6174 妙題巧解

謝聰智

問題: 將一個四位數更動其個、十、百、千位，得一最大數與最小數，取兩者之差得一新數。將此新數更動其位數，取其大數減小數之差得另一新數，將此新數返覆作同樣的操作，最後結果，只要原來四位數之個、十、百、千位不盡相同，都是6174。爲什麼？請將以上事實給予嚴格的證明。

6174 是個奇妙的數，有關它的趣事上面問題已經提過。它像是四位數王國中的不倒翁，永遠屹立不變。王國遭受巨變，王國中的 9990 子民，一個個被送進大熔爐裡放大、縮小、相減，丟出後，每個人都變了，唯有堅忍的 6174，丟進放出，依然故我還是 6174。衆人在大熔爐一而再，再而三地受盡折磨，一變再變，也學得不變不驚的道理，最後變成 6174。關於 6174 不倒翁問題的證明前後曾在 65 年清華大學暑期進修班及 67 年度科學展覽出現過。以下筆者提供一簡捷明快的證明，希望與讀者共欣賞。

設 $x=abcd$ 爲四位數，即 a,b,c,d 分別表示 x 之千位數，百位數，十位數及個位數。將 $x=abcd$ 中之 a,b,c,d 任意排列所得之最大數記爲 $M(x)$，最小數記爲 $m(x)$。令 $H(x)=M(x)-m(x)$。原來問題可簡述爲:「對任意四位數 $x=abcd$，當 a,b,c,d 不全相等時，必有正整數 k 存在使得 $H^k(x)=6174$」。此中 $H^k(x)$ 表示將 x 以 H 的變換運作 k 次所得之結果。例如

$$H(6174)=M(6174)-m(6174)=7641-1467=6174,$$
$$H(3781)=M(3781)-m(3781)=8731-1378=7353,$$
$$H(7353)=7533-3357=4176,\text{ 因此}$$
$$H^3(3781)=H^2(7353)=H(4176)=6174.$$

個，十，百，千位不全相等的四位數共有 9990 個。雖然 H 的操作簡單，但近一萬個數目的每一個數一一測試，用筆算驗證是不可能的。細心的觀察，我們有如下的性質。

(i) 若 $x=abcd$ 且 $9\geq a\geq b=c\geq d\geq 0$，則 $H(x)=a'b'c'd'$ 中，a',b',c',d' 必然滿足

$$b'=c'=a'+d'=9 \tag{1}$$

(ii) 若 $x=abcd$ 且 $9\geq a\geq b>c\geq d\geq 0$，則 $H(x)=a'b'c'd'$ 中，a',b',c',d' 必然滿足

$$a'+d'=10 \quad \text{及} \quad b'+c'=8 \tag{2}$$

上述 (i) 及 (ii) 是我們的主要關鍵，其證明非常簡單在此從略。滿足 (1) 式的數目 $y=a'b'c'd'$ 有

$$9990, 8991, 7992, 6993, 5994$$

或

$$0999, 1998, 2997, 3996, 4995。$$

滿足 (2) 式的數目 $y=a'b'c'd'$ 是由以下 (A) 列及 (B) 到各選一組配成之四位數。

(A)　9與1，8與2，7與3，6與4，5與5

(B)　8與0，7與1，6與2，5與3，4與4

由於個，十，百，千位之秩序隨便更換，經H轉換後的結果是一樣的，因此上述討論告訴我們如下的性質。任意$x=abcd$之四位數，當a,b,c,d不全相等時，x經MH作用後（換言之，x經H的一次轉換，再將個，十，百，千位數更換，取其數值最大者），結果必為下列表中之一個數目。

9990，	9981，	9972，	9963，	9954
9810，	9711，	9621，	9531，	(9441)
8820，	8721，	8622，	8532，	(8442)
8730，	7731，	7632，	7533，	(7443)
8640，	7641，	6642，	6543，	(6444)
(8550)，	(7551)，	(6552)，	(5553)，	(5445)

總結以上討論，利用 (i) 及 (ii) 之性質我們把問題歸結為以上 30 個數目之驗證。上表中帶刮號之 9 個數經 MH 之作用後將成為表中第一到五個數目之一。因此，事實上，我們只要驗證其餘 21 個數經H之有限次變換後其結果是否終將變為 6174。21 個數之檢驗並不費事。以下圖表表示檢驗的結果。圖中箭頭表示一次 MH 之作用。例如最左上角之數目 8622 經 MH 之一次作用變為 6543，依次再經 MH 之作用變為 8730, 8532，最後變為 6174。此卽表示 $H^4(8622)=6174$。圖中顯示此 21 個數最多經H之 6 次作用卽變用卽變換為6174。意外地，我們得到更進一步的結果，卽任意位數不盡相等之四位數，最多經H之 8 次變換就成為 6174。