上期演練試題解答

應 用 數 學 測 驗

羅 添 壽

(一)D

說明:

當 $0 \leq t \leq 4$ 時, $y=2$

$4 \leq t \leq 8$ 時, $y=6-t$

$8 \leq t \leq 12$ 時, $y=-2$

$12 \leq t \leq 16$ 時, $y=t-14$

以下如此返復,故知為週期函期,其週期為16

(二)A

說明:

若每件少賺 x 角,則每天可多賣 $x \cdot 100$ 件

令 $f(x)=(40-x) \cdot 1000+(40-x) \cdot x \cdot 100$

$=-100x^2+3000x+40000$

$=-100(x-15)^2+62500$

故當 $x=15$ 角時, $y=62500$ 角

(三)B

(四)A, E

說明:

設 n 天後出售之價格是 $(30-0.5n)$ 元,

豬重 $(200+5n)$ 斤,售價比現在多 $f(n)$,則

$f(n)=100(200+5n)(30-0.5n)$

$-100\times30\times200-10\times100\times n$

$=250[64-(n-8)^2]$

故當 $n=8$ 時,有最大值 $f(8)=16000$

(五)A, C, E

說明:

各繩作用於連接點之力可視為以連結點為原點,自原點出發之三向量,則

$\overrightarrow{OB}=[|\overrightarrow{OB}|\cos45°, |\overrightarrow{OB}|\sin45°]$

$=[|\overrightarrow{OB}|(\sqrt{2}/2), |\overrightarrow{OB}|(\sqrt{2}/2)]$

$\overrightarrow{OA}=[|\overrightarrow{OA}|\cos210°, |\overrightarrow{OA}|\sin210°]$

$=[(-\sqrt{3}/2)|\overrightarrow{OA}|, (-1/2)|\overrightarrow{OA}|]$

$\overrightarrow{OC}=[|\overrightarrow{OC}|\cos270°, |\overrightarrow{OC}|\sin270°]$

$=[0, -200]$

$\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$

$\Longrightarrow [(-\sqrt{3}/2)|\overrightarrow{OA}|, (-1/2)|\overrightarrow{OA}|]$

$+[(\sqrt{2}/2)|\overrightarrow{OB}|, (\sqrt{2}/2)|\overrightarrow{OB}|]+[0, -200]$

$=[0, 0]$

$$\therefore \begin{cases} (-\sqrt{3}/2)|\overrightarrow{OA}|+(\sqrt{2}/2)|\overrightarrow{OB}|=0 & (1) \\ (-1/2)|\overrightarrow{OA}|+(\sqrt{2}/2)|\overrightarrow{OB}|=200 & (2) \end{cases}$$

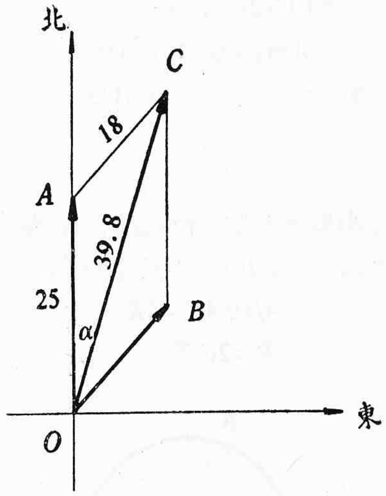
由(1), (2)得

$\overrightarrow{OA}=200(\sqrt{3}+1) \quad |\overrightarrow{OB}|=100\sqrt{2}(3+\sqrt{3})$

(六)說明:

因輪船向正南航行,故煙向正北吹設為 $\overrightarrow{OA}$,風由西南方向吹設為 $\overrightarrow{OB}$,則所求為 $\overrightarrow{OC}$,令 α 為所求之角度

$\because \angle BOA=45° \quad \therefore \angle CAO=135°$



由餘弦定律知

$|\overrightarrow{OC}|^2=25^2+18^2-2\times25\times18\cos135^\circ=949+450\sqrt{2}$

∴ $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{949+450\sqrt{2}}\approx39.8$

$\triangle OAC$ 中，由正弦定理知

$18/\sin\alpha=39.8/\sin135^\circ \Longrightarrow \alpha\approx18.7^\circ$

(七)C, D

說明:

銷售量及單價以矩陣表示為

$$\begin{bmatrix}58&26&8\\52&58&12\end{bmatrix} 與 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}58&26&8\\52&58&12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}134\\204\end{bmatrix}$$

由上知國內部總售價是 134，國外部總售價是 204，共 338。

(八)B

說明:

依題意知 $n=f(m)$，故

$f(m)/m<\sqrt{2}<(f(m)+1)/m$

$\Longrightarrow$ $f(4)/4<\sqrt{2}<f(4)+1$

$\Longrightarrow$ $f(4)=5\in N$

同理 $f(5)=7, f(6)=8.$

又 $f(16)<16\sqrt{2}<f(16)+1$

∵ $16\sqrt{2}\approx22.624$ ∴ $f(16)=22$

又 $(4,5),(5,7),(6,8)$ 不共線，故 f 非一次函數

(九)B, C, E

說明:

令 $AP=x$ 則 $BP=a-x$，面積和為

$x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2$

$=2\left[\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{1}{4}a^2\right]\geq\frac{1}{2}a^2$

當 $x=\frac{1}{2}a$ 時，最小面積 $m=\frac{1}{2}a^2$

(十)B, E

說明:

∵ $s=ab/2$ 且 $a+b+c=2$, 又 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

∴ $ab=2s$

又 $c^2=a^2+b^2=[2-(a+b)]^2$

$=4-4(a+b)+a^2+b^2+2ab$

$\Longrightarrow$ $4(a+b)-2ab-4=0$

$\Longrightarrow$ $4(a+b)=4s+4$

$\Longrightarrow$ $(a+b)=s+1$

∴ a, b 為 $x^2-(s+1)x+25=0$ 之二根

由上式知其根為實根

∴ $(s+1)^2-8s\geq0 \Longrightarrow s\geq3+2\sqrt{2}$

或 $s\leq3-2\sqrt{2}$, 又 $a<2$, $b<2$，故

$s=ab/2<2$ 有極大值 $3-2\sqrt{2}$

(十一)A, D

說明:

A, B, C 之座標分別為 $(0,3),(2\sqrt{2},2\sqrt{2}),(\sqrt{5},0)$

故 $a\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0&3&1\\2\sqrt{2}&2\sqrt{2}&1\\\sqrt{5}&0&1\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}(16\sqrt{2}-15)$

$BC=\sqrt{(5-5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{41-20\sqrt{2}}$

(十二)B, C

說明:

令交點P之座標為 (x, y)，由

$$\begin{cases}y=ax\\xy=1\end{cases}$$

解出 $x=1/\sqrt{a}$, $y=\sqrt{a}$

$\Longrightarrow$ $\overline{OP}^2=1/a+a$

但 $1/a+a\geq2$

故 $a=1$ 時有極小值 2

故 $\overline{OP}$ 在 $a=1$ 時有最小值 $\sqrt{2}$

(十三)C

說明:

設長方體之長、寬、高各為 x, y, z 則體積

$V=x\cdot y\cdot z$

此時 $xyz=V$ 為定數，而 $s=2(xy+yz+zx)$ 由算術平均數大於幾何平均數得

$$s=2(xy+yz+zx)\geq 2\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=6\sqrt[3]{V^2}$$

但當 $xy=yz=zx$ 卽 $x=y=z$ 時，卽正方體時，表面積最小。

(十四)C

說明:

設排成三個實心方陣，每邊 x 人，則

$$(20)^2-(20-5\times 2)^2=3\times x^2$$

$$\Longrightarrow 300=3x^2\Longrightarrow x=\pm 10 \text{（負不合）}$$

(十五)A, D, E

說明:

1, $\because$ $OP_1=\sqrt{2}$，$OP_2=2$，$OP_3=2\sqrt{2}$，……

$\therefore$ OP_1, OP_2, OP_3……爲一首項 $\sqrt{2}$，公比 $\sqrt{2}$ 之等比數列

2. $\because$ $OP_1=\sqrt{2}, OP_2=(\sqrt{2})^2, OP_3=(\sqrt{2})^3$……

$OP_{50}=(\sqrt{2})^{50}=2^{25}\in N$

3. $OP_1+OP_2+\cdots\cdots+OP_{10}$

$=2+(\sqrt{2})^2+\cdots\cdots+(\sqrt{2})^{10}$

$=\dfrac{\sqrt{2}((\sqrt{2})^{10}-1)}{\sqrt{2}-1}=31(2+\sqrt{2})$

4. $\triangle OP_{49}P_{50}$ 之面積爲

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{49}(\sqrt{2})^{49}=2^{48}$$

(十六)B

說明:

1. $s_n=\Sigma_{k=1}^{n}[(k-1)/n]^2\cdot\dfrac{1}{n}$

$=1/n^3\cdot\Sigma_{k=1}^{n}(k^2-2k+1)$

$=(\Sigma_{k=1}^{n}k^2-2\Sigma_{k=1}^{n}k+\Sigma_{k=1}^{n}1)/n^3$

$=[n(n+1)(2n+1)/6-2n(n+1)/2+n]/n^3$

$=(2n-1)(n-1)/6n^2$

2. $S_n=\Sigma_{k=1}^{n}(k/n)^2\cdot 1/n=1/n^3\Sigma_{k=1}^{n}k^2$

$=n(n+1)(2n+1)/6n^3$

$=(n+1)(2n+1)/6n^2$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}s_n=1/3=\lim_{n\to\infty}S_n$

$\Longrightarrow$ $s=1/3$

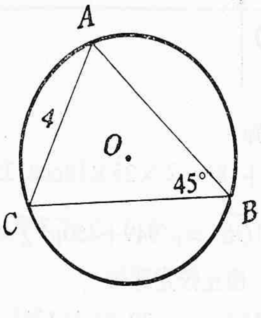
(十七)E

說明

設此 $\triangle ABC$ 外接球之半徑爲 R，則依題意 O, A, B, C 四點共面，且 A, B, C 三點恰在球上，由正弦定律知

$$4/\sin 45^\circ=2R$$

$\therefore$ $R=2\sqrt{2}$



$\therefore$ 球之體積爲 $4\pi R^3/3=64\sqrt{2}\pi/3$

(十八)A, C

說明:

由表得

$$\begin{cases}(72x+82y+86z)/(x+y+z)=81\\(86x+76y+74z)/(x+y+z)=78\\(78x+78y+80z)/(x+y+z)=79\end{cases}$$

兩兩聯立得

$$\begin{cases}4x-y-2z=0 & (1)\\x+y-z=0 & (2)\end{cases}$$

由(1)，(2)得

$$x:y:z=\begin{vmatrix}-1 & -2\\1 & -1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}-2 & 4\\-1 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}4 & -1\\1 & 1\end{vmatrix}$$

$=3:2:5$

又 $x+y+z=1\Longrightarrow x=3/10,\ y=1/5,\ z=1/2$