數學史專題貳之二

割圓術始末

洪萬生

一、π是文化的一面鏡子

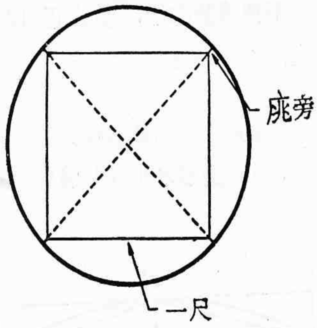
上古時代，人類由於適應實際生活的需要，逐漸發展出一些非常拙樸的關於數與形的直觀概念，史學家經常通過對這些概念的研究與審察，去瞭解當時人類文明生活的內容。比方說，觀察山東省的漢武梁祠石室浮雕，有「伏羲氏手執矩，女媧氏手執規」的圖像，可以看出上古時代應用規和矩二種工具，製作方形與圓形的歷史是如何的久遠。（按規卽圓規，矩類似於現在木匠所使用的曲尺。）從古代到現在，方形與圓形一直都是自然界最常見的二種基本幾何圖形，因而一個民族對這兩種幾何圖形（尤其是圓形）處理的情形，必然可以表現他們掌握自然界的信心與能力，而這更足以反映該民族的文化水平。方形與圓形所涉及的概念，不外乎是些面積與周長的計算，及這兩種圖形之間的相互關係等等，其中最爲困難的部份便是圓形的面積及周長的計算了。德國數學史家莫瑞茲·康托（Moritz Cantor)說得好：「歷史上一個國家所算得的圓周率的準確程度，可以作爲衡量這個國家當時數學發展水平的指標。」因此，筆者劈頭便說：π是文化的一面鏡子，雖然稍嫌誇張，卻也有幾分道理在吧!

二、劉歆的嘉量斛

周髀算經、九章算術、周禮考工記這三部中國最古老的科技作品都取$\pi=3$的近似值，這個粗陋的圓周率也是其他文明古國埃及、巴比倫所通用的數值，雖然他們個別地求到了 3.1604 和 3.125 的近似值。$\pi=3$放在當時的工藝技術的環境裏，確實發揮了它的簡便和好用。在中國，$\pi=3$的使用持續了好幾個世紀之久，直到劉歆的出現才打破這種沈寂的局面。

西元9年，劉歆（?−23, A.D.)爲王莽製作嘉量斛（標準量器），使用了$\pi=3.154$。這一個銅斛，現藏於故宮博物院內，上面刻有銘文：「律嘉量斛，方尺而圜其外，庣旁九釐五毫，冥（按卽冪）百六十二寸（按卽方寸），深(一)尺，積千六百二十寸（按卽立方寸），容十斗。」東周末年以後，度量衡制一片紊亂：王莽新朝重新製造標準器頒行天下，中國度量衡制度乃得以再歸統一局面。劉歆爲王莽鑄造的嘉量斛，就是模仿周禮嘉量鬴造的。銘文中所謂的「內方尺而圜（圓）其外」，並非指其內爲正方形，實際上是先定每邊一尺正方的形狀。然後由此正方形，再畫一個外接圓，這才是眞正的嘉量斛內容的形式。因爲在周朝時代，圓徑、圓周、圓面積還沒有精確的推算方法，故由方形起度而加以推算 。又由於技術上的限制，正方形的頂點與外接圓不能完全密合（圖一），「不足」之處就稱爲庣旁（註一）。

註一　這裏主要參考吳洛著的中國度量衡史（商務，民國64年6月臺三版）。關於王莽嘉量斛的內容形式，李約瑟認爲：「這個標準的量器，是由銅製的圓柱中，挖空成一個立方形的穴」（詳附錄(5)），與吳書所說不同。筆者前往臺北故宮博物院查證，赫然發現了一具新（朝）嘉量，正是劉歆所造，與吳書中附圖亦同。顯然，李約瑟誤解了「（內）方尺而圜其外」這一句話。



按王莽銅斛：

$$\text{庣旁}=0.095\text{寸},$$
$$\text{半徑}=\sqrt{5^2+5^2}+0.095$$
$$\doteqdot 7.071068+0.095=7.166068\ (\text{寸})$$
$$(7.166068\text{寸})^2=51.352530580624\ \text{方寸},$$

已知容積＝10寸×π×(7.166068)^{2}方寸＝1620立方寸，故可推算得劉歆的圓率應該是 3.1547。

劉歆是怎樣算出來的？沒有人知道，不過，根據史籍的記載，我們可以認定劉歆確是中國數學史上研求圓周率的第一人。

西元130年，漢朝天文學家張衡（78—139 A.D.）比較立方形與其內切直圓柱及球的體積，得到（註二）：

$$\frac{\text{立方體內切球的體積}}{\text{立方體的體積}}=\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8},$$

可知他必然選取了 $\pi=\sqrt{10}$ 的近似值。

西元255年(三國時代)，吳國王蕃（219—257 A.D.）求得 $\pi=142/45=3.1555$。他怎麼求出來的，我們也找不到任何資料；不過他的數學成就在同時代劉徽的耀眼光芒下變得黯然失色。

三、劉徽的割圓術

劉徽創立了割圓術，給出了「割圓」的一般法則，後世的割圓家可能在π的近似值上估計得比他精密，但若論及創始的功勞，則他的地位是無人可以替代的。

劉徽是魏人，經歷可能延長到晉朝，這是史家根據隋書記載的「魏陳留王景元四年（263 A.D.）劉徽注九章」的文句推斷出來的。除此之外，我們對他的身世一無所知。唐朝算學博士王孝通（緝古算經的作者）稱讚他「思極毫芒」，推許他的著作「一時獨步」。他那極富原創性的九章算術注（附於現傳本的九章算術內），及重差術（即現傳的海島算經）二部著作，的確是他不朽聲名的最佳註腳。

劉徽的割圓術記載在九章算術第一卷方田章的第 32 題關於圓面積計算的注文裏。我們把它歸納爲下列幾點來加以說明。

一、劉徽首先指出利用$\pi=3$這一數值算得的結果不是圓面積，而是圓內接正十二邊形的面積，這個結果比π的眞值少。

註二　張衡得出的這個公式，記載在九章卷四少廣章的最後一題注文內。可惜遍查劉徽注文，筆者就是不知道他是憑什麼算出 $\sqrt{10}$ 的，但 $\sqrt{10}$ 這個數卻迭經史書轉述，筆者不才（願讀者高明有以教我），只得「史云」亦云一番了。

二、他由圓內接正六邊形算起，逐漸把邊數加倍，算出正 12 邊形、正 24 邊形、正 48 邊形、正 96 邊形……的面積，這些面積會逐漸地接近圓面積。

三、已知正 6 邊形一邊（恰與半徑等長，清朝戴震校勘算經時，曾經補上一個證明圖，詳見九章算術），即求得正 12 邊形邊長，……。由正 12 邊形求正 24 邊形一邊之長時，劉徽反覆地應用到句股定理（或稱商高、畢氏定理），如圖二：

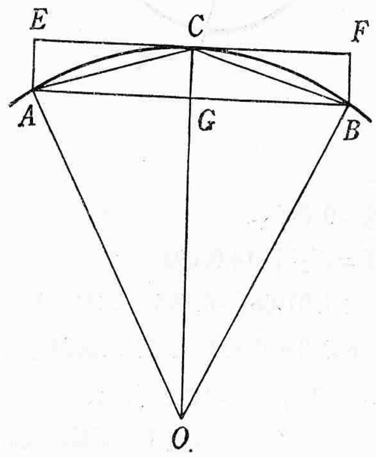


圖 二

$$OA=OB=OC=r \text{（圓半徑）}$$

$$AB=l_{2n},\quad OG=\sqrt{r^2-(l_{2n}/2)^2},\quad CG=r-OG,$$

$$AC=BC=l_{4n},\quad l_{4n}=([r-\sqrt{r^2-(l_{2n}/2)^2}]^2+(l_{2n}/2)^2)^{1/2}$$

爲了印證我們上述的解說，在此我們特別摘錄了劉徽的注文（註三）：

「割六觚以爲十二觚，術曰：置圓徑二尺，半之爲一尺，卽圓裏觚之面也。令半徑一尺爲弦，半面五寸爲句，爲之求股。以句冪二十五寸減弦冪，餘七十五寸，開方除之下至秒忽，又一退法，求其微數。微數無名，知以爲分子，以下爲分母，約作五分忽之二，故得股八寸六分六釐二秒五忽五分忽之二。以減半徑，餘一寸三分三釐九毫七秒四忽五分忽之三，謂之小句。觚之半面，又謂之小股，爲之求弦，其冪二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五忽，餘忽棄之，開方除之，卽十二觚之一面也。」

接著，我們再加入圖解（希望不是添足！）如圖三，

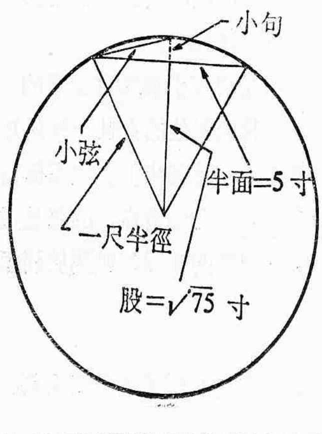


圖 三

註三 參見戴震校算經十書上册（商務，民國六十三年臺一版）第七十七頁，這一部書由於印刷技術的故意疏忽，使得讀者必須配合放大鏡來點閱；眼力較差的讀者宜參閱同是商務出版的「叢書集成簡編第 427 號」的九章算術版本，後面這一部書印得清晰易辨，但卻有些小錯誤，而且也不容易買到。

$$100方寸-25方寸=75方寸，$$

$$\sqrt{75}寸 \doteqdot 8.660254寸$$

$$=8寸6分6釐2秒5忽又2/5忽。$$

$$小句=10寸-8寸6分6釐2秒5忽又2/5忽$$

$$=1寸3分3釐9毫7秒4忽又3/5忽，$$

$$小弦=\sqrt{(小句)^2+(小股)^2}$$

$$=[(1.339746)^2+(5.000000)^2]^{1/2}\ (寸)$$

$$=(267949193445.16)^{1/2}\ (忽)$$

$$\doteqdot(二千六百七十九億四千九百一十九萬三千四百四十五)^{1/2}\ (忽)$$

$$\doteqdot 5寸1分7釐6秒3忽又4/5忽$$

（最後這個近以值原注文沒有給出，是我們另加上去的。）

劉徽的注文中還有割 12 邊爲 24 邊，割 24 邊爲 48 邊，割 48 邊爲 96 邊，及割 96 邊爲 192 邊，此處不贅，有興趣的讀者請自行去查閱。

四、有了正 $2n$ 邊形的邊長 l_{2n}，則按九章算術中的「半周、半徑相乘」公式，可以算出正 $4n$ 邊形的面積，爲：

$$S_{4n}=r\cdot\frac{2n\cdot l_{2n}}{2}=2n\cdot\frac{r\cdot l_{2n}}{2}。$$

由於 $r\cdot l_{2n}/2$ 恰好是四邊形 $ACBO$ 的面積（見圖二），所以上述的論斷是正確的。

劉徽算出

$$S_{96}=3.13+\frac{584}{62500},\quad S_{192}=3.14+\frac{64}{62500},$$

又稱 $S_{192}-S_{96}=105/62500$ 爲差冪，它的兩倍 $210/62500$ 稱爲正 96 邊形的外弧田，即

$$2(S_{192}-S_{96})=\frac{210}{62500}$$

$$S_{96}+\frac{210}{62500}=3.13+\frac{584}{62500}+\frac{210}{62500}$$

$$=3.13+\frac{794}{62500}=3.14+\frac{169}{62500},$$

這樣的面積已經「出圓之表（超出圓面積）」了，顯然圓冪（面積）S 滿足：

$$3.14+\frac{64}{62500}=S_{192}<S<S_{96}+\frac{210}{62500}=3.14+\frac{169}{62500}$$

$$\Longrightarrow\ S_{192}<S<S_{96}+2(S_{192}-S_{96})=S_{192}+(S_{192}-S_{96})。$$

這裏的 $S_{192}=3.14+64/62500=3.14+0.001024=3.141024$，相當於求得的 π 值爲 3.141024。請注意：在半徑爲一單位長的情形下，圓面積和半圓周長的度量是相等的（都是 π）。劉徽在此處顯然引用了這個事實，但他並沒有特別指明。

五、劉徽並不認爲 S_{192} 是終結，他表示還可以像這樣一直「割」下去。九章算術注文明白寫著：「割之彌細，所失彌少；割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」這段注文充分說明了劉徽對極限概念，已經具有了相當程度的認識了。對一般的自然數 n 而言，

$$S_{2n}<S<S_n+2(S_{2n}-S_n)=S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$

$$\Longrightarrow\ 0<S-S_{2n}<S_{2n}-S_n。$$

根據三角學的理論，很容易求得

$$S_{2n}=\frac{1}{2}\left(2n\sin\frac{2\pi}{2n}\right),\quad S_n=\frac{1}{2}\left(n\sin\frac{2\pi}{n}\right),$$

因
$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}-\lim_{n\to\infty}\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$
$$=\pi-\pi=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$ （割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。）

後來，劉徽果然繼續割到 3072 邊，得到 $\pi=3.14159$ (註四)

$3.14+169/62500$ ($=3.142704$) 較西元前阿基米德使用正 96 邊形求得的 $22/7$ ($=3.1428$) 差強人意一點，而 3.14159 則較西元 150 年托勒密公認的 3.141666 要好得太多了。

用正多邊形逐漸增加邊數的方法來計算圓周率，在西元前 200 年左右，早爲阿基米德 (287?—212 B.C.) 率先採用。但阿氏同時採用內接和外切兩種入算（註五），不如劉徽僅用內接，比較簡便多了。由此可知，

「割圓術」是中土獨創的，決非西方傳入的。

四、不朽的3.141592

這時候，中國人不但趕上了希臘，而且到了五世紀時，祖沖之、祖暅父子的計算更是一躍向前，領先了世界數學界千餘年。祖沖之的成就記載在隋書卷十六，律曆志卷十一內（唐代長孫無忌所編撰）：

「……宋末南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億爲一丈（按卽以一丈爲直徑，把它分成一億份），圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽；朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五，約率：圓徑七，周二十二。又設開差冪，開差立，兼以正圓參之，指要精密，算氏之最者也。所著之書名，爲綴術，學官莫能深究其深奧，是故廢而不理。」

根據這一段「正史」，祖沖之的估計當是 $3.1415926<\pi<3.1415927$，恰好準確到小數點第六位數；另外他還求出兩個 π 值：約率$=22/7$（與阿基米德同），密率$=355/113$。後面這個密率，日本數學史家三上義夫 (Y. Mikami) 曾建議稱之爲「祖率」，是一個很特出的分數。按照連分數的漸近分數理論（註六），它是分母不大於113的所有分數中，最接近 π 的數；也就是說：給出任意分數 a/b（既約形式），$b\leq 113$，則

$$\left|\frac{a}{b}-\pi\right|\geq\left|\frac{355}{113}-\pi\right|$$

至於祖沖之是怎樣算出這一結果的，因隋書記述過於簡略，無法詳知。根據史家研究，除了「割圓術」以外，祖沖之恐怕還沒有發現什麼新方法。事實上，照劉徽的方法繼續做下去，算到正 $24576(=6\times 2^{12})$ 邊形時，便可算得這一結果。假使這個論斷是正確的話，那麼祖沖之所付出去的勞力必定是非常可觀的。

註四 劉徽注文予載明「當求一千五百三十六觚之一面，得三千七百二觚之冪」，沒有給出這個值。$\pi=3.14159$ 錢寶琮據劉徽的文意推算出來的，詳附錄(二)。

註五 評見 C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968。(臺灣曾翻印過)。

註六 請參閱拙文「中國 π 的一頁滄桑」，登於科學月刊第八卷第五期，民國66年 5 月出版；接著敍述到的定理詳見數論導引，先登出版社。

五、趙友欽的橋搭

與祖氏大約同時代的何承天也估計過 π 值 (3.1428)，當然沒有祖冲之所做的來得精密。中國 π 的發展到了祖冲之，可以說是到達了顚峯，以後就開始呆滯遲緩了。宋朝的代數學高度發展，相對地似乎降低了 π 值再求更精密估計的興趣；當然啦，小數點後第六位數的「超需要性」也是值得我們注意的一個重要因素，因爲比較常用的 π 值是 3.14。

西元 1300 年左右，元朝趙友欽，從圓內接正方形算起(註七)，逐次由四邊求八邊，八邊求十六邊，求到 16384($=4\times 2^{12}$) 邊，終於驗證了祖冲之 π 值估計的正確性。

趙友欽這一項壯舉的主要貢獻，是在割圓術和祖率之間，找到一條可信的銜接線索；他不但肯定了祖冲之 π 值估計的特出，而且還證實割圓術的本質性及其效力；這也使得後者在綴術不詳的狀況下，成爲非常珍貴的史料。疇人傳推舉他的著作革象新書說：「步算之書，苦於難讀，友欽罕譬曲喻，出以平易，其逮末學之心至矣! 」而對於他的這一項成就並沒有給出適當的彰揚，實在令人費解。

六、劉徽的極限概念

戰國末年，名家公孫龍曾經提出一個很有趣的命題：

一尺之棰，日取其半，萬世不竭。

意思是說：一尺長的棍子，每天折掉二分之一，則歷經千年萬載也折不完。如果把每天所折掉的部份加起來，那就是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

恰好是「和」爲 1 的一個無窮級數。對應的數學問題也就是：一個有限長的線段（一尺）可以用無限多個線段的和來表現。劉徽在割圓術中所做的論證：「割之又割，以至於不可割」，想必多少繼承了名家對「無限分割可能」的信仰；他在計算弧田（弓形）面積、開方不盡（註八）及求解楔形體積（註九）時，都應用到了極限的概念，足見我們的看法是正確的。底下，我們引用了一段「注文」來支持我們上述的論斷。

九章算術方田章的第36題敍述弧田（弓形）面積的算法，提出下列的公式：

以弦乘矢，矢又自乘，並之，二而一。

就是說（如圖四），弓形面積 $A=\frac{1}{2}(V_0C_0+V_0^2)$，其中 C_0 爲弦，V_0 爲矢。劉徽說這個公式「指

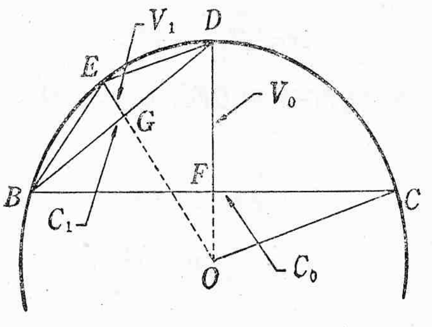


圖 四

註七 參看附錄(一)，或疇人傳彙編上（世界書局）中的趙友欽傳。

註八 見九章少廣章第 16 題的注文。

註九 見九章商功章第 15 題的注文。

驗半圓之冪耳，若不滿半圓者，益復疏闊。」意卽在$\pi=3$（九章算術的圓率）的情形下，A是半圓的面積；若針對一般的弓形，則A的公式就更顯得粗陋了。因此，劉徽先用「以弧弦折半自乘，矢除之，加矢以為圓徑」（註十），把圓（直）徑的值求出來。「既知圓徑，則弧可割分也。割之者半弧田之弦，以為股，其矢為句，為之求弦，卽小弧之弦也。以半小弧之弦為句，半圓徑為弦，為之求股，以減半徑，其餘卽小弦之矢也。割之又割，使至極細，但舉弦矢相乘之數，則必近密率矣。」

在圖四中，$BC=C_0$，$DF=V_0$；由 V_0 及 $C_0/2$ 可求得 $BD=C_1$，又由 $C_1/2$ 及半徑 r 可以求得 $EG=\sqrt{r^2-(C_1/2)^2}$，依此類推，可以求得 C_2，V_2，…，故

$$\text{弓形面積}=\text{舉（按卽「全部」也）弦矢之數}$$
$$=\frac{1}{2}(C_0V_0+2C_1V_1+4C_2V_2+\cdots+2^nC_nV_n+\cdots)。$$

基於劉徽確曾認識了「無窮分割」的內涵這個事實，他作為一個積分學的先驅者，是當之無愧的。可惜，劉徽沒有能把面積計算出來（這個問題或許很難，而現代的求法在中國古代大概也從沒有人觸及），否則他在求積問題上的成就應當是可以逼近阿基米德的。

七、試論中國古代數學傳統的內在動力

阿基米德應用窮盡法及間接證法求得了（註十一）：

抛物線形的面積＝三角形 ORQ 的 4/3 倍。（圖五）

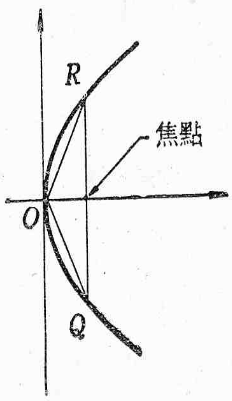


圖 五

註十 如圖四，卽圓徑

$$2r=\frac{(C_0/2)^2}{V_0}+V_0,$$

這是完全正確的求法。考慮直角三角形 OFC，$OC=r$，$OF=r-V_0$，$CF=C_0/2$，由商高定理，

$$r^2=\left(\frac{C_0}{2}\right)^2+(r-V_0)^2$$
$$\Longrightarrow\quad 2rV_0=V_0^2+\left(\frac{C_0}{2}\right)^2$$
$$\Longrightarrow\quad 2r=\frac{(C_0/2)^2}{V_0}+V_0$$

註十一 參見 M. Kline 著的 *Mathematical Thorght from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972（臺灣有翻印，九章出版社），或黃武雄的「人怎樣求得面積？」（數學傳播第二卷第二期，66年10月出版）。

充分表現了希臘數學傳統專重「形式」的特色，不像中國古代數學的精神，近似值的估計總是優先考慮。比如說，中國人必然早就知道圓周率是一個常數而從沒有想到有必要加以證明，事實上，中國π的歷史幾乎可以說是π的一部估計史；而在西方，早在西元前300年左右，歐幾里得就曾經嚐試用窮盡法去證明π是常數，而阿基米德所以算出3又10/71 ＜π＜ 3又10/70，似乎也不是他的主要興趣。總之，中西古代數學的傳統基調，從一開始就判然有別了。我們不妨再拿九章算術與幾何原本來做個比較：原本乃是由少數公設、公理出發，進行演繹式的論述；九章卻總是舉例三、五個之後，再論述一般的解法，採用歸納的方式。這樣子說起來，中國古代數學的內涵和精神果然是以「實用」爲依歸了。我們試把現傳本的九章算術中的劉徽及李淳風注文抽掉，則九章就眞的變成一本「公式」集子，這個事實再與九章孕於秦、西漢而成書於東漢的事實相對照，使我們敢於相信九章產生的重要背景之一，便是帝國統一的外在環境需要吧！如果我們同意這一個前提，那麼劉徽在魏晉之間（帝國業已分裂）註九章的動機就很值得探索了。我們不要忘了，要是沒有劉徽的注文，則九章便不可能有那麼鮮活的生命力，也不可能矗立成中算史上那樣重要的一座里程碑。因此，我們自然想問：他到底是迫於外在環境的需要？或是基於對嚴整理論的內在欲望？還是兼而有之？解答了這些問題，我們應該可以更深入地瞭解中國古代算學傳統的內在動力了。

八、結 語

本篇割圓術雖然號稱「始末」，但實際上只敍述到元代趙友欽爲止，明淸兩代的割圓術請讀者自行參考李儼的長文「明淸算家之割圓術研究」（註十二），這樣做的主要理由是，筆者認爲劉徽在割圓家中的地位是最爲重要而突出的，希望透過本篇的論述，能夠給他一個初步的（也是淺陋的）歷史評價。而在中西會通，中國本土數學家消化了「西洋割圓術」之後，固然自力完成了很多結果，但是就傳統數學的角度來看，他們在這一方面的成就卻不如劉徽特出，所以筆者雖然無限欽仰這些先輩腳踏實地，自力更生的精神和毅力，此處還是略而不論了。

此外，我們還特別推崇了趙友欽，由於他艱苦付出去的勞力，使我們可以在技術上認定祖率的偉大及可靠性。

最後特別聲明，儘管本文稍帶一點情緒化的民族主義色彩，但論述過程卻始終緊守著實證的態度，從不敢強作解人以侮蔑先賢。同時，雖然我們也明明知道在現代數學突飛猛進的步調中，「回頭看」常常意味著「落伍」、「趕不上時代」，但是我們依然鼓起勇氣去擦拭這些老古董上的重重灰塵，如果，在傳統歷史文化中，它還能散發一點微末的光彩，那麼就請讀者共同來接納它成爲我們文化的一部份吧！其實，沒有傳統那來現代？更何況在科技本土化的前提下，科技史的研究早已成爲最迫切的課題了。在「數學中國化」的呼聲中，傳統與現代的鴻溝，正好可以透過中國算學史的研究及古算經的整理，來進行彌補，特別地，我們期待古算經的最後一次注釋——白話文的，現代化的！

九、附 錄——一張小小的書單

㈠中國算學史，李儼（李人言）著，商務，民國63年臺四版。
㈡中國算學史上卷，錢寶琮著，中研院歷史語言研究所，1932年出版。
㈢中國算學之特色，三上義夫著，林科棠譯，商務萬有文庫薈要，民國54年11月臺一版。
㈣*Development of Mathematics in China and Japan*, Y. Mikami（三上義夫）Leipzig, 1912。
㈤中國之科學與文明中譯本第四冊，李約瑟著，傅溥譯，商務，民國64年9月修訂一版。

在上述五部書中，㈠㈡是最嚴謹的論著，應該精讀；㈢、㈤極具啓發性，但引述時要詳加驗證，不可

註十二　載於附錄㈥。

掉以輕心。㈤固然是一部頗爲噲炙人口的論著，而且從東西比較史的角度去辯證也不乏創見；但整體而論，它的貢獻卻只不過是試圖在中國數學史家早已認定的技術水平上，給出一些還有待進一步確證的「歷史解釋」觀點罷了。

㈥中算史論叢五册，李儼（李子嚴）著，商務，民國66年 2 月臺一版。

㈦中國算學史論叢，李儼著，正中書局，民國64年11月臺三版。

上述兩部書所包括的都是很不容易讀的論文及考據資料，是非常重要和珍貴的參考資料。接下去，如果對中算史還有興趣，我們建議讀者開始點讀古算經。李儼在「怎樣研究中國算學史」（見㈦）一文中，附錄了一張中算書目錄，裏面的書目很多是現在臺灣還可以搜購得到的。要不然也可以到較有規模的圖書館去查詢。還有，鑑於九章算術對中國傳統數學的開創性及主導作用，我們建議讀者先從九章算術入手。這是一個關切中國算學史的業餘者（不是專家！）所「獻曝」出來的一些很不成熟的意見，謹向各位讀者討教。

——本文作者任敎於師大數學系