。有一天我翻到德國人 Harborth 的一篇文章 [1], 它主要是解決 Steinhaus 提出來的一個問題, 我有關數學實驗的經驗就是從這裡開始的。

2. 緣起—Steinhaus 的問題

波蘭數學家 Steinhaus 響應當時數學家貢獻高中數學教育的熱心, 於1963年寫了一本百題初等數學的書 [2], 書中附有詳細解答。除了這一百則有解答的題目之外, 這本書也列了十二個未解的題目, 其中的第一則就是我們現在要討論的主題。

下圖含有14個正號及14個負號, 它們滿足一個性質: 兩個相同符號的下方有一個正號、兩個相異符號的下方有一個負號。

$$\begin{array}{c}
+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+ \\
+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+ \\
-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;- \\
-\;\;+\;\;+\;\;- \\
-\;\;+\;\;- \\
-\;\;- \\
+
\end{array}$$

如果第一列有 n 個符號, 則可以用上述規則建出有 $n(n+1)/2$ 個符號的倒三角形。當 $n=3,4,7,8,11,12,\ldots$ 的時候 $n(n+1)/2$ 爲偶數, Steinhaus 有興趣的是, 對這些 n, 能不能造出正號和負號個數相同的三角形。他給出了如下 $n=12$ 及 $n=20$ 的答案, 將這兩個三角形的第一列去掉, 就得到 $n=11$ 及 $n=19$ 的答案。

$$\begin{array}{c}
-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;- \\
-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;- \\
-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;- \\
+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;- \\
+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+ \\
+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;- \\
-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+ \\
-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+ \\
-\;\;+\;\;+\;\;+ \\
-\;\;+\;\;+ \\
-\;\;+ \\
-
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+ \\
+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;- \\
+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;- \\
+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;- \\
-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;- \\
+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;- \\
-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+ \\
-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;- \\
-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+ \\
+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;- \\
-\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+ \\
+\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;- \\
+\;\;+\;\;-\;\;+\;\;-\;\;-\;\;+\;\;+ \\
+\;\;-\;\;-\;\;-\;\;+\;\;-\;\;+ \\
-\;\;+\;\;+\;\;-\;\;-\;\;- \\
-\;\;+\;\;-\;\;+\;\;+ \\
-\;\;-\;\;-\;\;+ \\
+\;\;+\;\;- \\
+\;\;- \\
-
\end{array}$$

Harborth的論文 [1]完整的證出來, 當 $n=0$ 或 $3 \pmod 4$ 時, 含有一半正號及一半負

號的三角形確實存在。我的故事就是從讀了這一篇文章開始。當時我給了自己一個更一般的問題: 給定正整數 n, 在所有 2^n 個 n 階 Steinhaus 三角形中, 正號的個數的可能值有那些?

爲了方便, 我用0和1分別代表正號和負號, 則 Steinhaus 原來 $n=7$ 時的答案可以變成

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 && 0 && 1 && 0 && 1 && 0 && 0 \\
& 0 && 1 && 1 && 1 && 1 && 0 & \\
&& 1 && 0 && 0 && 0 && 1 && \\
&&& 1 && 0 && 0 && 1 &&& \\
&&&& 1 && 0 && 1 &&&& \\
&&&&& 1 && 1 &&&&& \\
&&&&&& 0 &&&&&&
\end{array}
$$

如果我們規定 $\{0,1\}$ 上的加法爲: $0+0=1+1=0$ 及 $0+1=1+0=1$, 則每一個不在第一列的位置的數等於其上方兩個數的和。因爲三角形可以完全被它的第一列 $a_1a_2\ldots a_n$ 決定, 我們用 $T(a_1a_2\ldots a_n)$ 代表這個三角形, 而用 $\#T(a_1a_2\ldots a_n)$ 表示這個三角形中1的個數。在這樣的符號下, 我想要求的是

$$S(n)=\{\#T(a_1a_2\ldots a_n):\ \text{各個 } a_i \text{ 爲0或1}\ \}.$$

3. 自助天助——CDC 電腦幫忙做實驗

有了問題, 我就著手去計算, 很容易可以算出前幾個 $S(n)$, 例如:

$$
\begin{aligned}
S(1)&=\{0,1\},\\
S(2)&=\{0,2\},\\
S(3)&=\{0,3,4\},\\
S(4)&=\{0,4,5,6,7\},\\
S(5)&=\{0,5,6,7,8,9,10\}.
\end{aligned}
$$

但是當 n 越來越大時, 2^n 快速增大, 一個不小心, 只要有一點小地方出差錯, 整個 $S(n)$ 就有問題。於是我就想到用電腦來幫忙計算。

那個年代的電腦並不像現在這麼普及, 速度也不如現在的快, 記憶容量相對很小。我學電腦是大學二年級的事情, 我大學考進中央大學物理系, 第二年轉數學系, 但還是常常回「娘家」找物理系的同學。那時候中央大學並沒有電腦, 物理系請了附近電信研究所的一位研究人員, 每週一次的一個晚上來系上三小時課, 教導電腦程式, 我就隨著他們去學。那時候學的是 IBM 1130 的 FORTRAN, 顧名思義 FORTRAN 就是 FORmula TRANslation, 一行一行看起來就像數學式子, 一點也不難。因爲中央大學沒有電腦, 我們寫程式只能寫在 coding sheet 上, 老

師將它收回, 請人幫忙打成卡片、上機操作、在報表紙上印出答案, 我們得到報表紙, 如果有錯, 在上面改一改, 再請老師帶回去改卡片重跑程式。一學期下來, 只做了兩道程式習題。這樣的學習實在心有不甘, 暑假時就到臺大電機系辦的暑期電腦班上課, 學了不少東西, 更重要的是, 可以自己去打卡片, 用老師發的 control card 去上機, 一兩天就可以看到答案。除了班上的習題, 還自己寫了不少數學相關程式, 玩得不亦樂乎。我大四的時候考上臺大數學研究所及交大計算機研究所, 由於不能決定要讀什麼, 而且也想早點出國念書, 所以就決定先去當兵, 也由於這層原因, 對電腦的熱愛一直平行於對數學的喜歡。

話說回來, 當時在中研院數學所並沒有什麼人用電腦, 唯一的一臺 PDP8在現在看來是老古董, 這一點從開機的方法就看得出來。首先, 將電源打開, 在電腦上用手按一連串的鍵, 取出一卷打孔的紙帶系統程式, 電腦讀入之後才會開機。

雖然這臺老古董電腦跟現在的電腦遠不能比, 但是在當時卻是數學所唯一的寶貝, 我就想用它來實現我計算 $S(n)$ 的美夢。總算它比我用手去算好太多了。不過算來算去, 到了 $n=12$ 就是當時我能做的極限, 雖然可以看出一些現象, 但還是不夠。我把這個煩惱向華洋博士訴苦, 他說在臺北市區的大陸大樓有一臺 CDC 的大電腦, 就帶我去卡油用看看。

我把程式交給 CDC 的工程師帶進去跑, 過了一陣子, 他們跑出來問我是不是程式寫錯了, 怎麼跑了一千多秒還未停。我的程式當然不會停, 因爲我是讓 n 一直往上加, 盡量的去算, 這一次, 他們幫我算到 $n=20$ 就把程式停下來。(在撰寫本文的同時, 我再寫了一次程式, 在臺大數學系的電腦系統, 很輕易的就跑到 $n=25$ 的結果, 今日電腦的進步實非昔比。) 以下就是那時 CDC 幫忙印出來的結果。

n	S(n)													
1	0	1												
2	0	2												
3	0	3	4											
4	0	4	5	6	7									
5	0	5	6	7	8	9	10							
6	0	6	8	10	12	14								
7	0	7	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
8	0	8	11	13	∼	22	24							
9	0	9	12	13	15	∼	27	30						
10	0	10	14	16	∼	34	36	37						
11	0	11	15	16	18	∼	41	44						
12	0	12	17	21	∼	48	52							
13	0	13	18	19	23	∼	57	60	61					
14	0	14	20	24	∼	(偶數)	66	70						
15	0	15	21	22	27	28	30	33	∼	75	80			
16	0	16	23	29	∼	32	35	37	∼	86	90	91		
17	0	17	24	25	31	∼	35	38	∼	95	97	102		
18	0	18	26	32	34	35	37	40	∼	104	106	108	114	
19	0	19	27	28	35	36	39	43	∼	118	120	121	126	127
20	0	20	29	37	38	40	41	44	45	47	∼	132	134	140

4. 近道——觀察及推想可能的定理

CDC的電腦幫忙算出來的這些資料, 呈現了許多規則, 讓我挑幾個來說一說。

首先, $\#T_n(\overline{0}) = 0$, 其中 n 用來表示第一列的長度, $\overline{0}$ 是循環節爲0的意思。其次, $\#T_n(\overline{1}) = \#T_n(1\overline{0}) = n$。因此, $S(n)$ 含有0和 n, 這是比較容易看出來的。比較特別的是0和 n 之間的其他正整數都不在 $S(n)$ 中。直觀來說, 有一個1就會和旁邊的0產生另一個1, 進而繼續產生下一個1 ..., 所以, 有1就最少有 n 個1是可以預期的。事實上, 相信了這樣的結論, 利用數學歸納法就可以證明:

定理 1. 若 $\#T_n > 0$, 則 $\#T_n \geq n$。進一步, $\#T_n = n$ 的充要條件是 $T_n = T_n(\overline{1})$、$T_n(1\overline{0})$、$T_n(\overline{0}1)$、或 $T_3(010)$。

$S(n)$的最小元素爲0, 再來就是 n, 接下來的第三個是什麼? 這在略大一點的 n 就可看出一個端倪, 似乎是再增加 $n/2$ 左右。事實上, 確實有

$$\#T_n(\overline{01}) = \#T_n(01\overline{0}) = n-1+\lfloor n/2\rfloor,$$
$$\#T_n(\overline{10}) = \#T_n(11\overline{0}) = n-1+\lceil n/2\rceil.$$

複雜一點的推演可以得到:

定理 2. 若 $\#T_n > n \geq 4$, 則 $\#T_n \geq n-1+\lfloor n/2\rfloor$。進一步, $\#T_n = n-1+\lfloor n/2\rfloor$ 若且唯若 $T_n = T_n(\overline{0}1)$、$T_n(01\overline{0})$、$T_n(\overline{10})$ 而 n 爲偶數、$T_n(11\overline{0})$ 而 n 爲偶數、$T_n(\overline{0}11)$ 而 n 爲偶數、$T_6(001100)$、$T_6(001000)$、或 $T_7(0001000)$。

接下來的一些數和下面這些例子有關。爲了方便, 我們定義; 當 $n \equiv i \,(\mathrm{mod} 4)$ 時 $f(i,n) = 1$, 否則 $f(i,n) = 0$。

$$\#T_n(\overline{1100}) = \#T_n(101\overline{0}) = 2n-2-f(0,n),$$
$$\#T_n(\overline{0110}) = \#T_n(011\overline{0}) = 2n-2-f(1,n),$$
$$\#T_n(\overline{1001}) = \#T_n(111\overline{0}) = 2n-2-f(3,n),$$
$$\#T_n(\overline{0011}) = \#T_n(001\overline{0}) = 2n-3-f(2,n),$$
$$\#T_n(0\overline{1}) = \#T_n(1\overline{0}1) = 2n-2,$$
$$\#T_n(0\overline{01}) = \#T_n(00\overline{1}) = 2n-5+\lceil n/2\rceil,$$
$$\#T_n(1\overline{10}) = \#T_n(10\overline{1}) = 2n-3+\lfloor n/2\rfloor,$$
$$\#T_n(\overline{011}) = \lfloor (n^2+n)/3\rfloor,$$
$$\#T_n(\overline{110}) = \#T_n(\overline{101}) = \lfloor (n^2+n+1)/3\rfloor.$$

從實驗出來的數據, 大概指向, $S(n)$ 從0開始, 跳到 n, 再跳到大約 $3n/2$ 附近, 再跳到 $2n$ 附近。而從最大的值來看, 一致指向 $\lfloor (n^2+n+1)/3 \rfloor$, 這大約是0和1總個數的三分之二。這三分之二約略可以由相鄰兩個1的下方要有一個0看出來, 但是仔細的證明是須要的。

另外一個有趣的資訊是, 在 $n=6$ 和14時 $S(n)$ 只含偶數, 看起來這應該也不是單一現象, 可以期待的是 $n=2^k-2$ 時 $S(n)$ 只含偶數。

以上種種, 後來我曾寫了一篇文章叫 Binary triangles, 替我的數學實驗做了一個小總結 [3]。這也是我日後一直深信「數學需要實驗, 而電腦是極有效的數學實驗工具」的起源。

5. 幕落——對高中數學與資訊教育的期望

以上講來, 有如白髮宮女話當年, 而當年其實並沒有把 $S(n)$ 完全說清楚, 還留下大一段尾巴。

事隔三十年, 現在看到電腦能幫我們做的事情越來越多。而我自己最初寄情於數學與電腦, 最後念的是介於中間的運籌學 (Operations Research), 論文寫的是圖論演算法, 做的是跨領域的研究, 一直留在數學系工作, 但也和資訊系許多做理論計算機科學的同仁熟識, 幫忙資訊系指導過一些研究生。

偶爾, 心中還是會閃過一個念頭, 希望有朝一日, 我們的高中生可以有一堂課是用電腦當工具來做數學實驗。聽說, 新的高中課程綱要將加入資訊課, 一則以喜, 一則還是不滿意。喜的是, 這麼重要的工具終於可以堂堂進入高中課程; 不滿意的是, 資訊課據說被歸入「生活類」, 個人衷心的希望電腦不要只是被用來聊天、打電動的家電用品, 這樣實在太委曲它了。盼望我們的數學老師和資訊老師能合作, 互相幫忙、各蒙其利。

參考文獻

1. H. Harborh, Solution of Steinhaus'problem with plus and minus signs, *J. Combin. Theory, Series A*, **12** (1972), 253-259.
2. H. Steinhaus, *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*, Pergamon Press, Oxford, 1963.
3. G. J. Chang, Binary triangles, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, **11** (1983), 209-225.

—本文作者任教於臺灣大學數學系—