聯 考 專 欄

細 目

六十七年聯考甲、丙組數學試題

解答、分析與評註

朱 建 正

前 言

預測數學出題趨勢，就像預測股市一樣——不可靠。卽使是同樣幾個人在出題，他們的想法也可能改變。但是股市還是和景氣，發行公司業績，國內外突發大事等有密切關係，不能完全推在大戶干預上。同樣的，數學出題還是得根據教科書，根據過去的試題的表現。例如說，過去一向不出的，一定有不能出的理由，分析這些理由，看看站得住脚否? 有些材料雖然不能直接說是出了，但是學生若是學過這些材料，則可以省時省力，又可避免易致錯誤的冗長計算，例如簡易的微分法求極大極小，或是求固有值公式等。

陳達在一卷一期說，試題應該著重學生在三年的數學的熟習程度，甚於發掘學生將來學習高等數學的潛能。他並不否認，這種安排對數學系的選才稍有不利。我認爲，這種偏重也會造成聰明勤快的學生的過度熟習，以致妨礙他們在高中階段對數學做更進一步的學習，例如微積分，線性代數等。我接觸到許多高中學生，他們都有這種自修能力，他們不必要極有數學才能，也不必是志願數學系的，因爲這些數學乃理工科學生所必修。不過，這實在是我們整個單行階梯式的教育制度的嚴重弱點，不是命題所能挽回的，基本上，我贊成陳達的意見。

今年的題目重前者，去年的題目重後者。因此，竟有今年重考的，其數學分數反低於去年的現象。不客氣的說，這些學生根本放棄準備數學科。大部分的中學老師也稱許今年的命題。今年考試需要像電腦般的迅速準確，對過度熟習的人有利。接到問題後，卽能夠想到最迅捷的解法，沒有多少揣試各種解法的時

間。

此外，今年列的選擇答案方式，使學生不易猜答，而需要老實地去做。這樣做，有一個不算缺點的缺點，即在求出正確答案後，還要依題意小心做選擇的工作，以免在最後一刻出錯。陳達（見同文）不贊成複選題的理由，可以很正確地用在這幾年的三民主義，地理，歷史，英文等科上，但是數學考試出複選題（始作俑者）的用意，在防止學生從五個答案反過來揣求問題的正確解答。如果學生依照正常程序來解題，則單選、複選即無甚差別。

還有就是今年的大題數較少，例如一個塗色問題即有三小題，因此較容易的部分會做了，即先得一些分數。例如排列組合或然率的庚題，這是一個很合理的做法。

今年取消了去年備受攻訐的所謂連坐法。在寅題中，要求一個具兩位有效數字的量。例如說要比較自強號火車與聲音的速度，得把聲音的每秒 330 公尺，換算爲每小時 1200 公里（兩位有效數字），若是少算了一個零，再加上對「聽到聲音，火車就到了」的誇大，很可能相信自強號跑得比聲音快。可見數量級是一個物理量中最重要的成分。若是數量級錯了，則有效數字對了也無意義。同理，首位有效數字較次位重要。有鑒於此，又想使答案的計分法有較大的彈性，去年就設計成，答對數量級得若干分，數量級對了，再答對首位得若干分，首位又對了，再答對次位，再得若干分，這本來是合理兼顧部分成績的計分法。可惜今年試題中沒有繼續採用這些作法。

英文 default 是指因缺席或不終場而被判輸的意思，最近的例子有世界前西洋棋王的 Fisher 以及前重量級拳王的 Spinks，都因拒絕接受所屬協會的安排出賽而喪失頭銜。對贏方而言，雖是不勞而獲，總是有欠光彩而心中怏怏。考試豈能也有 default。試題的一些顯而易見的疏忽，不論是命題的，排版的或校對的錯誤，能考上的考生總有能力加以改正。對這類問題，聯招會不是置之不理，就是全部都給分。全部給分時，對會的考生實際上非常不公平，但是我很少聽到會的考生的呼聲。不知他們是不懂統統給分等於統統不給分，還是不好意思不同情不會處理這題的弱者。

我在大學敎書，每次考試若是出錯題目，往往會產生意想不到的，更能測出考生能力的現象。例如有一次要他們作函數圖形，因係數弄錯，使拐點的 x 坐標變成無理數。居然有學生答成：無拐點。啊哈！原來這個學生把無理數摒於實數軸之外了。如果我照本意出，使拐點的 x 坐標成爲有理數，我就測不出學生的錯誤了。我對學生的要求是，題目錯了，自行改過來，而且不能改成使題目變成太簡單到無意義的地步。當然，題目最好不出錯。而且自行改正，對聯考而言不完全行得通。

這次的小爭論是寅題的有效數字問題。聯招會不予理會。因此引起許多師生的不滿。

答案 $E=4115$ 是對的，可是因爲許多老師考生的心目中，認爲三位有效數字的意思，就是最後一位要置零。所以答案 E 就是一個 default，它根本不合規定嘛。

我們現在針對聯招會處理這類問題的辦法，大致上歸納出對考生最有利的對策。目的在不吃虧的前提下節省時間。

1. 若題目有數字，符號印錯，則根本不必去花腦筋了，因爲這題統統有獎。如 $\cos A$ 印成 $\mathrm{cso}A$ 之類的。

2. 若不是印錯，則分兩種情形。若屬指示錯誤型，則視錯誤指示或正確指示，何者易爲而爲之。如去年複選指示爲單選，則找一個對的就行了。

3. 另一種情形就像這題有效數字的，就要注意依問題的實質去解釋，不要取巧了。因爲這些命題者一定是考實質問題，而不會去考定義啦，約定啦之類的東西。

此次試題的跳號也惹來許多波折。**跳號不是爲了避免作弊**，本意是要便利學生的。同一大題的題號相連，頗便於考生查核。

分題解答及討論

試題最前面印有考生特別注意以及計算時可能需要的函數表，現予略去。

【甲】 方程式 $x^4-2x^3-2x-1=0$

4. (A)沒有實根
(B)有二虛根，二無理根
(C)有二虛根，二有理根
(D)有二虛根，一有理根，一無理根
(E)有一虛根，三實根。（4分，單選）

答：(B)

解一：

$$x^4-2x^3-2x-1=x^4-1-2x(x^2+1)$$
$$=(x^2-2x-1)(x^2+1)$$

$x^2-2x-1=0$ 之根爲 $1\pm\sqrt{2}$。故原方程式有二虛根，二無理根。

解二：

由笛卡兒勘根法則，原方程式的變點數爲1，再經負根變換後，變號數亦爲1，故有正根，負根各1，虛根2。

評註：

這兩種辦法各有其限制。通常分解因式不易，而笛卡兒勘根定理，在變號數與正根數之間差一偶數。當然，最完善的勘根定理是 Sturm 定理。利用微分作函數圖形來判斷亦可行。因本題可以分解因式的跡象頗爲明顯，猜測出題者的用意在考分組分解法的分解因式。

【乙】 解下列聯立方程組

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0\\[2mm]\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=5\\[2mm]\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{z}=-4\end{cases}$$

可得。

6. (A) $x=1$ (B) $x=2$ (C) $y=-1$ (D) $y=1$
(E) $x+y+z=\dfrac{7}{6}$ （5分，複選）

答：(D, E)

解：

用加減消去法，將原式分別標爲 (1)(2)(3) 式。

(2)−(1)×2

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=5 \qquad (4)$$

(3)−(1)×4

$$-\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=-4 \qquad (5)$$

由 (4)(5) 得 $\dfrac{1}{x}=2$，$\dfrac{1}{y}=1$，故 $\dfrac{1}{z}=-3$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{2},\ y=1,\ z=-\dfrac{1}{3},\ x+y+z=\dfrac{7}{6}$

評註：

這種本質上是一次聯立方程式的問題，初中生也會。但我在監考時，看到有人不會。用行列式解法不會比較快。

【丙】 擲一骰子，當點數 $X(X=1,2,3,4,5,6)$ 出現時，$\log_{10}(X^3+3)$ 之整數部分記爲 Y，並以 μ 表示 Y 之期望值。又設

$$F(y)=「Y\leq y 之機率」,$$

則有

8. (A) $\mu=\dfrac{1}{2}$ (B) $\mu=\dfrac{2}{3}$ (C) $\mu=1$ (D) $\mu=\dfrac{7}{6}$
(E) $\mu=\dfrac{4}{3}$ （4分，單選）

9. (A) $F(0)=0$ (B) $F(0)=\dfrac{1}{6}$ (C) $F(1)=\dfrac{2}{6}$
(D) $F(1)=\dfrac{4}{6}$ (E) $F(2)=\dfrac{5}{6}$ （4分，複選）

答：(D), (B, D)

解：

期望值 $\mu=\sum_{i=1}^{6}Y(X(i))P(X=i)$

$$=\frac{1}{6}\sum_{i=2}^{6}Y(X(i))=\frac{1}{6}\times 7=\frac{7}{6}$$

值9得自下表（實際上，不必算出 X^3+3，只需判斷其爲幾位數）

X	X^3+3	$\log_{10}(X^3+3)$ 之首數
1	4	0
2	11	1
3	30	1
4	67	1
5	128	2
6	219	2

$\therefore\ F(0)=1/6,\ F(1)=4/6,\ F(2)=1$

評註：

此題考你期望值及隨機變數的意義。

【丁】 若 $\alpha x^3+\beta x^2-47x-15$ 能析出 $3x+1$ 與 $2x-3$ 之因式，試求出 α 與 β，以及第三個因式 $\gamma x+\delta$。

11. (A) α 可被 5 除盡 (B) α 可被 6 除盡
(C) $10<\alpha\le 15$ (D) $15<\alpha\le 20$
(E) $20<\alpha\le 25$ （3分，複選）

12. (A) $\beta\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $\beta\in\{2,3,6,7\}$
(C) $\beta\in\{4,5,6,7\}$ (D) $\beta\in\{8,9\}$
(E) $\beta\in\{0\}$ （3分，複選）

13. (A) $\gamma\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $\gamma\in\{2,3,6,7\}$
(C) $\gamma\in\{4,5,6,7\}$ (D) $\gamma\in\{8,9\}$
(E) $\gamma\in\{0\}$ （2分，複選）

14. (A) $\delta\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $\delta\in\{2,3,6,7\}$
(C) $\delta\in\{4,5,6,7\}$ (D) $\gamma\in\{8,9\}$
(E) $\gamma\in\{0\}$ （2分，複選）

答: (B, E), (B), (C), (A, C)

解 1:

用未定係數法

$$(3x+1)(2x-3)(\gamma x+\delta)$$
$$=\alpha x^3+\beta x^2-47x-15$$

易知 $-3\delta=-15$ $\therefore \delta=5$

代入 $\delta=5$，左邊展開，用分離係數直式乘法

$$6\gamma x^3+(-7\gamma+30)x^2+(-3\gamma-35)x-15$$

$\therefore$ $3\gamma+35=47$ $\gamma=4$

故得 $\alpha=24,\ \beta=2$

解 2:

用餘式定理，定出 α,β 的一次聯立方程式。

$$-\frac{\alpha}{27}+\frac{\beta}{9}+\frac{47}{3}-15=0$$

化簡 $-\alpha+3\beta+18=0$ (1)

$$\frac{27}{8}\alpha+\frac{9}{4}\beta-\frac{141}{2}-15=0$$

化簡得 $3\alpha+2\beta-76=0$ (2)

$(1)\times 3+(2)$ $\beta=2$，$\alpha=24$

再用綜合除法

$$\begin{array}{rrrr|l} 24 & +2 & -47 & -15 & -\frac{1}{3} \\ & -8 & +2 & & \\ \hline 24 & -6 & -45 & & \end{array}$$

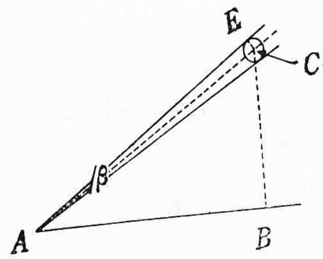
$$\begin{array}{lrrr|l} \text{除以3:} & 8 & -2 & -15 & \frac{3}{2} \\ & & 12 & & \\ \hline & 8 & +10 & & \\ \text{除以2:} & 4 & 5 & & \end{array}$$

得 $4x+5$ $\therefore \gamma=4,\ \delta=5$

評註:

先得出 $\delta=5$，是第一解的關鍵。這就是從敵方弱點中建立據點，再擴大戰果的例子，是一種對個別問題的敏銳觀察。

【戊】 有一廣告氣球，直徑爲 6 公尺，放在公司大樓上空。當行人仰望氣球中心之仰角 $\angle BAC$ 爲 30° 時，氣球之視角 $\beta=2^\circ$。試估計該氣球之高度 $BC=h$（公尺）（當 θ 很小時，$\sin\theta$ 得以 θ 爲其近似值）。



16. (A) $h=80$ (B) $h=86$ (C) $h=92$ (D) $h=98$
(E) $h=104$ （6分，單選）

答: (B)

解:

$$AC=\frac{3}{\sin 1^\circ}\doteqdot 3\times\frac{180}{\pi}\doteqdot 172$$

$$h=AC\sin 30^\circ=172\times\frac{1}{2}=86$$

評註:

視角的兩邊與氣球相切 E 爲切點之一，故 $\angle AEC$ 爲直角。撇開此事不談，此題只是簡單之三角測量。

氣球之高度應如何規定? 球心之高度，抑頂端或底端之高度? 按本題圖示，C 爲球心，故定爲球心之高度。

【己】 求 $8(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$ 在 $[\pi/6, 5\pi/12]$ 區間上的極大值 M 與極小值 m。

18. (A) $M\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $M\in\{2,3,6,7\}$
(C) $M\in\{4,5,6,7\}$ (D) $M\in\{8,9\}$
(E) $M\in\{0\}$ （4分，複選）

19. (A) $m\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $m\in\{2,3,6,7\}$
(C) $m\in\{4,5,6,7\}$ (D) $m\in\{8,9\}$
(E) $m\in\{0\}$ （3分，複選）

答: (A, B, C), (C)

解 1:

$$8(\cos^4\theta+\sin^4\theta)$$
$$=8((\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$$
$$=8\left(1-\frac{1}{2}(\sin 2\theta)\right)=8\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)\right)$$
$$=6+2\cos 4\theta$$

θ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 之間變動，則 4θ 在 $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ 之間變動。

$4\theta=\pi$ 對應 $m=4$

$4\theta=\frac{5\pi}{3}$ 對應 $M=6+2\cos\frac{5\pi}{3}=6+2\cos\frac{\pi}{3}=7$

解 2:

用微分法

$$f(\theta)=8(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$$
$$f'(\theta)=32(\sin^3\theta\cos\theta-\cos^3\theta\sin\theta)$$
$$=-16\sin2\theta\cos2\theta=-8\sin4\theta$$

$f'(\theta)=0$，則 $4\theta=0, \pm\pi, \pm2\pi, \cdots\cdots, \theta=0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \cdots\cdots$ 僅 $\frac{\pi}{4}$ 落在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right]$ 之中。

代入端點 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}$ 及臨界點 $\frac{\pi}{4}$

得 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=8\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\right)=\frac{1}{2}(1+9)=5$

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=8\left(\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}\right)=8\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=8\left(1-\frac{1}{8}\right)=7$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=8\cdot2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=4$$

評註:

這題主要是代數配方及倍角公式之應用。用微分法求極值時，只要把端點及臨界點一一代入，比較大小即可。對本題而言，微分法佔不到便宜。

【庚】 玩具工廠製造一批正三角形塑膠板，大小相同，而有10種不同的顏色。用四個不同顏色的三角板可以黏成一個彩色正四面體。試問可以製成多少不同色樣的正四面體？（注意：兩個四面體，若可以適當地轉動成爲各面平行，而且使對應各平行面的顏色兩兩相同，就是有相同色樣）。設 N 爲上述所求之不同色樣的數目。求「於這些 N 種色樣的正四面體中，任意取出兩個，發現它們沒有一面是相同顏色」的機率 p（之最近似值）。再問：如果任意取出三個正四面體，發現它們沒有一面是相同顏色的機率 q 爲多少？

21. (A) $N=360$ (B) $N=420$ (C) $N=630$ (D) $N=1260$ (E) $N=5040$ （4分，單選）

22. (A) $p=\frac{1}{12}$ (B) $p=\frac{1}{14}$ (C) $p=\frac{1}{15}$ (D) $p=\frac{1}{18}$ (E) $p=\frac{1}{21}$ （4分，單選）

23. (A) $q=0$ (B) $q=\frac{1}{96}$ (C) $q=\frac{1}{64}$ (D) $q=\frac{1}{63}$ (E) $q=\frac{1}{42}$ （2分，單選）

答: (B), (B), (A)

求 N:

解 1: 將正四面體看成角錐。底面無限制，可塗10種顏色，側面成環狀排列，故可塗 $9\cdot8\cdot7/3$ 種顏色。但任何一面均可做爲底面，故於 $10\cdot9\cdot8\cdot7/3$ 再除以 4，得 ${}_{10}p_4/12=420$。

解 2: 自 10 色中任取 4 色爲 ${}_{10}C_4$，此 4 色產生兩種不同塗法，故答案爲 $2\cdot{}_{10}C_4$。

求 p:

自 420 個四面體中，任取 2 個，其法有 ${}_{420}C_2$ 種。自 420 個中，任取 2 個，顏色各各不同，其法爲

$\frac{420\times({}_6C_4\times2)}{2}$ 種。

（公式說明：第一次取法任意，有 420 種，第二次取，只剩 6 種顏色，故可取 ${}_6C_4\times2$ 種，但因一次取 2 個時，不論次序，故得）

上兩積相除，得 $\frac{30}{419}\sim\frac{30}{420}=\frac{1}{14}$

q 顯然爲零。

評註:

排列組合的解法最多，關鍵在從獨立或相關的判定中，作乘法或加法原理的運用，熟能生巧。求 p 最難，尤其緊張的考生，若沒看到 p 係取近似值，就完蛋了。故「（之近似值）」應置於22題號之後，較能提醒考生。

求 N 尚有一法，通稱 Pólya 定理。首先算出正四面體的剛體運動羣的元素總數，12。則 $N={}_{10}p_4/12$。（細節請參考本刊二卷四期第 59 頁。）這也是一個較一般性的方法，但不能爲一般高中生所接受。而且，反過來說，利用塗色問題的概念，亦可算出正多面體的剛體轉動羣的元素總數。例如去年的問題。用 6 色塗正四面體，有 $5\cdot3!$ 種方法，因 $\frac{{}_6p_6}{5\cdot3!}=24$，故得正六面體的剛體轉動羣的元素總數爲24。

求 q 值有開玩笑之成分，惜考生考至此，已無清醒之頭腦矣。

此題與去年塗正六面體有類似之處。後來坊間有參考書出了許多正多面體塗色問題供學生練習。其實學生亦可舉一反三，自行練習。有些成套智力測驗中，即以塗色問題做一個項目。當然不涉排列組合。解此類問題，除了排列組合原

理之運用外，最重要的，是要注意對稱的關係。本刊對去年那題的解法，中途抹去正立方體的對稱性，使問題複雜化了。歷屆大專試題中，有頗多運用對稱的例子，蓋對稱實爲幾何最基本的觀念之一。

【辛】 定義：若經由平移，旋轉後，曲線 γ_1 可以重疊在另一曲線 γ_2 上，則稱 γ_1 與 γ_2 全等。考慮下列諸曲線：

25. (A)$xy=1$ (B)$x^2-y^2=1$ (C)$y^2-x^2=2$

(D)$\sqrt{3}(x^2-y^2)+2xy-4=0$ (E)$2x^2-3xy-2y^2=2$

其中有些（其個數≥2）是全等的，而其餘均不全等。請在答案卡上，挑出全等的來。（7分，複選）

答：(A, C, D)

解 1:

化爲標準式 $Ax^2+By^2=1$ 後，看 $\{A,B\}$ 這一組數是否相等卽知是否全等。所以可用固有值法。

A. $\begin{vmatrix} \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}=0 \quad \therefore \lambda=\pm\frac{1}{2}$

B. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \therefore \lambda=\pm 1$

C. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \therefore \lambda=\pm\frac{1}{2}$

D. $\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4}-\lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \lambda=\pm\frac{1}{2}$

E. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{-3}{4} \\ \frac{-3}{4} & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \lambda=\pm\frac{5}{4}$

解 2:

恕不作用傳統坐標旋轉法卽先求旋轉角度 θ，再轉以求標準式。但是因 B,C,D,E 四式均極易分解成直交的兩個一次因式，故可將之旋轉至此二直交直線之方向以成 $XY=a$ 之形式。再比較 a 之值卽可。

A. $xy=1$

B. $x^2-y^2=1$ 卽 $(x+y)(x-y)=1$

令 $X=(x-y)/\sqrt{2}$ $\quad Y=(x+y)/\sqrt{2}$

得 $XY=2$

C. $y^2-x^2=2$，卽$(y+x)(y-x)=2$

令 $X=(y+x)/\sqrt{2}$ $\quad Y=(y-x)/\sqrt{2}$

得 $XY=1$

D. $\sqrt{3}(x^2-y^2)+2xy=4$ 卽

$(\sqrt{3}x-y)(x+\sqrt{3}y)=4$

令 $X=(\sqrt{3}x-y)/2$ $\quad Y=(x+\sqrt{3}y)/2$

得 $XY=1$

E. $2x^2-3xy-2y^2=2$ 卽

$(2x+y)(x-2y)=2$

令 $X=(x-2y)/\sqrt{5}$ $\quad Y=(2x+y)/\sqrt{5}$

得 $XY=2/5$

注意：設 $X=\alpha x+\beta y, Y=\gamma x+\delta y$ 則當 $\alpha\delta-\gamma\beta=1$，$\alpha^2+\beta^2=1, \gamma^2+\delta^2=1, \alpha\gamma+\beta\delta=0$ 時方能代表一旋轉，若是 $\alpha\delta-\gamma\beta=-1$ 則爲旋轉和一鏡射的合成。

解 3:

$Ax^2+Bxy+Cy^2=1$，其中 $H=A+C$，$\delta=AC-B^2/4$ 是旋轉的完全不變量。亦卽 H,δ 相等是兩曲線爲重合的充要條件。

此法與解 1 其實相同，因爲在 λ 的二次方程式中，H 卽其一次項係數，而 δ 爲其常數項，此法最佳。

若將全等改爲相似問題，也是很好的試題，此時這三種解法仍然可行。若再加上平移則本題更複雜化了。

在舊數學教材裏，H 與 δ 的不變性是代入旋轉公式後，經計算證得，然亦可直接由固有值而得。引入固有值理論因其爲平面二次曲線的化簡法而成爲正當，其實平面二次曲線的分類列在高中教材中的意義爲何，更是重要問題。

筆者在新竹中學時，張雙旺老師亦獨授此行列式公式，說可以作驗算化簡後的標準式是否正確之用，未說明此公式之來由，當時教材中僅有傳統方法，卽移轉公式，及移轉不變量。

此題可以說明，有時固然問題的有些解法沒超出傳統方法的範圍，但是另外的超出傳統的解法卻可以省時，省力，並減少錯誤的機會。

如果從線性代數裏的二次形式的理論來看，這三種解法表面上雖不相同，其實關係極爲密切。分析這些關係，對固有值的來龍去脈的了解，將極有幫助。這就是實驗本中想努力闡明的。

【壬】 已知無窮等比級數的和等於 $\frac{9}{2}$，其第二項爲 -2。試求此級數

$t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+\cdots\cdots, (t_2=-2)$

27. (A) $t_1=8$　(B) $t_3=1$　(C) $t_4=-\frac{2}{9}$

(D) $t_5=\frac{1}{24}$　(E) $t_6=-\frac{2}{81}$　（3分，複選）

令 $S_N=t_1+t_2+\cdots\cdots+t_N$ 爲上述級數之第 N 部分和。設 S_N 與該級數之總和 $9/2$ 相差(指其絕對值)小於 $1/10^4$。問 N 至少應爲何數?

28. (A) 9　(B) 10　(C) 11　(D) 12　(E) 13　（4分，單選）

答: (C, E), (B)

解:

設此級數之首項爲 a，公比爲 r

則 $\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=\dfrac{9}{2}\\ ar=-2\end{cases}$

解得 $r=\frac{4}{3}$ 不合，$r=-\frac{1}{3}$，故 $a=6$。

t_1 至 t_6 依次爲 $6, -2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{2}{27}, -\frac{2}{81}$

又因 $S_N=\dfrac{a(1-r^N)}{1-r}$

$\therefore\ \left|S_N-\frac{9}{2}\right|=\left|\dfrac{ar^N}{1-r}\right|=\dfrac{6\cdot 3^{-N}}{4/3}=\dfrac{3^{2-N}}{2}<10^{-4}$

得 $\log 2+(N-2)\log 3>4$　求最小的 N 滿足下式

$$N-2>\frac{4-0.3010}{0.4771}=\frac{3.699}{0.4717}$$

因　$7<\dfrac{3.699}{0.4771}<8$

$\therefore$　$N=10$

評註:

求 N 是常見的運用對數估計的問題，因 N 爲滿足條件之最小整數，故需特別小心，以確定爲最小。

誤差估計是最有用的數學之一，但往往需要繁複的計算，以致於不易列入考題之中，因考試都有時間和運算工具的限制。

【癸】 試做

$$\begin{aligned}&b^2c^2d^2(b-c)(c-d)(d-b)\\&-c^2d^2a^2(c-d)(d-a)(a-c)\\&+d^2a^2b^2(d-a)(a-b)(b-d)\\&-a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

的因子分解，從而自下列十個式子中挑出其因式。

30. (A) $(a-b)$　(B) $(b-c)$　(C) $(c-a)$　(D) $(d-a)$
(E) $(d-b)$

*31. (A) $(d-c)$　(B) $(a+b+c+d)$
(C) $(ab+bc+cd+da+db+ac)$
(D) $(a^3+b^3+c^3+d^3)$
(E) $(abc+abd+acd+bcd)$

(*此兩小題十格爲6分，複選，錯了倒扣題分之 $\frac{1}{960}$)

答: (A, B, C, D, E), (A, E)

解:

可以查出原式爲含 a, b, c, d 的交代對稱式。（通常省去對稱兩字）即任意互換兩變數時，與原多項式差一負號。這種式子必有

$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)=\triangle$ 的因子。

由一般理論知所餘因子必爲含 a, b, c, d 的3次完全對稱式。（通常省去完全兩字）

查△中所有含 a 的最高次項中，含 b 最高次者中，含 c 因子的爲 a^3b^2c，而原式的對應項爲 $a^4b^3c^2$，兩者相差 abc，故剩餘因子必爲由 abc 展出之對稱式，即 $abc+abd+acd+bcd$。

評註:

這是舊教材中，最常見的因式分解問題，即分解交代式的因子。所以有人認爲此次考試爲舊教材的復活。這類題目若是初次見到，不易應付。不論展開法或代入法都會感到不對勁。但是這類題目的標準算法卻是相當機械的。

本題若不是出以選擇題的方式，則這樣解並不完整。因爲我們所能說的，是剩下的因子中，必含有由 abc 展出之對稱式爲其**一部分**，此因子很可能要加上其他三次對稱形式的東西。完整的解法是列出所有三次對稱形式，以未定係數法加以確定。

但是對本題而言，很容易看出，除了由 abc 展出的對稱式以外，就沒有了。這是因爲 abc 的同形項，所含變數都只有一次的緣故。

讀者也許還想再弄清楚些，因限於篇幅，只好有待在數與學中專文介紹了。

這題要全部分解對了才給分，其實考交代式的特性那部分，亦可酌量給分。

【子】 若 $x^2+px+q=0$ 之一根爲另一根之平方，則 p 與 q 之間必有一關係式。其形式如下:

$$p^3-(lp-1)q^m+q^n=0$$

試求 l, m, n。

33. (A) $l\in\{1,3,5,7,9\}$　(B) $l\in\{2,3,6,7\}$
(C) $l\in\{4,5,6,7\}$　(D) $l\in\{8,9\}$

(E) $l\in\{0\}$ （3分，複選）

34. (A) $m\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $m\in\{2,3,6,7\}$
(C) $m\in\{4,5,6,7\}$ (D) $m\in\{8,9\}$
(E) $m\in\{0\}$ （3分，複選）

35. (A) $n\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $n\in\{2,3,6,7\}$
(C) $n\in\{4,5,6,7\}$ (D) $n\in\{8,9\}$
(E) $m\in\{0\}$ （3分，複選）

答: (A, B), (A), (B)

解 1:

設一根爲 α，則另一根爲 α^2，由根與係數的關係得,

$$\begin{cases}\alpha+\alpha^2=-p\\ \alpha^3=q\end{cases}$$

消去 α $\quad\alpha^3(1+\alpha)^3=-p^3$

$q(1+\alpha^3+3\alpha(1+\alpha))=-p^3$

$q(1+q-3p)=-p^3$ 即 $p^3-(3p-1)q+q^2=0$

此消去法的關鍵在把 $(1+\alpha)^3$ 寫成 $1+\alpha^3+3\alpha(1+\alpha)$

解 2:

若能注意 $\alpha^2+p\alpha+q=0$ 爲另一含 α 的二次式，可消去 α^2。

故得 $\quad p\alpha+q=p+\alpha$

$\therefore\alpha=\dfrac{p-q}{p-1}$ 再代入 $\alpha+\alpha^2=-p$

得 $\dfrac{p-q}{p-1}+\left(\dfrac{p-q}{p-1}\right)^2=-p$ 化簡即得。

解 3:

把最先兩式帶入 $p^3-(lp-1)q^m+q^n=0$

得 $\quad-(\alpha+\alpha^2)^3+(l(\alpha+\alpha^2)+1)\alpha^{3m}+\alpha^{3n}=0$

依指數是否爲3的倍數分組

$$-3\alpha^3(\alpha+\alpha^2)+l\alpha^{3m}(\alpha+\alpha^2)-\alpha^3(1+\alpha^3)+\alpha^{3m}+\alpha^{3n}=0$$

$$(-3\alpha^3+l\alpha^{3m})(\alpha+\alpha^2)-\alpha^3-\alpha^6+\alpha^{3m}+\alpha^{3n}=0$$

得 $\quad l=-3,\ m=1,\ n=2$

因上式爲恆等式，故同次項係數之和恆爲0。

以上解法確爲某校老師解給學生看的，諸位的意見如何?

評註:

這題是筆者當年考省立新竹高中的題目。我在初三時，與三，四位同學把彭商育老師編的代數，平面幾何的參考書，全部做了一遍，我自己大概做了兩遍，書中恰有此題。我那時不知 $\alpha(1+\alpha)$ 的訣竅，但是在幾個式子亂搞之下，我不知不覺消去 α。因爲做了不只一次，簡化後，大概摸到了竅，但不能說是主動掌握了訣竅，只是糊里糊塗地背下來罷了（猜想，那時我大概是用解二）。因我考前準備得太熟了，下筆時好像都是用背的似的，所以做完還有時間檢查兩次。這就是一種過度熟習的現象。當然，當時沒有人指點閱讀更深的書也是原因之一。施拱星先生常嘆說，我們的學生起步太慢，即指此事。

【丑】 設 γ_n 爲複數 $-2^{\frac{n}{10}}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$ 的實數部分。試求有限數列 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots\cdots\gamma_{90}$ 中的最大項。設第 $10p+q$ 項爲最大，試估計此最大項 $\gamma_{10p+q}\doteqdot M\cdot10^N$（取一位有效數字的近似值，而式中的 p,q,M 及 N 均爲 $0,1,2,\cdots\cdots$ 至 9 之整數）。

37. (A) $p\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $p\in\{2,3,6,7\}$
(C) $p\in\{4,5,6,7\}$ (D) $p\in\{8,9\}$
(E) $p\in\{0\}$

*38. (A) $q\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $q\in\{2,3,6,7\}$
(C) $q\in\{4,5,6,7\}$ (D) $q\in\{8,9\}$
(E) $q\in\{0\}$

（* 以上 37, 38，兩小題十格爲4分，複選，錯了倒扣題分的 $\frac{1}{960}$。）

39. (A) $M\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $M\in\{2,3,6,7\}$
(C) $M\in\{4,5,6,7\}$ (D) $M\in\{8,9\}$
(E) $M\in\{0\}$ （3分，複選）

40. (A) $N\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $N\in\{2,3,6,7\}$
(C) $N\in\{4,5,6,7\}$ (D) $N\in\{8,9\}$
(E) $N\in\{0\}$ （3分，複選）

答: (D), (A, B, C), (C), (B)

解:

用複數的極式變爲

$$-2^{\frac{n}{10}}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n$$

$\therefore\quad\gamma_n=-2^{\frac{n}{10}}\cos\dfrac{n\pi}{3}\quad 1\leq n\leq90$

對 $2^{\frac{n}{10}}$ 而言，n 愈大愈好，但也要考慮 $\cos\dfrac{n\pi}{3}$，它的可能值爲 $0,\pm\dfrac{1}{2},\pm1$。本問題中，$\cos\dfrac{n\pi}{3}$ 應取 $-\dfrac{1}{2}$，或 -1。

即 $\dfrac{n\pi}{3}=(2m+1)\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\longrightarrow-\dfrac{1}{2}$

得 $n=3(2m+1)\pm1$ $\qquad$ 即 $n=\begin{cases}6m+4\\6m+2\end{cases}$

或 $\dfrac{n\pi}{3}=(2m+1)\pi\longrightarrow-1$ 即 $n=6m+3$

n增 1, $2^{\frac{n}{10}}$增 $2^{\frac{1}{10}}$倍，但$\left|\cos\frac{n\pi}{3}\right|$爲$\frac{1}{2}$或 1，變化較大。

故取 $n=6m+3$，$m=14$，$n=87$.

$$r_{87}=2^{\frac{87}{10}}$$

$$8.7\log_{10}2 \doteqdot 8.7\times 0.301=2.6187$$

查試題所附函數表，$\log_{10}2=0.3010$

故算得 $\log_{10}4=0.6020$

$\log_{10}5=1-0.301=0.699$

$\therefore \quad r_{87}\doteqdot 4\cdot 10^2$

評註:

此題需謹愼。先是有負號，後有$\frac{1}{2}$及 1 之別，然後有 $\log_{10}4$ 與 $\log_{10}5$ 之比較。

【寅】 假設地球是個圓球，半徑爲6400（公里）。我們以地心爲原點，南北兩極的連線，即地軸爲 z 軸，向北爲正，赤道面爲 xy 坐標平面，過地軸截零度經線的平面爲 xz 平面，此經線以東之 y 坐標爲正。試求甲地（東經120°，北緯 40°）之直角坐標 (x, y, z) 到三位有效數字。

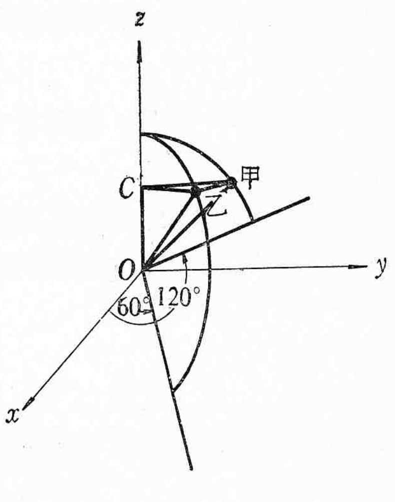
42. (A) $x=-2450$ (B) $x=4250$ (C) $y=-4250$ (D) $y=2450$ (E) $z=4115$ （5分，複選）

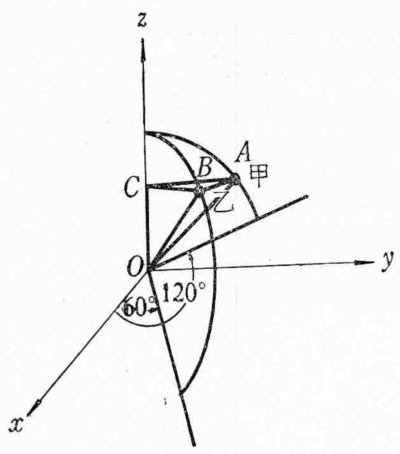
又設（這是個洲際飛彈的計算問題）乙地爲（東經60°，北緯 40°）。試計算自乙地到甲地的（最短的）地面距離（兩位有效數字）。

今設答案爲$\left(a+\frac{b}{10}\right)\times 10^3$ 公里，則

43. (A) $a\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $a\in\{2,3,6,7\}$ (D) $a\in\{4,5,6,7\}$ (D) $a\in\{8,9\}$ (E) $a\in\{0\}$

*44. (A) $b\in\{1,3,5,7,9\}$ (B) $b\in\{2,3,6,7\}$





(C) $b\in\{4,5,6,7\}$ (D) $b\in\{8,9\}$ (E) $b\in\{0\}$

（* 以上兩小題十格爲 6 分，複選，錯了倒扣題分的 $\frac{1}{960}$。）

答: (A, E), (A, C), (E)

解:

因 y 軸正向過東經 90°，故甲地在（$-,+,+$）卦限。坐標爲

$$(-R\cos 40^\circ\sin 30^\circ, R\cos 40^\circ\cos 30^\circ, R\sin 40^\circ)$$

$R=6400$ 計算

$$(-2451, 4245, 4114)$$

A（甲），B（乙）兩地的緯度同爲 40°

故 $BC=R\cos 40^\circ$，且$\angle ACB=60^\circ$

故 $AB=BC=R\cos 40^\circ$

現求$\angle BOA$

$$AB^2=2R^2-2R^2\cos\angle BOA$$

$$\therefore \quad \cos\angle BOA=\frac{R^2(2-\cos^2 40^\circ)}{2R^2}$$

$$=1-\frac{\cos^2 40^\circ}{2}\doteqdot 0.7066$$

$$\therefore \quad \angle BOA\doteqdot\frac{\pi}{4}\left(\text{查試題函數表},\cos\frac{\pi}{4}=0.7071\right)$$

$\therefore$最短距離$\doteqdot 6400\times\frac{\pi}{4}\doteqdot 5024\doteqdot 5.0\times 10^3$

評註:

首先，有的高中生不知道經緯度如何定義的。就像鄉下學生不知平信郵資多少一樣。其次，最短距離是大圓（即過球心的平面與球面的相交曲線），這事實雖然需要一點證明，卻也應該人人知曉。是故，最短距離曲線應在 AOB 平面上，而不在 ACB 平面上。這個我及我同事都搞錯過。

這兩點都搞淸楚後，剩下的只是畫個圖作點立體幾何的思考，球面三角學只算摸到邊。

這題當然還有那擾人的有效數字問題。歸根結底，該歸咎於高中的有效數字都是紙上談兵，從未實際用過。

其實，這題倒是有點小毛病，卽在求 $\angle AOB$ 的度數。通常若已經知道 AB 及 $OA=OB$ 的值後，都是先算 $\theta=\frac{1}{2}\angle AOB$ 的度數，因 $\sin\theta=\frac{1}{2}\ \frac{AB}{OB}$。但本題若如此算，則就無法從首頁所附的幾個三角函數值找到答案了。所以只好用比較笨拙的餘弦公式。

後記:

本文完成後，承康明昌，賴東昇，童恩賢，曹亮吉，楊維哲諸同仁閱過，並予指正，特此致謝，惟文責完全由本人負擔。

——本文作者任敎於臺大數學系

合理帶來鼓舞

陸思明

大學聯招的主旨，原本是評量、選才。但因聯考影響敎學，甚或領導敎學的這一不爭事實，逐漸形成了它的另一項更鉅大的任務，那就是——**帶領高中敎育走上正確的方向!**

「數學」是大多數學生最感頭痛的一科加上前兩年數學試題偏多偏難，已產生下面一些可悲的現象:

(一) 老師遵照敎材辛辛苦苦敎了三年，學生兢兢業業學了三年，而所學的那些觀念與方法，在聯考時大都派不上用場(註一)。大家白辛苦一場，耕耘而無收獲！結果老師灰心，學生傷心，而又莫可奈何。

(二) 數學試題常因命題敎授的偏好，年年出現翻天覆地的大變動，內容與重點毫無定規可循，使得高中數學老師「不知敎什麼才管用」，更不知「敎多少才夠用」。身陷迷霧，那兒看得見什麼數學敎育的正確方向?

(三) 去年乙組數學高標準是18分，可見大多數中材學生，只能掙扎在20分邊緣，甚或10分左右。他們在數學上付出的時間最多(平均每週4至5小時數學課)，而「所獲」竟如此可憐，我們又如何能怪他們要高喊『放棄數學』呢?

附語: 前兩年數學試題也有它正面的效果，那就是因爲題目“有深度”，所以「套公式，背解答，猜題」這一類歪風邪道已無所用其技。

今年，數學試題有了轉機！考試後我遇到不少高中數學老師，他們異口同聲地讚揚:「這次題目出得不錯!」爲此，我特地在七月六日下午去旁聽師大數學系系友會對它的討論，果然褒多於貶，除在細節方向提出若干改進外，大家都推許這是一次非常成功的命題!

讓我們看看這份試題爲什麼會贏得普遍的彩聲。

註一: 據科學敎育第12期第15頁鄭昭雄老師對66年數學試題之分析中，抽樣發現臺北市35班學生中有6班學生在校的數學成績與他聯考的成績毫不相關。