※教 與 學※

高中數學科教材研究

何景國

I. 談高中數學教育與方法

目前許多同學爲了「考聯考」才去學數學，這樣子，失去學習數學的意義。本文寫作主旨是幫助同學建立一個正確的學習數學態度。指出高中數學的獨特方法，這裏將講到關於研討敎材的兩個重要觀念，就是「逼近」與「轉化」了。同時以「用極限求漸近線方法」爲例來說明轉化具體程序。

近幾年來，國內數學敎育家、數學敎師、社會人士，又再掀起了討論「數學敎育」問題。例如「聯考該怎樣命題」「高中生如何學好數學」，「那裏是數學敎材內容的實效性」。這一股浪潮的冲擊，似排山倒海而來，大家都一直在企圖追求一個共同的理想與實效的目標。這一現象不僅顯示了高中數學問題仍然處於問題之中，但是，毫無疑問地，這也象徵着大家關懷數學敎育的熱心並未被淹沒。好的數學敎育家，好的數學敎師一定都曾爲它苦思竭慮，絞盡心汁；找尋正確又可行的解決之道。

當前高中數學成績低落；學習數學興趣喪失、抱怨、放棄、迷惘之嘆息處處可聞。這些情景，便是高中數學問題的具體表現；也就是問題癥結之所在。向來，我們常以主觀的看法與討論；偏重解題技巧；研練深奧美妙試題。過份強調數學形式而對於方法的分析過份的草率。其實他們的數學發展一直都緊密附隨於社會發展的需求與條件。因此現代高中數學敎育需顧及下列幾點：

1. 「爲數學而數學」的時代結束了。
2. 數學應走向實用，而不是惑於數學本身的結構，而墜入數學競智或其文字遊戲的迷宮。
3. 數學理論若拋棄普通方法的內涵，將會嚴重傷害數學敎育的根本。
4. 顧及數學發展的歷史背景，及數學敎育的基本內涵。

首先就我個人認爲學習數學之時，心理建立也是必需，而且是重要的。可以這樣說：「自信、自強、自勉」是學習時之事先心理準備。因爲有了信心，方能認眞學習，認眞計劃奮發去研究。由於堅定了信心，就會產生力量，有了力量乃自強，方能自救，縱然遇到挫折，也不致因此頹喪，一蹶不振，相反地，任何困難也就可以迎刃而解了。

許多同學認爲數學很難，常感到束手無策，甚至呈現各種騷擾現象。爲了要幫助各位同學能夠主動地學習數學，我認爲高中數學學習方法應朝着下列二個方向去準備：

第一：怎樣了解敎材內容？

數學本身的題材來自生活，後經過淨化推廣，抽象化而形成一套有系統的學問。「數學」也可以說是人類一部重要的「方法論」，同學對這個事實應有所認識，並應關切學習的對象與方法，目前高中課程相當重，如果對數學學習不得法的話，必產生厭惡與畏懼之感、甚至放棄。首先強調學習時應知道三件重要事情：⑴**明白了歸向**，⑵**分析方法**，⑶**數學中的隱藏推理**。

往往習慣於定義，定理逐步推演成的敎材。看不到實際問題的痕跡，迷失了歸向。我們必須在每節學習之後，把全章全節裏的邏輯推理的來龍去脈貫通連接起來，把習題與課本看一體不能死背敎本習題與答案，對於較難或較繁的問題應多動腦筋去思考，運用機智去了解抽象名詞，抽象過程，最好是養成把原問題做個特例來看，這樣才容易發掘問題的

精神所在，當引進新觀念時候，應隨時將已學過的知識做一個全盤性的回顧與溫習，時常把相關的概念提示出來作比較，同時設法在一大堆問題中用已有的知識發掘解決問題的方法。

第二：用什麼分析方法了解數學？

學習過程有了認識以後，眞正要接觸到的是高中數學的獨特方法，同學宜把握「逼近」與「轉化」這兩觀點去進行研討教材，這裏特爲設計幫助同學們充分了解和探討；解決數學問題的癥結，俾能達到效果。

「逼近」是什麼？

逼近是人類設法描寫與了解自然現象所採用的一種過程：人類對於較單純的自然現象徹底了解之後，把它當作一種「模型」有了這些模型之後，對於一些複雜現象便將這些模型套上去，看看與實際現象差距是否夠少？通常「現象」常以「變量間的關係」這一面目出現，而最單純的是一次函數與二次函數的「模型」我們應該知道如何利用「模型」來逼近地描寫實際現象，進一步地建立更複雜的代數基本模型，三角波動模型，與指數函數等等模型，這些都散佈在教材六册之中。

「轉化」是什麼？

轉化是隨伴着數學的需要而產生的。當我們欲解決一個問題時，須將它化成數學函數或相應的方程式等代數，或分析的型式來處理。此外反過來將複雜的代數問題化成清晰的幾何問題來想，這一種想法現在第三、四、六册較多。再強調一點的是「轉化」的特徵是不斷地由一個觀點朝向另一個觀點，飛躍的轉移，從一個定型的模式的看法中超脫出來。轉化並不是一時的狂放方法而是自始至終緊緊地把握住思考的過程。不時靠着理論來支配着方向。高中數學的教材主要在「逼近」「轉化」兩現象之下交迭推進的。盼同學們多加留意掌握，跟着源由，那麼接受吸收也大大化簡成有脈絡可尋。學數學也不覺是難事了。

用極限求漸近線方法

引言：數學着重於它的處理問題的方法，通常這些方法掩蓋在「形式」與「內容」之下。特別是，「轉化」與「逼近」是現行高中數學中兩根支柱。在以高中數學範疇來探討之前，我們先列出轉化處理大綱：

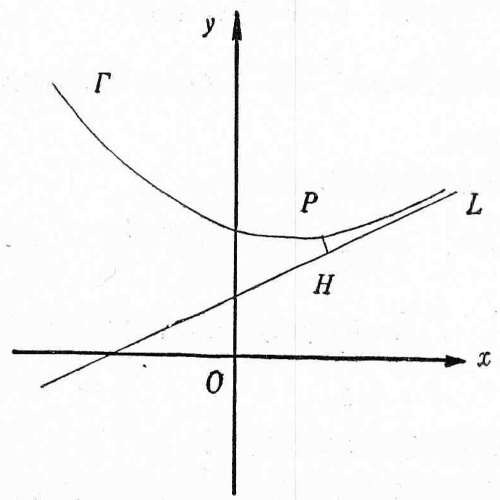
代數對象 ⋯揣求⋯→ 幾何對象 ⋯提煉出⋯→ 幾何特徵性質 ⋯代數化⋯→ 代數條件

↑⋯⋯⋯⋯分類演繹或澄釋⋯⋯⋯⋯↑

「求漸近線」常出現在有關二次曲線的一些問題之中，這裏將引用極限來尋求某曲線之漸近線的一般方法。

在座標平面上，設 $y=f(x)$ 爲某一曲線 Γ 的方程式。

假如曲線 Γ 的一動點 P 沿 Γ 的趨向無窮遠時，點 P 至一直線 L：$y=mx+b$ 的距離漸漸縮短。在這個情形下，直線 L 便稱爲該曲線 Γ 之漸近線了。（請參看下附圖）



首先我們已有「幾何對象」：直線 Γ：$y=mx+b$ 爲曲線 $y=f(x)$ 之漸近線。

至於它的代數條件，則有賴「極限」來探討。以距離漸漸縮短來揣求出式子來處理：

當 P 點沿曲線 Γ：$y=f(x)$ 趨向無窮遠時，點 P 至直線 L 距離 d 漸漸趨向零。換句話說：當 $x\longrightarrow\infty$（或 $-\infty$）則 $f(x)\longrightarrow mx+b$ 這便是我們所要求的代數條件。

接下來，我們將這個求曲線之漸近線問題加以剖析如下：

當曲線 Γ：$y=f(x)$ 以直線 Γ：$y=mx+b$ 爲其漸近線時，則曲線上任一點 $P(x,f(x))$ 至直線 L 之距離 d，可由下式子來計算。

$$d=\frac{|f(x)-mx-b|}{\sqrt{m^2+1}} \qquad \text{（距離公式）}$$

故：距離 $d\longrightarrow 0$ 的充要條件寫成代數式是：

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx-b]=0$$

因此，欲決定直線 L 須得先求其斜率 m 及截距 b。

今分款討論如后：

(1)斜率 m 之求法：

因爲 $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx-b)=0 \cdots\cdots \text{（甲）}$$

所以 $$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-m-\frac{b}{x}\right)=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-m=0$$

最後得 $\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

截距 b 之求法:

由(甲)式得 $\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

例說: 試求 $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x}(x\neq 0)$ 的斜漸近線 L 方程式。

解: 設 L 之方程式爲: $y=mx+b$

其中: $\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-1}{x^2}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)$$

$$=2$$

故斜漸近線 L 方程式爲 $y=x+2$

常常在求某曲線之漸近線方程式時，係數 m 與 b 會產生下列三種情形。

第一種情形: $m=0$

在 $m=0$ 之情形下，x 軸方向便爲漸近方向，接着再觀察 b 之情形。

①若 $b\neq\infty$，而 b 爲一有限確定的數時，則漸近線 L 爲一水平漸近線。(見圖(一))

②若 $b=\infty$時，則曲線 Γ 無漸近線，而只是以 x 軸方向爲其漸近方向。(見圖(二))

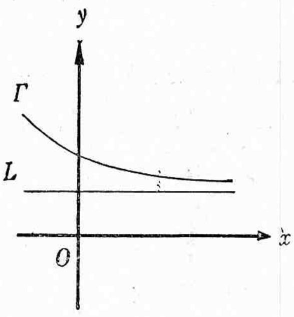


圖 (一)

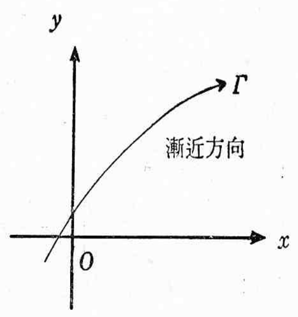


圖 (二)

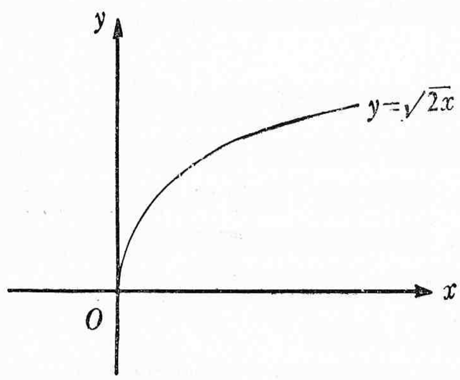
例說: 設 $y=f(x)=\sqrt{2x}$ 並求其漸近線。

解: 設其漸近線方程式爲 $y=mx+b$

其中: $\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2x}}{x}=0$

又 $\quad b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-0.x=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x}=\infty$

故: $\quad f(x)=\sqrt{2x}$ 只是以 m 軸方向爲其漸近方向如附圖:



第二種情形: $m=\infty$

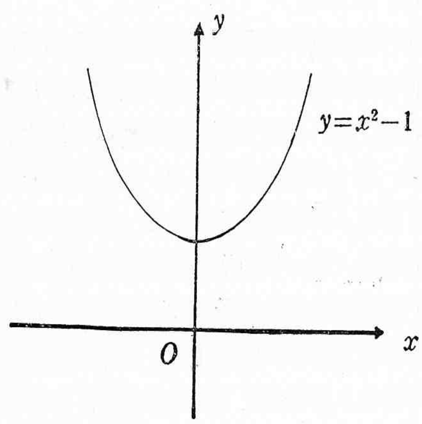
在 $m=\infty$ 之情形下，y 軸方向必爲其漸近方向。

例說: 設 $y=f(x)=x^2-1$，並求其漸近線。

解: 設漸近線方程式爲: $y=mx+b$

其中: $\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=\infty$

故: $\quad y=x^2-1$ 無漸近線，但只是以 y 軸方向爲其漸近方向。如附圖:



第三種情形:

在這情形下，曲線 Γ 必是以向量 $\overrightarrow{v}=(1,m)$ 之指向爲漸近方向。

例說: 設 $y=f(x)=x-3+\sqrt{2x+1}$ 並求其漸近線。

解: 設漸近線 L 之方程式爲: $y=mx+b$

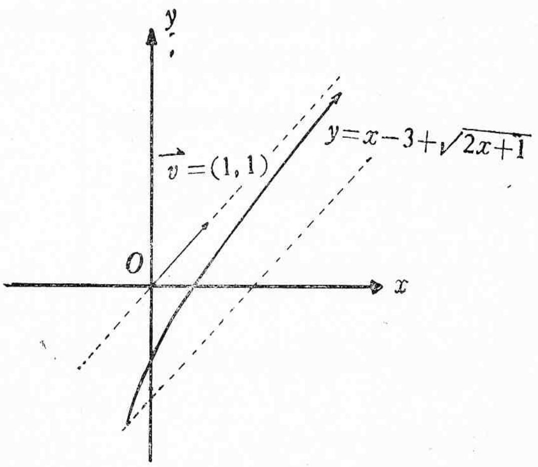
其中: $\quad m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3+\sqrt{2x+1}}{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x}}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-1\cdot x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(-3+\sqrt{2x+1})=+\infty$$

故曲線Γ: $y=x-3+\sqrt{2x+1}$是以向量$\overrightarrow{v}=(1,1)$之指向爲漸近方向。如附圖:



引述了一些例子之後，我們可以看出一個問題經「轉化」之後，從另一種角度來探討是很有俾益的。

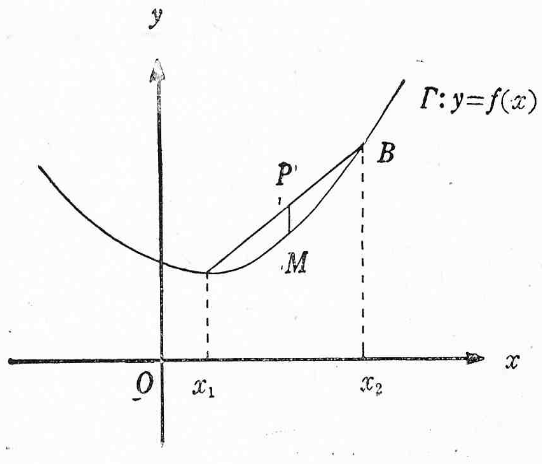
II. 方法整理心得——

函數圖形與不等式

在數學分析中，經常碰到形形色色的不等式如Cauchy-Schwarz 不等式，Holder 不等式……等等。而每一種不等式的證法，又都不相同。這裏試從研究函數圖退之凹凸性來處理這些不等式。更明白的說我們在處理一些不等式時，不祇把它看作一種代數問題，亦可把它看作在某一特定點上凹性的函數之某些點的相關位置關係，首先觀看下面定理。

定理: 對於一個函數 $y=f(x)$，若它的圖形是上凹的，則下列不等式成立。

$$f(m_1x_1+m_2x_2)\leq m_1f(x_1)+m_2f(x_2)$$



式中 m_1, m_2 爲兩正實數且 $m_1+m_2=1$

證明: 首先在 xoy 平面上畫出函數 $y=f(x)$ 圖形且稱之爲 Γ（見上圖示）

我們在具有上凹性之圖形Γ上任取兩點 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 且在 AB 線段上取任一點 $P(x, f(x))$

同時，自點P引作至x軸的一垂線。設與Γ的交點爲M。

既然P爲線段 AB 上任一點，故有一向量式:

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　　其中 $t\in[0,1]$

因爲
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MP}|&=|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}|\\&=(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\\&\quad-f((1-t)x_1+tx_2)\end{aligned}$$

且: $|\overrightarrow{MP}|\geq 0$

$\Longrightarrow$ $(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq f((1-t)x_1+tx_2)$

設$=u\,1-t$; $m_2=t$ 代入上式得:

$$f(m_1x_1+m_2x_2)\leq m_1f(x_1)+m_2f(x_2)$$

進一步考慮，上述定理之一般情形:

若函數 $y=f(x)$ 的圖形是上凹的，則下列不等式成立

$$\begin{aligned}&f(m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n)\\&\leq m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\cdots\cdots+m_nf(x_n)\end{aligned}$$

式中之n個正實數$m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n$ 滿足 $m_1+m_2+\cdots\cdots+\cdots\cdots+m_n=1$

使用Σ符號可將公式縮寫成如下之形式。

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} m_ix_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n} m_if(x_i),\ \text{式中:}\ \sum_{i=1}^{n} m_i=1\ (m_i\in R^+)$$

我們利用數學歸納法證明這個不等式如下:

當$n=1$時，不等式顯然成立。

當$n=2$時，不等式亦成立。（見上述定理）

今設 $f(\Sigma_{i=1}^{n-1} m_ix_i)\leq\Sigma_{i=1}^{n-1} m_if(x_i)$ 成立，式中

$m_i\geq 0$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$, 且 $\Sigma_{i=1}^{n-1} m_i=1$

得
$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}y_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}f(y_i)$$

其中 $y_1, y_2, \cdots\cdots y_{n-1}\in R$

$\lambda_i\geq 0$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ 且 $\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, 但 $\lambda_n\neq 1$

因
$$\begin{aligned}y_p=\min(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n-1})&\leq\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}y_i\\&\leq\max(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_{n-1})=y_q\end{aligned}$$

則
$$x=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_n}y_i\in[y_p, y_q]$$

且 $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i)=f((1-\lambda_n)x+\lambda_n y_n)$

$\leq(1-\lambda_n)f(x)+\lambda_n f(y_n)$

故 $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(y_n)$

應 用 叢 例

1. **Cauchy 不等式:**

$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$ 式中 a_i, b_i 爲正實數。

證明: 設Γ爲二次函數 $y=x^2$ 之圖形，易知這個函數圖形是上凹的。

取 $t_i=b_i^2, x_i=a_i/b_i,$

令 $t=t_1+\cdots\cdots+t_n, m_i=\frac{t_i}{t}$

由定理得

$$(\sum_{i=1}^{n}m_ix_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}m_ix_i^2$$

$$\Longrightarrow(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i^2)(\sum_{t=1}^{n}t_i)$$

$$\Longrightarrow(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$$

2. **算術平均數大於或等於幾何平均數:**

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdots\cdot a_n}$$

式中: $a_i\in R^+$, $i=1,2,\cdots\cdots,n$

證明: 令取函數: $y=f(x)=-\ln x$

這圖形是上凹的，引用上面的事實得

$$-\ln\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)$$

$$\leq\frac{-1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots\cdots+\ln a_n)$$

其中 $a_i\in R^+$

即 $\ln\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)\geq\ln\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}$

又 ln 函數是遞增函數。

故 $\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdots\cdot a_n}$ 成立

3. **一般型:** $\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}=x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots\cdots x_n^{\alpha_n}$

$\leq\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots\cdots+\alpha_nx_n$

其中 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n=1$

證明: 選取一函數 $y=f(t)=e^t$

因易得知其爲一上凹函數圖形，故 $\forall x_i\in R^+$

設 $y_i=\log x_i$ 並引用定理得

$$x_i^{\alpha_i}=\exp(\alpha_i\log x_i)=\exp(\alpha_i y_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}=\exp(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i)=f(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_if(y_i)$$

即 $\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\exp(y_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$

4. **特別型:** $x\cdot y\leq\frac{1}{\lambda_1}x^{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}y^{\lambda_2}$

略證: $n=2, \alpha_1=\frac{1}{\lambda_1}, \alpha_2=\frac{1}{\lambda_2}; x_1=x^{\lambda_1}, x_2=y^{\lambda_2}$

5. **Holder 不等式:**

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}$$

式中: $a_i, b_i\in R^+$, $\alpha+\beta=1$.

證明:

由(3)有 $x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}\leq m_1x_1+m_2x_2$ 關係

今設 $\begin{cases}x_1=\frac{a_i^{\frac{1}{\alpha}}}{a};\ x_2=\frac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{b} & \text{其中 } a\neq0, b\neq0\\ m_1=\alpha, m_2=\beta\end{cases}$

代入上式得

$$x_1^{m_1}\cdot x_2^{m_2}=\frac{a_ib_i}{a^{\alpha}\alpha^{\beta}}\leq\alpha\frac{\alpha_i^{\frac{1}{\alpha}}}{a}+\beta\frac{b_i^{\frac{1}{\beta}}}{b}\text{ 即:}$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq a^{\alpha}\cdot b^{\beta}[\frac{\alpha}{a}(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{\alpha}})+\frac{\beta}{b}(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{\beta}})]\cdots\text{甲}$$

特取 $a=\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{\alpha}}$; $b=\sum_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{\beta}}$

則 (甲) 式改寫成:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq a^{\alpha}b^{\beta}(\alpha+\beta)=a^{\alpha}b^{\alpha}(\because\alpha+\beta=1)$$

即: $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{\alpha}}).(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{\beta}})$

本文錄自六十七年度臺北市社教館舉辦之「社會科學創作比賽」第二名作品（第一名從缺）作者何景國先生任教於延平中學——編者按