坡里雅計數理論

韋 端

一、引 言

學數學開宗明義第一課就是學數數目，一、二、三、……。數著數著我們都長大了，數的東西也由一塊錢能買幾粒梅子，到一個方程式有幾個根，一對果蠅會有多少子孫，烷類同分異構物有多少等等。對這許多數數目的問題，我們都希望能找到簡捷的通解。但在求解的過程中常會出現意想不到的困難，其一就是：幾個不同的東西要認爲是一樣。譬如，用白珍珠和黑珍珠能串出幾條不同的三珠項鍊？答案就不是排出來的白白白、白白黑、白黑白、黑白白、白黑黑、黑白黑、黑黑白、黑黑黑等$2^3=8$種，因爲白白黑和黑白白實際上是同一條項鍊，白黑黑和黑黑白又是同一條，所以祇能串出六條不同的項鍊。用技術性的語言說，我們要找出有幾個對等類。另外還有困難，常常一個東西要考慮成幾個，也就是要賦予不同的權數。譬如，敍述一個n階代數方程式恰有n個根時，這每一個根都已以其重根數作爲權數。($(x-1)^3=0$，有「三」個根，都是1。)

硬梆梆的數學能不能替我們解決這些身邊實際的問題呢？答案是肯定的，大數學家喬治・坡里雅(George Pólya)，在三十年代起陸續發表了幾篇計數方面的論文，很聰明，恰當的將計數、對等、加權三問題，「畢其功於一定理」。這個理論系統嬌小可愛卻又博大精深，應用廣泛，充分表現純粹數學(羣論)實際上如何應用來解決日常生活中的問題，是數學界不可多得的結晶。筆者深愛其論，謹在此推介給大衆。

大凡數學討論必須列出預備知識，下兩節就是簡介一些集合、函數、羣論的基本名詞及觀念。第三、四節爲一些初步結果，所有敍述都不附以證明，有興趣的讀者可查閱參考文獻。第五節講主要定理，第七節提到可能的推廣。實例散見各節以及集中一些在第六節，以作理論的補充並以顯示此理論的應用價值。

二、預備知識

在這一節中我們介紹一些基本知識，雖然枯燥些，卻是爲主要定理而舖路，「若非幾番寒澈骨，焉得梅花撲面香」。

令S、T爲二有限集合，其**卡氏積**$S\times T$爲所有序對(x,y)，x在S中，y在T中，所形成的集合。其**二元關係**爲$S\times T$的一個子集，$S\times S$的子集特稱爲S中的關係。若(x,y)爲關係中的一個元素，則稱x與y相關(對這一個關係而言)。稱一S中的關係爲**對等關係**若其滿足下列三條件:

1. S中的每一元素均與其自己相關(反身律)
2. 若x與y相關，則y與x相關(對稱律)
3. 若x與y相關，y與z相關，則x與z相關(遞移律)

對等關係能將集合中的元素分類：元素x與y屬於同一類若且唯若x與y相關。這些分類稱爲對等類，而集合S則被對等關係分裂成互不相交的對等類。

由S到T的函數是一個二元關係，使得每一S中的元素恰與T中的一個元素相關。在此情況下，稱S爲此函數的**定義域**，T爲**值域**。若每一定義域中的元素恰與值域中一唯一的元素相關，則稱此函數爲**一對**

一函數。

集合S的（封閉）**二元運算**就是$S\times S$到S的函數。如果下列三條件能滿足，則集合S及二元運算（記爲$*$）合稱爲**羣**:

1. 二元運算$*$有結合性，卽對任何S中的元素 a,b,c,　$a*(b*c)=(a*b)*c$。
2. 存在一單位元素e使得$a*e=a$對所有a均成立。
3. 對任何a均存在一反元素（在S中）a^{-1} 使得$a*a^{-1}=e$

由集合S到它本身的一對一函數亦稱爲S的**排列**。用符號

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \end{pmatrix}$$

來表示集合 $\{a,b,c,d\}$ 的一個排列，它將a映到 b,b 映到 d,c 映到 a,d 映到c。兩個排列 π_1,π_2 的**乘積**，記作 $\pi_1\pi_2$，定義爲其函數的積合，先以 π_2 作用，再繼之以 π_1。例如，令

$$\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & b & c \end{pmatrix},\quad \pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$$

則

$$\pi_1\pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

很容易可以看出排列的乘積仍然是一個排列， 有結合性但無交換性， 並且可看作是排列集的一個二元運算。

今令

$$G=\{\pi_1,\pi_2,\cdots\cdots,\}$$

爲集S的一些排列所成的集。如果G及其以乘積所作的二元運算形成一個羣，則稱G爲**一排列羣**。其單位元素爲恒等排列，卽將每一S中的元素映到它自己。

令G爲集合

$$S=\{a,b,\cdots\cdots\}$$

的排列羣。則S中**由G造成的二元關係**定義爲：a與b相關若存在一G中的排列使a映至b例如，令

$$S=\{a,b,c,d\}$$

$$G=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}\right\}$$

則由G造成的二元關係乃是 $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$，這個關係是個對等關係，其分$S$所成的對等類是 $\{a,b\}$ 及 $\{c,d\}$ 兩個。

引理 1　由排列羣所造成的二元關係是一個對等關係。

讀者可以很容易的以排列羣的定義證得對等關係的三個性質：反身律、對稱律、遞移律。

三、苳塞定理

到現在爲止，我們可以猜測理論演變的方向了：用排列羣來表示在計數問題中不予區別的改變，如項鍊的翻轉，正方體旋轉，結晶體的移轉等。我們感興趣的是不同的方法，也就是引理1中所得的對等關係所形成的對等類有多少。當然，最笨的方法是找出這對等關係，然後列出其對等類。這方法在S的元素甚多時，就會變成非常複雜，因此有苳塞定理的產生，它以計算**不變元素**來求得對等類的數目。考慮某一特定排列，若一元素被此排列映到它自己，則此稱爲此排列下之不變元素。

引理 2　（**苳塞定理**）集合S被由排列羣G所造成的對等關係所分裂成的對等類之數目是

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\psi(\pi)$$

在此 $|G|$ 是G的元素個數，$\psi(\pi)$ 是排列π下的不變元素個數。

〔例 1〕令 $S=\{a,b,c,d\}$, $G=\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}$，在此

$$\pi_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},\ \pi_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix},\ \pi_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix},\ \pi_4=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

則 G 分 S 成二對等類 $\{a,b\}$ 及 $\{c,d\}$。由觀察知 $\psi(\pi_1)=4$，$\psi(\pi_2)=2$，$\psi(\pi_3)=2$，$\psi(\pi_4)=0$，引用苯塞定理，得其對等類數目爲

$$\frac{1}{4}(4+2+2+0)=2.$$

〔例 2〕由黑白兩種珍珠能串出幾條三珠項鍊? 在此，$S=$｛白白白，白白黑，……｝共有 8 個元素，而將項鍊翻轉就如同首尾對調。令這種排列爲 π_2，而令 π_1 爲恆等排列，則在 π_1 之下不變元素有 8 個，在 π_2 下有 4 個。由引理 2，得相異之數目爲

$$\frac{1}{2}(8+4)=6.$$

四、函數之權數及盤存

用苯塞定理去求對等類的數目仍然太煩。同時，除了數目之外，如果還想知道對等類的性質，如在項鍊問題中，求含兩顆黑珠的項鍊數目，則苯塞定理就無能爲力了。坡里雅以函數爲集合而將之分類，並考慮其權數，一舉解決苯塞定理的窒礙，並導出了精彩的推廣。

[illegible]考慮 D 與 R 兩個不同的集合，令 f 爲 D 到 R 的函數，G 爲 D 的排列羣。定義二元關係於由 D 到 R 所有的函數所成集如下：函數 f_1 與 f_2 相關若存在一 G 中之排列 π 使得 $f_1(d)=f_2(\pi(d))$ 對所有 D 中之 d 均成立。這樣定出來的二元關係是一個對等關係（讀者請驗證之），因此將由 D 到 R 所有的函數分成對等類，這些對等類特稱爲**模式**。這樣的分類有其實際上的意義：這些模式對應於將 $|D|$ 個球分佈到 $|R|$ 個袋上之不同方式，而這些方式是否予以區別由 G 決定。爲了探求函數對等類的性質，我們考慮對 R 中之元素 r 加權，權數可能是數字或符號，記作 $w(r)$。集合 R 之**庫存**乃定爲所有 R 之元素之權數和，即

$$庫存=\sum_{r\in R} w(r)$$

顧名思義，庫存乃表示定義域 D 之元素所可能選取來對應之值。

函數 f 之權，$w(f)$，乃定義作所有 f 值之權的連乘積，即

$$w(f)=\prod_{d\in D} w\{f(d)\}$$

一函數集之**盤存**定義作各函數之權之和，即

$$函數集之盤存=\sum_{所有集中之函數 f} w(f)$$

很明顯的，函數之權代表依此函數將 $|D|$ 球分佈到 $|R|$ 袋之方法，而一函數集之盤存代表依此集內函數分布之所有方法。同時，同一對等類內的函數有同樣的權，稱爲**模式的權**。請注意等權的函數並不一定會在同一模式內。

下例可對加權這一觀念作較生動的認識。

〔例 3〕有三種漆，昂貴的紅漆，便宜的紅漆以及藍漆，求以三種漆將三個木球髹成單色球共有幾種方法。令 D 爲三個球所成集，R 爲三種漆所成集。如果我們令這三種之權數分別爲 r_1, r_2 和 b，則庫存 r_1+r_2+b 代表髹一個球所可能的方法，而 $(r_1+r_2+b)^3$ 代表髹三個球所有的方法。換言之，$(r_1+r_2+b)^3$ 是由 D 到 R 所有函數之盤存。從公式

$$(r_1+r_2+b)^3=r_1^3+r_2^3+b^3+3r_1^2r_2+3r_1r_2^2+3r_1^2b+3r_2^2b+3r_1b^2+3r_2b^2+6r_1r_2b,$$

可知所有的塗色法，例如，$3r_1r_2^2$ 表示髹貴紅漆者一球，髹賤紅漆者兩球之方法有三。若我們對三種漆賦

予別一種權數，譬如兩種紅漆都令爲 r 而藍漆爲 b，則盤存變爲

$$(r+r+b)^3=(2r+b)^3=8r^3+12r^2b+6rb^2+b^3$$

這樣的加權表示我們祇看外觀而不深究紅漆之貴賤，但紮法仍然依紅漆之貴賤而變，這可以解釋作其成本不同。假若根本不區分這兩種紅漆，那盤存就變成 $(r+b)^3$ 了，等於祇用兩種漆。

五、坡里雅基礎定理

終於我們到了定理本身了。我們的目的是求一函數集的對等類的表示方法，稱它爲**模式盤存**。同前，令D與 R 爲兩個集合，G爲 D 的一個排列羣，$w(r)$ 爲R中元素 r 的權數。排列的循環就是一個 D 的子集，其中的元素在這個排列下形成循環。例如，考慮排列

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ c & e & d & a & b & h & g & f \end{pmatrix},$$

$\{a,c,d\}$ 形成一個循環，因爲此排列將 a 映到 c，c 映到 d，而 d 映回到 a，構成一迴路。同樣的，$\{b,e\}$ 成一循環，$\{f,h\}$ 成一循環，$\{f\}$ 單獨成一循環。循環爲長度就是子集中元素的個數。在上例中，該排列有一個長度爲 3 之循環，兩個長度爲 2 之循環以及一個長度爲 1 之循環。

設排列 π 有 b_1 個長度爲 1 的循環，b_2 個長度爲 2 的循環，……，b_r 個長度爲 r 的循環，……，這種情形用一代數項 $x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3}\cdots\cdots x_r^{b_r}\cdots\cdots$ 來表示，稱爲排列 π 的**循環結構**對整個排列羣 G 而言，定義其**循環下標** P_G 爲其所有循環結構之和再除以其元素個數，即

$$P_G(x_1,x_2,\cdots\cdots)=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots\cdots x_r^{b_r}\cdots\cdots$$

例如，擁有排列

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

之排列羣之循環下標爲

$$\frac{1}{4}(x_1^4+x_1^2x_2+x_1^2x_2+x_2^2)=\frac{1}{4}(x_1^4+2x_1^2x_1+x_2^2)$$

下面就是譽滿天下的坡里雅基礎定理，請欣賞它的精幹簡捷。

定理 1 （**坡里雅基礎定理**）由D到R之函數之模式盤存爲

$$P_G(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \cdots\cdots, \sum_{r\in R}[w(r)]^k, \cdots\cdots)。$$

系 1 由D到R之函數之對等類個數爲

$$P_G(|R|,|R|,\cdots\cdots,|R|,\cdots\cdots)$$

系 1 之證明甚易，將所有R之元素賦予權 1，代入定理 1 即得。

現在試將例 2 以定理 1 來解。

〔例 3〕在例 2 之假設下，令$D=\{1,2,3\}$代表項鍊之三個位置，$R=\{b,c\}$代表黑、白兩種珍珠。令權數分別爲 $w(b)=b, w(c)=c$，令 $G=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$，顯然，$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$是恒等排列，$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$代表首尾對調之結果。易見$G$的循環下標爲

$$P_G(x_1,x_2)=\frac{1}{2}(x_1^3+x_1x_2)$$

因此，依定理 1，以 $b+c$ 代 x_1, b^2+c^2 代 x_2，則模式盤存爲

$$\frac{1}{2}[(b+c)^3+(b+c)(b^2+c^2)]=b^3+2b^2c+2bc^2+c^3$$

很清楚的，得知三珠均黑之項鍊有1，二黑一白之項鍊有2等等。若令 $w(b)=w(c)=1$，則得模式之個數爲6。

六、例　　題

下面兩例乃對正方體著色，有興趣的讀者不妨用紙摺出若干正方體，照所述規則著色，看看結果是否相符。以此方式與小孩共度黃昏，筆者認爲比抱著電視機有益得多，不知讀者諸君以爲然否。

首先將正方體的性質作一描述。令 G 爲代表一正方體旋轉所造成的排列羣，則 G 有24個元素（六個面，每面轉四次，$6\times4=24$），可分爲五類:

(1)恒等。

(2)三個以相對兩面中心聯線爲軸之 180° 旋轉。

(3)六個以相對兩面中心聯線爲軸之 90° 旋轉。

(4)六個以相對兩面中點聯線爲軸之 180° 旋轉。

(5)八個以相對兩角聯線爲軸之 120° 旋轉。

如圖一所示。

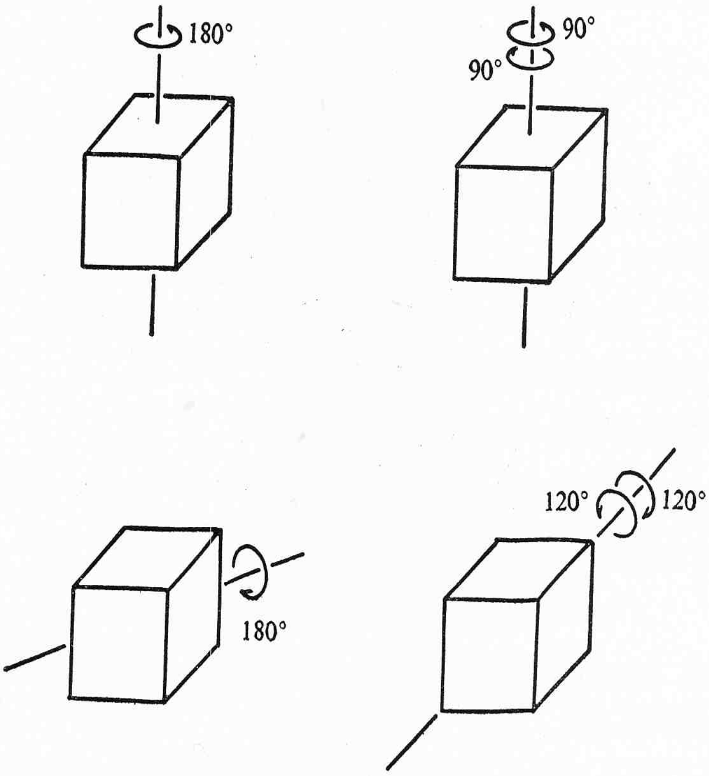

圖　一

〔例 4〕用紅藍兩色去對一正方體之各面著色，每面恰著一色，求可得幾個著上不同色的正方體。在此例中 D 爲六個面，$R=\{x,y\}$ 爲紅藍兩色，G 爲旋轉所成之排列羣，第(1)類排列（恒等）之循環結構爲 x_1^6，第(2)類爲 $x_1^2x_2^2$（作軸之兩面不變，得 x_1^2，其餘四面成兩個長度爲 2 之循環，得 x_2^2），第(3)類 $x_1^2x_4$，第(4)類爲 x_2^3，第五類爲 x_3^2。因爲循環結構是以波里雅定理解題之根本，其求法必須仔細、耐

心，今再仔細的講本例中循環結構之求法（讀者最好有一立方體在面前）。設六面分別爲上下前後左右，以第(5)類爲例，轉一次就得其排列爲

$$\begin{pmatrix}\text{上下前後左右}\\\text{前後右左下上}\end{pmatrix}$$

很明顯的驗證了這個結構，因此循環下標爲

$$P_G(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{1}{24}(x_1{}^6+3x_1{}^2x_2{}^2+6x_1{}^2x_4+6x_2{}^3+8x_3{}^2)$$

由系 1，得其模式之數目爲 $P_G(2,2,2,2)=10$ 由定理 1，其模式盤存爲

$$\frac{1}{24}[(x+x)^6+3(x+y)^2(x^2+y^2)^2+6(x+y)^2(x^4+y^4)+6(x^2+y^2)^3+8(x^3+y^3)^2]$$

$$=x^6+x^5y+2x^4y^2+2x^3y^3+2x^2y^4+xy^5+y^6$$

意卽，以 $2x^4y^2$ 項爲例，四面塗紅，兩面塗藍之著法有二（兩對兩面藍或相鄰兩面藍）。餘類推。

〔**例 5**〕與例 4 之假設相同，但這次是對正方體的八個角著色。在此情況下，循環下標爲

$$P_G(x_1,x_2,x_2,x_4)=\frac{1}{24}(x_1{}^8+9x_2{}^4+6x_4{}^2+8x_1{}^2x_3{}^2)$$

因此共有 $P_G(2,2,2,2)=23$ 種方法（眞正試著去著色才知道其複雜性），模式盤存爲

$$\frac{1}{24}[(x+y)^8+9(x^2+y^2)^4+6(x^4+y^4)^2+8(x+y^2)(x^3+y^3)^2]$$

$$=x^8+x^7y+3x^6y^2+3x^5y^3+7x^4y^4+3x^3y^5+3x^2y^6+xy^7+y^8$$

這個例子有很多有趣的推廣。譬如，以 n 種顏色去著色，其方法數爲

$$P_G(n,n,n,n)=\frac{1}{24}(n^8+17n^4+6n^2)$$

由是知，對任何正整數 n, $n^8+17n^4+6n^2$ 均可被24整除。用此法可以造出很多像數學歸納法之類的習題，（用三種顏色共有 333 種著色法，耐得住煩的讀者可以一試。）

另外，化學上的應用也是本例題可能推廣的方向，因爲許多結晶格子的結構是正方體，譬如，氯化納、氯化銫等。

下面舉一有關化學應用之例:

〔**例 6**〕呈四面體結構之有機分子很多，圖二表其一例（甲乙基二氯甲烷）。

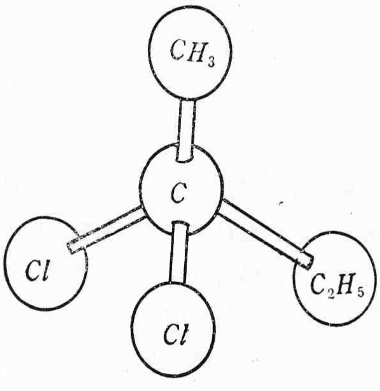

圖 二

今以碳原子爲此正四面體之中心，四角任意補以 CH_3（甲基），C_2H_5（乙基），H（氫），Cl（氯）等

四種成分，可求得多少種不同的有機分子（包括光學異構物）。首先考慮正四面體之旋轉（見圖三）：

(1)恒等。

(2)八個以頂端到對面中心聯線爲軸之 120° 旋轉。

(3)三個以相對兩稜中點聯線爲軸之 180° 旋轉。

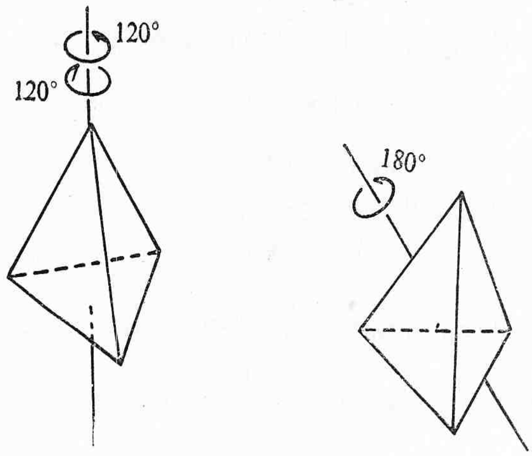

圖 三

在本例中，D爲正四面體的四個角，R爲甲基、乙基、氫等四種成分，旋轉所造成之排列羣其循環下標爲

$$P_G(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{12}(x_1^4+8x_1x_3+3x_2^2)$$

有機分子之數目爲

$$P_G(4,4,4)=36$$

在這些分子中，如果想求不含氫原子之分子權，令H之權數爲 0，其餘各成分之權數均爲 1，則得

$$P_G(3,3,3)=15$$

由是知至少含一個氫原子之分子數爲$36-15=21$。若將氫原子之權數賦爲h，其餘爲 1，則其模式盤存爲

$$P_G(h+3, h^2+3, h^2+3)=h^4+3h^3+6h^2+11h+15$$

表示含四個氫原子之分子數爲 1（即甲烷），含三個氫原子之分子數爲 3，等等。

七、定理之推廣

前面之討論僅限於對定義域D之變化作認同，而由D中之排列羣G來表現。顯然，同樣的觀念可用於處理值域R之變化，因而推廣考慮R中之排列羣H。定義二元關係於由D到R之函數如下：f_1 與 f_2 相關若存在一G中之排列π以及一H中之排列τ使得對所有D中之d，

$$\tau f_1(d)=f_2[\pi(d)]$$

易證此二元關係爲一對等關係。如果對R之元素加權，則在此情況下，同一對等類中之函數不一定有相同的權，因此必須另加條件，使得模式之權以及模式盤存有意義。本文不考慮這些條件，而將討論侷限於求得對等類之數目。取得對等類之數目祇須對R之元素均賦予權數 1，因此，顯然任何函數之權數均爲 1，而模式盤存即其對等類之數目矣。

定理 2 由D到R之函數之對等類個數爲

$$P_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}, \cdots\cdots\right)\cdot P_H[e^{z_1+z_2+z_3+\cdots}, e^{2(z_2+z_4+z_6+\cdots)}, e^{3(z_3+z_6+z_9+\cdots)}, \cdots\cdots]$$

在 $z_1=z_2=z_3=\cdots\cdots=0$ 之值。

〔例 7〕讓我們最後一次回到珍珠項鍊的例子。假設我們決定不予區別黑白呈對比之項鍊，亦卽，黑白黑與白黑白現在認爲是一條項鍊，黑黑黑與白白白亦不予區分，因此排得兩種項鍊。今試用定理2導出這個結果。令$D=\{1,2,3\}$ 代表三個位置，$R=\{b,c\}$ 代表黑白兩色，則由題意，得

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}, \qquad H=\left\{\begin{pmatrix}b&c\\b&c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b&c\\c&b\end{pmatrix}\right\}。$$

因此，

$$P_G=\frac{1}{2}(x_1^3+x_1x_2), \qquad P_H=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2)$$

由定理1，得項鍊數爲

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial z_1^3}+\frac{\partial}{\partial z_1}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\right)\cdot[e^{2(z_1+z_2+z_3)}+e^{2z_2}]\Big|_{z_1=z_2=z_3=0}=\frac{1}{4}\cdot 8=2$$

〔例 8〕五本書分給四個小孩，其中有兩本書是相同的，有兩個小孩是雙生子而不予區別，問有幾種分法。令$D=\{a,b,c,d,e\}$ 代表五本書，其中 a,b 是相同的，因此 a,b 互換不影響分法，所以有

$$G=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\a&b&c&d&e\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a&b&c&d&e\\b&a&c&d&e\end{pmatrix}\right\}$$

爲D之排列羣。令$R=\{u,v,x,y\}$ 爲四個小孩，其中u與v爲雙生子，得

$$H=\left\{\begin{pmatrix}u&v&x&y\\u&v&x&y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u&v&x&y\\v&u&x&y\end{pmatrix}\right\}$$

爲R之排列羣。因

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^5}{\partial z_1^5}+\frac{\partial^3}{\partial z_1^3}\cdot\frac{\partial}{\partial z_2}\right)[e^{4(z_1+z_2)}+e^{2(z_1+z_2)}e^{2z_2}]\Big|_{z_1=z_2=0}=336,$$

故得其分法有336種。

參 考 文 獻

1. Liu, C.L. (1968), *Introduction to Combinatorial Mathematics.*
2. Beckenbenback, E.F. (1964) *Applied Combinatorial Mathematics.*

——本文作者現任職於中山科學研究院