

# 本期演練試題

## 函數及其應用

羅添壽 設計

### 命題構想

1. 培養組織能力
2. 訓練思想，增強演練能力，並使學生有分析試題的能力
3. 配合題組，增加閱讀能力

1. (函數; 單選) 下表示一球自一斜面滾下  $t$  秒內所行之距離  $s$  之呎數

$t$	0	1	2	3	4	5	6	.....
$s$	0	5	20	45	80	125	180	.....

當  $t=2.5$  時距離  $s$  為

- (A) 26.25 (B) 31.25 (C) 35.25 (D) 36.25 (E) 不能算
2. (不定方程式求整數解; 單選) 平面上直線  $12x+26y=1978$  所通過之點，其縱橫坐標為正整數之點，其個數為 (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 0
3. (函數與對數; 單選) 函數  $f(x)$  為定義域是  $R^+$  之函數，且  $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ ,  $f(10) = 1$ ,  $f(2) = 0.301$  求  $f(16000)$  之值 (A) 3.214 (B) 4.305 (C) 4.204 (D) 3.240 (E) 5.240
4. (函數與對數; 單選; 摘自65年高中數學成就測驗) 設連續單調函數  $y=f(x)$ ，其中  $x > 0$ ，試問在下列那種情況下，可推得  $f(x)$  為對數函數 (A)  $f$  把加法化乘法，亦即  $\forall x, y > 0, f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  (B)  $f$  把乘法化加法，此即  $\forall x, y > 0, f(xy) = f(x) + f(y)$  (C)  $f$  保持加法，此即  $\forall x, y > 0, f(x+y) = f(x) + f(y)$  (D)  $\forall x > 0$  及  $t \in R, f(tx) = tf(x)$
5. (三角函數; 多選) 函數滿足  $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$ ,  $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$  且  $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$  則 (A)  $f(0) = 0$  (B)  $g(0) = 0$  (C)  $f(-x) = f(x)$  (D)  $g(-x) = g(x)$  (E)  $g(x)$  為偶函數 (註) 題中

$x, y \in R$

6. (三角函數與圖解數學; 單選; 6, 7 兩題為題組) 令  $f(x) = 2 - \sin x$ ,  $g(x) = 2 + \cos x$ ,  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  求使  $f(x) = x^2$  之實數  $x$  有多少個 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 0
7. (三角函數與極值; 多選) 承上題設  $f(x) \cdot g(x)$  之最大值是  $a$ ，最小值是  $b$ ，則 (A)  $|a| = |b|$  (B)  $a + b = 0$  (C)  $a > 7$  (D)  $b < 2$  (E)  $ab > 12$
8. (多項式; 多選) 設  $f(x) = (x^{10}-1)(x-1)/(x^2-1)$  ( $x^5-1$ ) 則下列何者成立? (A)  $f(x)$  可以化成  $x$  之多項式 (B)  $f(x)$  不可能化成  $f(x)$  之多項式 (C) 設  $h > 0$  則  $\lim_{h \rightarrow \infty} f(1+1/h) = 1$  (D) (C) 中的極限值不存在 (E)  $f(3) = 61$
9. (多項式; 多選) 設  $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$ ，則  $g(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} =$  (A)  $g(x) = (x+1)^3$  (B)  $g(x) = (x-1)^3$  (C) 不能表成多項式 (D)  $g(-1)$  不存在 (E)  $g(-1)$  存在且值是 0
- 說明: 設  $a, b \in R$ , “ $\circ$ ”與“ $*$ ”分別為  $R$  中一運算，定義  $a \circ b = a + b + 3$ ,  $a * b = a + b - 3ab$  回答下列兩題 (第10與第11題)
10. (運算基本性質; 多選) 下列何者為真? (A)  $(1 * 2) \circ 3 = 1 * (2 \circ 3)$  (B)  $(1 * 2) * 3 = 1 * (2 * 3)$  (C)  $(1 \circ 2) \circ 3 = 1 \circ (2 \circ 3)$

74 數學傳播 [問題類]

(D)  $(1 * 2) \circ 3 = (1 \circ 3) * (2 \circ 3)$

(E)  $(1 \circ 2) * 3 = (1 * 2) \circ (3 * 2)$

11. (運算與單位元素, 反元素; 多選) 若  $a + x = a, a, x \in R$  則稱  $x$  為  $R$  中之加法單位元素, 又若  $a + y = x$  成立, 且  $a, x, y \in R$ , 則  $y$  為  $R$  中  $a$  之加法反元素, 利用此性質, 設 “ $\circ$ ” 於  $R$  中之單位元素為  $x$ , “ $*$ ” 於  $R$  中  $a$  之反元素為  $y$ , 則

(A)  $x + y = 3$  (B)  $y = -a - 6$

(C)  $x - y = a + 3$  (D)  $x = 1$  (E)  $y > 0$

第12題至第18題為題組

說明 設  $f(x) = x(1-x), g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$  請依下列各題之條件回答下列各問題

12. (不等式; 多選) 記  $n \in \mathbb{Z}$  滿足  $f(x) > -72$  之  $n$  共有  $x$  個, 其中最大值為  $y$ , 最小值為  $z$ , 則

(A)  $x = 14$  (B)  $x + y + z > 16$  (C)  $x + z > y$

(D)  $2 < x + y + z < 6$  (E)  $x + y$  為合成數

13. (數列; 單選)  $\sum_{x=2}^{1976} 1/f(x) =$

(A)  $\frac{1976}{1978}$  (B)  $\frac{1977}{1978}$  (C)  $-\frac{1976}{1978}$  (D)  $-\frac{1977}{1978}$  (E) 不能算

14. (數列; 單選)  $\sum_{k=1}^{1978} \sum_{x=1}^{10} f(x) =$

(A) 65274 (B) -65274 (C) 65724 (D) -65724 (E) 以上皆非

15. (無窮級數; 多選) 設

$s = 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + \dots + x^{n-1}(1-x)^{n-1} + \dots$   
收斂則

(A)  $s$  之最大值為  $4/3$  (B)  $s$  之最大值為  $4/5$

(C)  $s$  之最小值為  $0$  (D)  $(1 - \sqrt{3})/2 < x < (1 + \sqrt{3})/2$

(E)  $s > 1/2$

16. (幾何機率; 單選) 設  $s = \{x | x \in \mathbb{Z} \text{ 且 } f(x) > -72\}$  令  $x$  是從  $s$  內隨機選取的一數 (每數被選取之機會均等) 則使不等式  $g(x) \leq 0, x \in \mathbb{Z}$  成立之機率

(A) 0.688 (B) 0.608 (C) 0.655 (D) 0.805 (E) 0.755

17. (圓錐曲線; 單選) 求  $(1/2, -2)$  至  $f(x) = x(1-x)$  上之點之最短距離

(A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\sqrt{2}$  (C) 1 (D)  $2\sqrt{2}$  (E)  $3\sqrt{2}$

18. (圓錐曲線; 多選) 承上題使其最短距離成立之坐標可為

(A)  $(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, -\frac{3}{2})$  (B)  $(1+\sqrt{7}, -\frac{3}{2})$

(C)  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$  (D)  $(1, 0)$  (E)  $(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, -\frac{3}{2})$

19. (複數之應用; 單選) 設  $g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4,$

$z \in \mathbb{C}$  (複數系) 求使  $g(|z|) \leq 0$  成立在複數平面上所成之區域面積

(A)  $12\pi$  (B)  $13\pi$  (C)  $14\pi$  (D)  $15\pi$  (E)  $16\pi$

20. (多項函數; 多選) 設函數  $g(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$  之極大值為  $M$ , 極小值為  $m$ , 則

(A)  $M = g(\frac{4 + \sqrt{19}}{3})$  (B)  $M = g(\frac{4 - \sqrt{19}}{3})$

(C)  $m = g(\frac{4 - \sqrt{19}}{3})$  (D)  $m = g(\frac{4 + \sqrt{19}}{3})$

(E)  $x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$  為臨界值

21. (指數函數; 單選) 設  $F(x) = (a^x - a^{-x}) / (a^x + a^{-x})$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 則  $F(x+y) =$

(A)  $[F(x) + F(y)] / [F(x)F(y)]$

(B)  $[F(x) \cdot F(y)] / [F(x) + F(y)]$

(C)  $f(x) + f(y)$

(D)  $[F(x) + F(y)] / [1 + F(x) \cdot F(y)]$

(E)  $[F(x) \cdot F(y)] / [1 + F(x) + F(y)]$

22. (指數函數; 單選) 承上題, 若  $F(a) = 2, F(b) = 3,$  則  $F(a+b) =$

(A)  $\frac{3}{5}$  (B)  $\frac{5}{7}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{7}{5}$  (E)  $\frac{1}{2}$

23. (二次方程式根之性質; 單選) 設  $s(n) = p^n + q^n$  且

$as(1) + b = 0, as(2) + bs(1) + cs(0) = 0,$

則  $ax^2 + bx + c = 0$  之二根為

(A)  $p, q-1$  (B)  $p, q$  (C)  $p, q+1$  (D)  $2p, 3q$  (E) 以上皆非

24. (二次方程式; 單選) 承上題之結果, 可得下列何者為真?

(A)  $as(n) + bs(n-1) + 1 = 0$  (B)  $as(n) + 4 = 0$

(C)  $as(n) + bs(n-1) + cs(n-2) = 0$

(D)  $as(n) = 0$

(E) 以上皆非

25. (餘式定理; 單選)

設  $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 4$ , 若以  $(x-1)^2$  除  $f(x)$ ,

餘式為  $2x-3$ , 則以  $(x+1)^2$  除  $f(x)$  餘式為

(A)  $2x+3$  (B)  $3x-2$  (C)  $-18x-15$  (D)  $x-4$

(E)  $15x-18$

26. (函數與餘式之運算; 單選) 求

$(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2})^3 + 3(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2})^2 - (\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}) - 6$

之值

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

27. (二次函數求極值; 多選) 設  $a \in \mathbb{Z}$  若  $x + y - z = 1,$   
 $x - 5y + 2z = 16, 3y + z = 5a,$  則當  $a = ?$  時,  $x^2 + y^2 + z^2$  有最小值為  $m$

- (A)  $a = -1$  (B)  $a = -1$  (C)  $m = 16$  (D)  $m$  為合成數  
(E)  $m$  為奇數

28. (二次函數求極值; 多選) 若  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2(a - 5)x + 2(3a - 19)$  之值恆大於 0, 今知  $a \in \mathbf{Z}$  則

- (A)  $a > 2$  (B)  $a > 4$  (C)  $a > 6$  (D)  $a > 8$  (E)  $a > 9$

29. (行列式與對數不等式; 單選)  $\forall x, a \in \mathbf{R}^+$

$$\begin{vmatrix} \log 2x & -1 \\ 1 & \log ax \end{vmatrix} > 0$$

恆成立選一個  $a$  最適當的範圍

- (A)  $\frac{1}{100} < a < \frac{1}{10}$  (B)  $\frac{1}{10} < a < 2$  (C)  $\frac{1}{5} < a < 210$

- (D)  $0 < a < 100$  (E)  $\frac{1}{50} < a < 200$

以下 31 題至 35 題為題組

說明 設  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 16$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4y$$

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1$$

$$k(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1$$

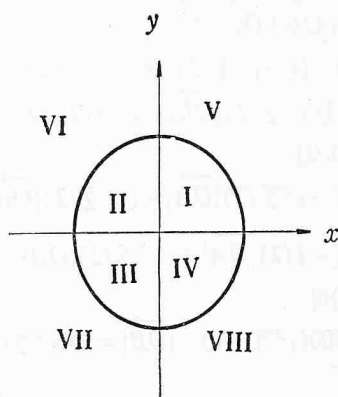
$$l(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

回答下列各題:

31. (求距離問題; 單選) 設  $A(p, q), B(r, s)$  為圓  $x^2 + y^2 = 1$  上二點, 若  $pr + qs = 0$  則  $M(p, r)$  與  $N(q, s)$  之距離為

- (A) 1 (B)  $\sqrt{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D) 2 (E) 3

32. (圓與坐標問題; 單選) 坐標平面被  $x$  軸,  $y$  軸及圓  $x^2 + y^2 = 1$  分成八部分 (每部分不含軸與圓如下圖) 設  $p(x, y) \in \mathbf{II}$ , 則點  $Q(2^{-x} \cos y, 2^{-x} \sin y)$  屬於



- (A) I (B) III (C) IV (D) V (E) VII

33. (圓與極值問題; 多選) 求  $p(8, 5)$  與  $f(x, y) = 0$  上之點之最近距離 與最遠距離  $M$ , 及最近點  $A$ , 最遠點

$B$  之坐標

- (A)  $M = \sqrt{89} + 4$  (B)  $m = \sqrt{89} - 8$

- (C)  $A(32/\sqrt{89}, 20/\sqrt{89})$  (D)  $A(2, 2\sqrt{3})$

- (E)  $B(-2, -2\sqrt{3})$

34. (圓與面積問題; 多選) 滿足  $f(x, y) \cdot h(x, y) \cdot k(x, y) \leq 0$  之點  $(x, y)$  所成集合為  $S$ , 則

- (A)  $S$  之圖形對稱於  $x$  軸 (B)  $S$  之圖形對稱於  $y$  軸

- (C)  $S$  之圖形對稱於原點 (D)  $S$  之區域面積為  $10\pi$

- (E)  $S$  之區域面積為  $12\pi$

35. (坐標變換; 多選) 於  $xy$  平面上將  $g(x, y) = 0$  之圖形平行於直線  $3x - y + 2 = 0$  向右上方移動  $\sqrt{10}$  單位而得  $g'(x, y) = x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$  則

- (A)  $d = 2$  (B)  $d + e = f$  (C)  $f > 0$

- (D)  $e = -10$  (E)  $d + e + f = 10$

36. (向量與函數; 多選)  $\vec{u} = [x, y], \vec{v} = [x - 3y, -y]$  且  $\vec{v} = f(\vec{u})$  又  $\vec{a} = [1, 1], \vec{b} = [1, 0]$ , 則

- (A)  $p, q \in \mathbf{R}, f(p\vec{a} + q\vec{b}) = pf(\vec{a}) + qf(\vec{b})$

- (B)  $p, q \in \mathbf{R}, f(p\vec{a} - q\vec{b}) = pf(\vec{a}) - qf(\vec{b})$

- (C)  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  之夾角為  $\pi/4$

- (D)  $f(\vec{a})$  與  $f(\vec{b})$  之夾角為  $\pi/4$

- (E)  $f(\vec{a}) \cdot f(\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

37. (矩陣之應用; 單選) 設

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

求  $A^{1978} =$

- (A)  $A$  (B)  $A^2$  (C)  $A^3$  (D)  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

38. (空間之直線問題; 單選) 空間上有一直線

$$L: \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

與球面

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z - 16 = 0$$

相交於  $A, B$  兩點, 則在  $\overline{AB}$  上座標者都是整數的格子點即整數解之個數共有

- (A) 0 個 (B) 1 個 (C) 3 個 (D) 6 個 (E) 無限多個

39. (分式函數; 多選) 對函數  $f(x) = x/(1+x)$  而言,

( $x \in \mathbf{R}, x \neq -1$ ) 下列何者恆真確?

- (A) 若  $0 < x_1 < x_2$  則  $f(x_1) < f(x_2)$

76 數學傳播 [問題類]

(B)若  $x_1 > 0, x_2 > 0$  則  $f(x_1) + f(x_2) > f(x_1 + x_2)$

(C)若  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 則  $f(x_1) + f(x_2) < f(x_1 + x_2)$

(D)若  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 則

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) > f(x_1 + x_2 + x_3)$$

(E)若  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 則

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

40. (分式型雙曲線; 多選) 設有一函數

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x - 1},$$

問下列那一敘述是正確的

(A)  $f$  的定義域是整個實數系

(B)  $f(x)$  的極小點為  $(2, 5)$ , 且其極小值為 5

(C)  $f(x)$  的極大點為  $(0, -3)$ , 且其極大值為  $-3$

(D)若  $0 < x_1 < x_2$ , 則  $5 \leq f(x_1) < f(x_2)$

(E)若  $2 < x_1 < x_2$ , 則  $5 < f(x_1) < f(x_2)$