拈及其各種變型遊戲

張鎭華

(一) 拈 (Nim) 這種遊戲

就像物理的不共容原理一樣，數學遊戲的趣味性和其數學理論的完整性，成為互相排斥的兩部份。一種遊戲完全被數學決定以後，玩的人只要曉得其中的理論，無不處於優勢。遊戲本身則成為數學的計算，玩起來必索然無味；但如果將它視為數學問題處理，則蘊藏有甚多美妙的理論在其中。富有挑戰性的遊戲，則沒有固定的規律可尋，必須隨機應變，靠臨場的機智和以往的經驗取勝，玩者有味；但在數學理論上則沒有什麼可言。

拈及其各種變型遊戲大都屬於前者。當做一種學問，我們只關心其富有趣味的數學理論。

在所有雙人對局遊戲中，拈是極其古老且饒富興趣的一個課題。據說，拈源自中國，經由被販賣到美洲的奴工們外傳。辛苦的工人們，在工作閒暇之餘，用石頭玩遊戲以排遣寂寞。流傳到高級人士，則用辨士 (Pennils) 在酒巴櫃枱上玩。最有名的是將十二枚辨士分三列排成「三、四、五」的遊戲，如下圖：

第一列 ○ ○ ○
第二列 ○ ○ ○ ○
第三列 ○ ○ ○ ○ ○

遊戲的規則很簡單。兩人輪流取銅板，每人每次需在某一列取一枚或一枚以上的銅板，但不能同時在兩列取銅板，直到最後，將銅板拿光的人贏得此遊戲。也可以做相反的規定：最後將銅板拿光的人輸。

一個頭腦靈活的賭棍不久就會發現，先取的人，在第一列的三枚銅板中取走二枚，就能穩操勝算。一個顯而易見的規律是，只要你留下兩列枚數相同的銅板，必可獲勝。在這裏對稱扮演極重要的角色。

如果這個遊戲只是「三、四、五」型態，那麼不久後，大部份人就能熟悉其中規律，並且變得沒有興趣。有一個改變的方法是，將銅板的列數增加，每一列的枚數改變。這樣的做法，的確使人有毫無規律的感覺，至少不至於像「三、四、五」型態的拈一樣易於把握。

直到本世紀初，哈佛大學數學系副教授查理士・理昂納德・包頓 (Chales Leonard Bouton) 提出一篇極詳盡的分析和證明，利用數的二進位表示法，解答了這個遊戲的一般法則：對任意列數的銅板，每列有任意枚數，如何取得致勝之道？

在包頓的術語中，拿過後剩下的殘局不是安全 (safe) 就是不安全 (unsafe) 的局面。在所有安全的情況下，不管對方如何拿總是到一不安全的情況，你可以再取適當枚數的銅板 (在適當的某一列)，達到另一安全的情況，這樣一直到拿光銅板為止，當然最後一次拿光銅板的一定是你。反之，你如果留下不安全的情況，對方必有方法在適當的某一列，取走適當枚數的銅板，達到他的安全情況，也就是說你輸定了。

包頓的方法很簡單。首先，將各列銅板的枚數化成二進位數，相加，但不進位，然後再看和的各個位數。如果和的各個位數都是偶數，則表示一安全殘局；否則，如果有一位是奇數，則為不安全殘局。例如「三、四、五」遊戲，一開始就是不安全殘局，先拿的人可以適當取二枚而造成他的安全殘局。

〔例 1〕

						第一列取 2 枚						
	3	=		1	1	→	1	=			1
	4	=	1	0	0		4	=	1	0	0
+)	5	=	1	0	1		+) 5	=	1	0	1
不進位的和			2	1	2		不進位的和		2	0	2
（不安全殘局）							（安全殘局）				

另一個不安全殘局的例子如下:

〔例 2〕

								第一列取 3 枚							
	14	=		1	1	1	0	→	11	=		1	0	1	1
	15	=		1	1	1	1		15	=		1	1	1	1
	18	=	1	0	0	1	0		18	=	1	0	0	1	0
+)	22	=	1	0	1	1	0		+) 22	=	1	0	1	1	0
不進位的和			2	2	3	4	1		不進位的和		2	2	2	4	2
（不安全殘局）									（安全殘局）						

或者

第二列取 5 枚							
→	14	=		1	1	1	0
	10	=		1	0	1	0
	18	=	1	0	0	1	0
	+) 22	=	1	0	1	1	0
	不進位的和		2	2	2	4	0
	（安全殘局）						

爲什麼安全殘局和不安全殘局可以利用上述的方法判定呢？這個道理其實很簡單。首先，如果將各列銅板數化爲二進位表示法，相加，但不進位，得到的各個位數都是偶數的話，不論對方取那一列，多少枚銅板，則那一列銅板數所對應的二進位表示法中，必有某一位或數位由 0 變成 1 或者由 1 變成 0，其相加的和也相對的有某一位或數位由偶數變成奇數。例如，{1, 4, 5} 這個安全殘局，從第二列的 4 枚銅板取走 2 枚，則

原來第二列有 4 = 1 0 0
後來第二列有 2 = 0 1 0
↓ ↓
改變數字

原來的和

	1	=			1
	4	=	1	0	0
+)	5	=	1	0	1
不進位的和			2	0	2

後來的和

	1	=			1
	2	=		1	0
+)	5	=	1	0	1
不進位的和			1	1	2

↓ ↓
由偶數改成奇數

相反的，如果和的某一位或數位是奇數，則我們有辦法在某一列取走適當枚數的銅板，使得新的和的各個位數都是偶數。首先，選取和中所有爲奇數的各個位數 $\{a_1, \cdots\cdots, a_n\}$；例如在 {14, 15, 18, 22} 的例子中和的第 1 和第 3 位是奇數。其次看這些位數中那一個是最左邊一位；本例中當然是第 3 位。找某一列，使其二進位表示法在此位上剛好是 1；本例中，可以找第一列的14，也可以找第二列的15。然後將此列的銅板數所對應的二進位數中，凡是第 a_i 位，都改變其數值，亦卽若爲 0 則變爲 1，若爲 1 則變爲 0，如此得到一新數，我們只要在此列銅板取走適當的數目，使達到這新的枚數，卽可以使新的和的各個位數都是偶數；例如，若考慮第一列的 14=1110 枚銅板，將其第 1 和第 3 位改變得到 $1011=11_+$ 枚銅板，所以要在第一列取走 3 枚銅板。

相反規定，拿光銅板的人算輸時，只要將上面的規律略加修飾，也可以控制局面。如果你一直擁有安全殘局，對方一直處於不安全的情況，到某一時候，對方留下來的不安全殘局一定會出現一種特殊型態，卽是，除某一列銅板的枚數大於 1，其他各列均只有一枚銅板（拿光的各列不管它），這時候你的拿法要開始注意，你需將較多枚銅板這一列全部取光，或者拿到只剩下一枚，決定採取何者，完全看你拿了

之後，要能使剩下的列數爲奇數，當然每一列均只有一枚銅板。顯而易見的是，以後一人都取一列，也是一枚，到最後拿的一定是對方，於是你就赢了。

有很多人把這個方法寫成電腦程式，來和人對抗，不知就理的人被騙得團團轉，無不驚嘆電腦的神奇偉大。其實說穿了，只因爲它計算比人快，數的轉化爲二進位其速度快得非人能比，如此罷了。

（二）威氏遊戲（Wythoff's Game）

用來玩拈的道具不限於銅板。工餘之時，石頭可以玩；無聊嗑瓜子時，瓜子可以玩；圍棋子可以玩……。也可以將石頭分堆放置，一堆相當於一列。這些都不是重點，我們甚至可以改變取銅板的規定，最後取光時輸赢的規定，……於是，各種不同的變型遊戲遂產生。

在拈的遊戲中，如果只有兩列銅板，則很容易看出來，留下兩列枚數相同的銅板是致勝的安全殘局。也就是我們一開始說的對稱這個想法。事實上，包頓很巧妙的將對稱化成二進位和的各個位數爲偶數，將問題給一般化，這是很天才的想法。所以兩列的拈是沒有什麼可說的。

將拈的規定略加修改，成爲只有兩列的威氏遊戲，卻極其有意思。規定是這樣的，銅板只有兩列，每列的枚數隨玩者任意規定，兩人輪流取銅板，取的時候，需要任一列中取一枚或多枚銅板，或者同時在兩列取同樣枚數的銅板，直到最後將銅板取光的人赢。當然也可以像拈一樣有相反的規定，最後將銅板取光的人輸。今只討論前者。

拈的玩法完全不能適用於威氏遊戲。所有拈的安全殘局 $\{n,n\}$，在威氏遊戲中都是不安全殘局。因爲我們加了一個規定，可以從兩列銅板中同時取相同枚數的銅板。

〔例 3〕若 n 是正整數，則 $\{0,n\}$ 和 $\{n,n\}$ 都是不安全殘局。

〔例 4〕$\{1,2\}$ 是安全殘局。

因爲

$$\{1,2\}\xrightarrow{\text{每列各取 1 枚}}\{0,1\}$$
$$\{1,2\}\xrightarrow{\text{第一列取 1 枚}}\{0,2\}$$
$$\{1,2\}\xrightarrow{\text{第二列取 1 枚}}\{1,1\}$$
$$\{1,2\}\xrightarrow{\text{第二列取 2 枚}}\{1,0\{$$

不管如何取，總是成爲不安全殘局。

〔例 5〕$\{3,5\}$ 是安全殘局。

因爲

$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{每列取 1 枚}}\{2,4\}\qquad\xrightarrow{\text{第二列取 3 枚}}\{2,1\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{每列取 2 枚}}\{1,3\}\qquad\xrightarrow{\text{第二列取 1 枚}}\{1,2\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{每列取 3 枚}}\{0,2\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第一列取 1 枚}}\{2,5\}\qquad\xrightarrow{\text{第二列取 4 枚}}\{2,1\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第一列取 2 枚}}\{1,5\}\qquad\xrightarrow{\text{第二列取 3 枚}}\{1,2\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第一列取 3 枚}}\{0,5\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第二列取 1 枚}}\{3,4\}\qquad\xrightarrow{\text{每列各取 2 枚}}\{1,2\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第二列取 1 枚}}\{3,3\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第二列取 3 枚}}\{3,2\}\qquad\xrightarrow{\text{每列各取 1 枚}}\{2,1\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第二列取 4 枚}}\{3,1\}\qquad\xrightarrow{\text{第一列取 1 枚}}\{2,1\}$$
$$\{3,5\}\xrightarrow{\text{第二列取 5 枚}}\{3.0\}$$

不管對方如何取，不是到達例 3 的不安全殘局，就是你可以再適當取，使成例 4 的安全殘局。

繼續推演下去，可以得到許多組安全殘局 $\{1,2\},\{3,5\},\{4,7\},\{6,10\},\cdots$。一般而言，第 n 組安全殘局 $\{a_n,b_n\}$ 可由下式定義得到

① $a_1=1$，$b_1=2$。

② 若 $a_1, b_1, \cdots\cdots, a_{n-1}, b_{n-1}$ 已經求得，則定義 a_n 爲未出現在以上這 $2n-2$ 個數中的最小正整數。

③ $b_n=a_n+n$。

做成表就是

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26

由①，②，③所定義的二數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 具有下列特性：

(甲) 數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均是嚴格遞增數列，而且 $b_n=a_n+n$。

(乙) $A\cup B=\boldsymbol{N}$, $A\cap B=\phi$ 其中$\boldsymbol{N}$表示正整數的集合，$A=\{a_n|n\in\boldsymbol{N}\}$, $B=\{b_n|n\in\boldsymbol{N}\}$

(丙) 若 $\{a_n, b_n\}=\{a_m, b_m\}$，則$n=m$，即 $a_n=a_m$，$b_n=b_m$。

事實上，相反的，具有（甲）（乙）性質的數列，也就是具有①，②，③性質的數列。

〔定理〕$\{a_n, b_n\}$ 是威氏遊戲的安全殘局，其餘的組合 $\{x, y\}$ 都是不安全殘局。

〔證〕我們只要證明下面二點即可。

(1) 由任何一組 $\{a_n, b_n\}$ 取銅板，不管如何取，都不會成爲另一組 $\{a_m, b_m\}$。

假設從一組 $\{a_n, b_n\}$ 中的 a_n 取 x, b_n 取 y，而能達到另一組 $\{a_m, b_m\}$，則 $a_n-x=a_m$, $b_n-y=b_m$。

(i) 當$x=0$，$y>0$時，$a_n=a_m$ 則$n=m$，得$y=0$，矛盾。

(ii) 當$x>0$，$y=0$時，$b_n=b_m$ 則$n=m$，得$x=0$，矛盾。

(iii) 當$x=y>0$時，$m=b_m-a_m=(b_m+y)-(a_m+x)=b_n-a_n=n$矛盾。

(2) 由任一組不是 $\{a_n, b_n\}$ 型的 $\{x, y\}$ 可以適當取銅板使成某一組 $\{a_m, b_m\}$。爲方便計，可假設$y\geq x$。

(i) 當x爲某個 b_m 時，$y-a_m=y-(b_m-m)=(y-x)+m>0$，可在$y$中取$y-a_m$，變成 $\{b_m, a_m\}$。

(ii) 當x爲某個 a_m，且 $y>b_m$ 時，在y中取 $y-b_m$，變成 $\{a_m, b_m\}$。

(iii) 當x爲某個 a_m，且 $a_m=x\leq y<b_m=a_m+m$ 時，$y-x<m$，令 $k=y-x$，則 $y-b_k=x+k-(a_k+k)=x-a_k>0$。在$x$中取$x-a_k$，在$y$中取$y-b_k=x-a_k$ 則變成 $\{a_k, b_k\}$。

這個定理不但告訴我們 $\{a_n, b_n\}$ 是威氏遊戲的安全殘局，其證明過程更暗含從不安全殘局取銅板變成安全殘局的法則。我們只要記住這個法則，還有 $\{a_n, b_n\}$ 組合，則無不處於優勢。但是有一個問題是，當數目很大的時候，要記住一大堆 $\{a_n, b_n\}$ 是一件非常吃力不討好的工作。我們於是自然會問，有沒有像拈類似的法則用來判斷任何一組 $\{x, y\}$ 是否爲威氏遊戲的安全殘局，而不必逐一計算 $\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}\cdots\cdots$。答案是有的，在解答這之前，我們需要談談費氏數列及相關的問題。

（三）費氏數列及進位法

費氏數列是指無窮數列 $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\cdots$ 而言，它的一般表示式是 $f_0=1$, $f_1=2$, $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. 眞正把它計算出來是

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}\}$$

計算的過程和我們要討論的沒有太大關係，茲從略。有一點可以注意的是，$\{f_n\}$幾乎成一等比級數。因爲 $\sqrt{5}\approx 2.236$，$(1-\sqrt{5})/2\approx -0.618$，其絕對值小於 1，當 n 很大時，$((1-\sqrt{5})/2)^n$ 變得很小，幾乎可以省略不計。也就是說 $f_n\approx((1+\sqrt{5})/2)^{n+2}/\sqrt{5}$，幾乎是等比級數型式增加。

費氏級數最有趣的特性是，自然界許多生長的過程或多或少和它有點關聯。可參考「數學漫談」第四章（下）。

通常我們所熟悉的阿拉伯數字表示自然數的方法是利用 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 十個數字爲基礎，借「位」的觀念，和「逢十進一」的方法組織而成。這就是十進位法。舉例來說，$345=3\times 10^2+4\times 10^1+5$ 彷照這個道理，有各種進位法，例如電腦所熟悉的二進位法，僅有 0 和 1 兩種基本數字，10110 表示 $1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+1\times 2^1+0=16+4+2=22$。八進位法，則僅有0,1,2,3,4,5,6,7 八個數字。

標準的進位法中，各位都是滿一個固定數就進位。例如：十進位法是滿十進一，卽個位數滿十進一到十位數，十位數滿十進一到百位數，百位數滿十進一到千位數，……等。

考慮一個自然數的無窮數列 $B_0, B_1, B_2, \cdots\cdots$ 其中 $B_0=1$，其餘各 B_n 均大於 1。我們可以採取一種名爲 B 進位法的記數法則：由右邊算起，第一位滿 B_1 進一到第二位，第二位滿 B_2 進一到第三位，…，第 n 位滿 B_n 進一到第 $n+1$ 位。

任何一個自然數 x 可以有唯一的 B 進位表示法 $l_nl_{n-1}\cdots\cdots l_1l_{0B}$，其中 $0\leq l_i\leq B_{i+1}$。則

$$x=l_nl_{n-1}\cdots\cdots l_1l_{0B}=\sum_{m=0}^{n} l_m(B_0B_1\cdots\cdots B_m)$$

標準十進位法是取 $B_i=10$, $i=1,2,\cdots\cdots$。各種 k 進位法是指 $B_i=k$，$i=1,2,\cdots\cdots$ 而言。

〔例 6〕$B_n=n+1$ 求 347 的 B 進位表示法。

2 | 347	因爲　$347=173\times 2+1$
3 | 173 …… 1	$173=57\times 3+2$
4 | 57 …… 2	$57=14\times 4+1$
5 | 14 …… 1	$14=2\times 5+4$
2 …… 4	

所以　$347=2\times(2\times 3\times 4\times 5)+4\times(2\times 3\times 4)+1\times(2\times 3)+2\times 2+1=24121_B$

假設 $P_n=B_0B_1\cdots\cdots B_n$，則 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ 成爲一個以 1 爲起點的嚴格遞增無窮自然數列。自然數 N 的 B 進位表示法

$$l_nl_{n-1}\cdots\cdots l_1l_{0B}=\sum_{m=0}^{n} l_mP_m,\qquad \text{其中 } 0\leq l_i<P_{i+1}/P_i=B_{i+1}$$

如果我們一開始就取一個以 1 爲起點的嚴格遞增無窮自然數列 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$，對於任何自然數 N 表示成 $\sum_{i=0}^{n} l_iP_i$, $0\leq l_i<P_{i+1}/P_i$ 有無困難？答案是有的。在 B 進位表示法中，每一個自然數恰有唯一的一種表示法；但是在這種新的表示法中，不一定每個自然數均只有一種表示法。〔例 6〕數列 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ 定義爲

$$P_n=2n+1\text{，則}\quad 8=7+1=P_3+P_0=1001(P),\qquad 8=5+3=P_2+P_1=110(P)\text{。}$$

有趣的是，自然數的 P 數列表示法一定有解。

〔**定理 2**〕$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一個以 1 爲起點的嚴格遞增無窮自然數列，則每一自然數 N 至少可以表示成一種 P 數列表示法

$$l_n l_{n-1}\cdots\cdots l_1 l_0(P)=\sum_{i=0}^{n} l_i P_i, \qquad 其中\ 0\le l_i<P_{i+1}/P_i。$$

〔證〕利用數學歸納法證明：$N<P_n$ 時 N 有 P 數列表示法 $l_{n-1}\cdots\cdots l_0(P)$。

$n=1$ 時，$N=l_0$ 其中 $l_0(P)=N$。若 $n=k$ 時本定理成立，則 $n=k+1$ 時，利用除法公式，可以找到 l_k 及 r 使得

$$N=l_k P_k+r, \qquad 0\le r<P_k \quad 可知\ 0\le l_k\le N/P_k<P_{k+1}/P_k。$$

由歸納法假設

$$r=l_{k-1}\cdots\cdots l_1 l_0(P)=\sum_{i=0}^{k-1} l_i P_i,$$

而且 $0\le l_i<P_{i+1}/P_i$。故

$$N=\sum_{i=0}^{k} l_i P_i=l_k l_{k-1}\cdots\cdots l_1 l_0(P), \ 且\ 0\le l_i<P_{i+1}/P_i。$$

將上面這種理論用到費氏數列 $\{f_n\}$，因爲 $f_{n+1}/f_n\le 2$，所以費氏表示法中的各個「位數」只能是 0 或 1。費氏數列表示法不具有唯一性。

〔例 7〕化 60 爲費氏數列表示法。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55

$$\begin{aligned}60&=f_8+f_3=100001000(f)\\&=f_7+f_6+f_2+f_1=11000110(f)\\&=f_7+f_5+f_4+f_2+f_1=10110110(f)\end{aligned}$$

因爲 $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$，費氏數列表示法中有一種有趣的「進位法」：第 n 位和第 $n+1$ 位都是 1 時，可以進位到第 $n+2$ 位。如上例 $10110110(f)$ 的第 5 和第 6 位都是 1，故可以進位到第 7 位，將原數化成 $11000110(f)$；同理，可將 $11000110(f)$ 的第 2 和第 3 位進位到第 4 位，成爲 $11001000(f)$。利用這個性質，在一數的某一費氏數列表示法中，如果有相鄰的兩位均是 1，則可以進位到左邊一位，化成另一個不同的表示法，繼續化簡，到最後，可以得到一種表示法，其中 l_i 各數目，相鄰兩個不同時爲 1（否則，再進位即可），每一個數都有一種唯一的如此表示法，稱之爲標準表示法。

另一有趣的性質是：如果 $l_n l_{n-1}\cdots\cdots l_1 l_0(f)$ 中各位數字 0 和 1 相間出現，例如 $101010(f)$ 或 $10101(f)$ 則

$$l_n l_{n-1}\cdots\cdots l_1 l_0(f)b+1(f)=1\underbrace{00\cdots\cdots00}_{n+1\text{ 個 }0}(f)=f_{n+1}.$$

(四) 威氏遊戲的致勝法則

現在回到第(二)節的數列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$。一個相當有趣的事實是，如果將威氏遊戲的各組安全殘局 $\{a_n, b_n\}$ 用費氏數列標準表示法表示出來，如下表：

n	a_n	b_n
1	1	1 0
2	1 0 0	1 0 0 0
3	1 0 1	1 0 1 0
4	1 0 0 1	1 0 0 1 0
5	1 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0
6	1 0 0 0 1	1 0 0 0 1 0
7	1 0 1 0 0	1 0 1 0 0 0
8	1 0 1 0 1	1 0 1 0 1 0

仔細觀察，各個 b_n 恰好是 a_n 後面加一個0，每個 a_n 最右邊有偶數個連續的0（包括沒有0），當然 b_n 最右邊有奇數個連續的0。有了這個結果，我們要檢查一組 $\{x,y\}$（其中$x\leq y$）是否安全殘局，就可以將x和y表成費氏數列標準表示法，再看看是否合於上述的條件即可。這中間的優點是，我們不必再計算所有 $a_n\leq x$ 的安全殘局 $\{a_n,b_n\}$，以決定 $\{x,y\}$ 是否安全。更重要的是，我們將有一種簡便的方法，可以將不安全殘局 $\{x,y\}$ 適當的取成某一安全殘局 $\{a_n,b_n\}$。

當然，數論上的一些結果告訴我們$a_n=[n\cdot(\sqrt{5}-1)/2]$, $b_n=[n(\sqrt{5}+1)/2]$（$[x]$ 表示小於或等於x的最大整數，例如 $[2.99]=[2.01]=[2]=2$）由定理1，我們幾乎要求出 $2x/(\sqrt{5}-1)$ 組 $\{a_n,b_n\}$ 才能順利的判定安全殘局，以及由不安全殘局拿成安全殘局的方法。當x大的時候，這麼多的資料處理起來必然不方便。

上述 $\{a_n,b_n\}$ 的性質，只是依觀察而得，現在我們要證明其眞實性。我們所以要這樣做，不光是因爲數學上的嚴密性，在證明的過程中，用到的一些計算，將很有用處。

首先將自然數分成A和B兩部份，A是所有費氏標準表示法中右邊有偶數個連續0的自然數的集合，B則是所有費氏標準表示法中右邊有奇數個連續0的自然數的集合。將A中之數由小而大排成一數列 $\{a_n'\}_{n=1}^{\infty}$，設 b_n' 是 a_n' 費氏標準表示法右邊再加一個0者。我們將證明

$$A=\{a_n'|n\ 自然數\},\quad B=\{b_n'|n\ 自然數\}$$

且合於第（二）節的(甲)(乙)條件。所以，事實上就是

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\ 和\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty},$$

因此證明了上述的性質。（乙）易於知道成立。因爲 $\{a_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 都是嚴格增加數列，爲了證明（甲），我們只要證明 $b_n'=a_n'+n$ 就可以，茲分下面兩步驟，證明之。

（第一） $b_n'-a_n'$ 隨n增加而增加。也就是，當$n>m$ 時，$b_n'-a_n'>b_m'-a_m'$。

〔證〕假設

$$a_n'=l_rf_r+l_{r-1}f_{r-1}+\cdots\cdots l_0f_0$$
$$b_n'=l_rf_{r+1}+l_{r-1}f_r+\cdots\cdots+l_0f_1$$
$$a_m'=\bar{l}_rf_r+\bar{l}_{r-1}f_{r-1}+\cdots\cdots+\bar{l}_0f_0$$
$$b_m'=\bar{l}_rf_{r+1}+\bar{l}_{r-1}f_{r-1}+\cdots\cdots+\bar{l}_0f_1$$

上面均是標準表示法，但左邊有的塡0（卽 l_r 或 $\bar{l}_r$ 可能爲0……等）以便對齊。$n>m$表示 $a_n'>a_m'$，也就是有一個 $s<r$ 使得 $l_i=\bar{l}_i$ 對每一個 $i>s$ 成立，$l_s>\bar{l}_s$。因爲

$$b_n'-a_n'=l_rf_{r-1}+l_{r-1}f_{r-2}+\cdots\cdots+l_1f_1+l_0$$
$$b_m'-a_m'=\bar{l}_rf_{r-1}+\bar{l}_{r-1}f_{r-2}+\cdots\cdots+\bar{l}_1f_1+\bar{l}_0$$

可見

$$b_n'-a_n'>b_m'-a_m'。$$

（第二） 對於任一自然數x，有一組 $\{a_n',b_n'\}$ 使得 $b_n'=a_n+x$。

〔證〕當 x 的費氏標準表示法右邊有奇數個連續的 0 時，取 $a_n'=x0(f), b_n'=x00(f)$ 即可以。

當 x 的費氏標準表示法右邊有偶數個連續的 0 時，即

$$x=l_rf_r+l_{r-1}f_{r-1}+\cdots\cdots+l_{2m}f_{2m},\ \ l_{2m}=1$$

取

$$a_n'=l_rf_{r+1}+l_{r-1}f_r+\cdots\cdots+l_{2m+1}f_{2m+2}+f_{2m}+f_{2m-2}+\cdots\cdots+f_0$$
$$b_n'=l_rf_{r+2}+l_{r-1}f_{r+1}+\cdots\cdots+l_{2m+1}f_{2m+3}+f_{2m+1}+f_{2m-1}+\cdots\cdots+f_1$$

利用

$$\begin{aligned}&(f_{2m+1}+f_{2m-1}+\cdots\cdots+f_1)-(f_{2m}+f_{2m-2}+\cdots\cdots+f_0)\\&=(f_{2m+2}-1)-(f_{2m}-1)=f_{2m+2}-f_{2m+1}=f_{2m}.\end{aligned}$$

可見 $b_n'=a_n'+x$ 成立。

（第一）和（第二）證明了 $b_n'=a_n'+n$ 的確成立。

上面的證明不但說明了 $\{a_n, b_n\}$ 具有所述的性質，即是 a_n 爲第 n 個費氏標準表示法之最右邊有偶數個連續 0 的自然數，b_n 是第 n 個費氏標準表示法之最右邊有奇數個連續 0 的自然數，尤有進者，b_n 的表示法等於 a_n 表示法右邊再加一個 0 而已。

而且由（第二）可以知道，對於任何一個自然數 x，不必用歸納法從 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots\cdots$ 算起，一直求到 a_x, b_x。直接就可以算出 a_x 和 b_x 來。所以在利用定理 1 的時候，我們就可以不必記憶一大堆 $\{a_n, b_n\}$ 值了。

（五）單堆遊戲

在所有拈的變型遊戲中，單堆遊戲似乎是比較簡單的。最常見而爲大衆熟悉的玩法是這樣的：「兩人輪流取一堆石頭，每人每次最少取 1 個，最多取 k 個，最後取光石頭的人贏得此遊戲。」請問有何致勝之道?

和前面一樣，所有的情況，可以分爲安全和不安全兩種。在這裏 $k+1$ 這個數扮演著極重要的角色，因爲每次某一人拿的石頭數 i，合於 $1\leq i<k+1$，可見 $1\leq k+1-i\leq k$，另一人總是可以取 $k+1-i$ 個石頭，使這兩次所取的石頭共有 $k+1$ 個，由是可見 $k+1$ 是安全殘局，利用歸納法則 $k+1$ 的倍數必爲安全殘局。反之，不是 $k+1$ 倍數的任一自然數 $n=q(k+1)+r$，其中 $1\leq r\leq k$，一次拿 r 個石頭就能到達 $q(k+1)$，即某一安全殘局，可見此時爲不安全殘局。

相反的規定：「最後取光石頭的人輸」，也可以分析知道，安全殘局是 $q(k+1)+1$ 這種型態的數。

並不是所有單堆遊戲都是如此容易的，例如「奇偶遊戲」則是較複雜的一種。所謂「奇偶遊戲」只是將上述的問題略加修改，最後取光石頭時的輸贏的規定不同，即「兩人輪流取一堆石頭，每人每次最少取 1 個，最多取 k 個，到最後石頭被取光時，若手中所有石頭總數爲奇數，則此人贏得此遊戲。（也可以規定石頭總數爲偶數的人贏得此遊戲）。」顯而易見的是，原先這堆石頭的總數要是奇數才有意義。這個遊戲較前者更複雜，其安全殘局視 k 的奇偶和 $k+1$ 或 $k+2$ 的倍數有關係。在此不多加討論，有興趣的人可參考鄭清水和黃光明〔參考書目第 4 項〕的結果。

另一個和骰子有關的單堆遊戲由古先生〔註〕提出來，問題是這樣的：「有一堆石頭，數目不拘。首先任意擲一骰子，看出現幾點，就取去幾個石頭。然後兩人輪流翻轉骰子到前次骰子出現那一面的旁邊四面中任一面，但不可以翻到對面，也不可以不翻，翻到幾點，就取去幾個石頭，如此輪流玩到一方沒有辦法拿石頭，也就是說，剩下的石頭數比他翻到的數目還小的時候，則他就算輸了。」

首先要瞭解的一點是，骰子上面六個數目安排的方法。從 1 到 6 的各個自然數在骰子上各出現一次，1 的對面是 6，2 的對面是 5，3 的對面是 4。

〔註〕古學理先生爲本所編纂

這個遊戲和第一個單堆遊戲有點類似，卻不相同。如果骰子出現 i 的時候，輪到你，則從 1 到 6 中的各數有兩個，即是 i 和 $7-i$，你不能翻到，其餘四個隨你高興愛翻那一個都可以。所以每次你能夠取的石頭數，依前次對方所翻到的數目而定，而對方翻的數又因你前次翻的而定，如此相互影響，就顯得很複雜了。仔細分析的結果，可以發現其安全殘局和 8 的倍數有密切關係。有興趣的讀者可以自己試試看。

如果把骰子加成兩個，然後規定每次翻兩個骰子，把翻到的兩個數字和算出來，取掉同樣數目的石頭，則又如何呢？如果還是有兩個骰子，但每次只任選其中一個將它翻到新數目，看這數目是多少，就取掉多少石頭，則又如何？或者，還是兩個骰子，每次只任意翻轉其中一個到新數目，但把這個新數目和另一個未翻的骰子相加，算出其和，取掉同樣數目的石頭，則又如何？當然，增加骰子的數目，則遊戲更複雜。

最後我們想仔細討論的一個單堆遊戲叫做「雙倍遊戲」。這個遊戲和骰子的單堆遊戲有一共同的特性：每次所拿石頭的個數受上次對方所拿石頭的個數影響。

問題是這樣的：「兩人輪流取石，每人每次至少取 1 個石頭，至多取上次對方所拿石頭數目的兩倍；最後拿光石頭的人贏得此遊戲。當然，第一個人不能第一次就取光所有石頭。」

〔例 8〕2 是安全殘局，因對方只能取 1。

〔例 9〕3 是安全殘局。

因 $3 \xrightarrow{\text{他取 }1} 2 \xrightarrow{\text{你取 }2} 0$ $\quad$ $3 \xrightarrow{\text{他取 }2} 1 \xrightarrow{\text{你取 }1} 0$

〔例10〕5 是安全殘局。

因 $5 \xrightarrow{\text{他取 }1} 4 \xrightarrow{\text{你取 }1} 3$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\text{他取 }2} 3 \xrightarrow{\text{你取 }3} 0$

$5 \xrightarrow{\text{他取 }3} 2 \xrightarrow{\text{你取 }2} 0$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\text{他取 }4} 1 \xrightarrow{\text{你取 }1} 0$

（重現例 9 的安全殘局）

如此繼續推演下去，一個很有意思的結論是，所有費氏級數的項 f_n 均是安全殘局其餘都是不安全殘局。要證明這件事情可以分幾步完成，主要的概念還是在於自然數的費氏數列標準表示法。

(i) 如果 $n \geq 1$，則 $f_n < f_{n+1} < 2f_n$。

〔證明〕因爲 $f_1=2, f_2=3, f_3=5$，所以 $n=1, 2$，時易知爲對。

若 $n<k$ 時定理成立

則 $$f_{k-2}<f_{k-1}<2\cdot f_{k-2}$$

$$f_{k-1}<f_k<2\cdot f_{k-1}$$

兩式相加 $$f_k<f_{k+1}<2\cdot f_k$$

由歸納法得證。

(ii) 如果你留下 $x=f_{k_1}+f_{k_2}+\cdots\cdots+f_{k_{n-1}}+f_{k_n}$ 個石頭，其中 $k_i \geq 2+k_{i+1}$, $i=1,2,\cdots\cdots,n-1$ 而且對方下次所能取走的石頭數目小於 f_{k_n}，則你留下的是一安全殘局

〔證明〕假設對方拿走 $y=f_{k_{n+1}}+f_{k_{n+2}}+\cdots\cdots+f_{k_{n+m}}$ 個石頭，其中 $k_n \geq 1+k_{n+1}$, $k_{n+i} \geq 2+k_{n+i+1}$, $i=1,2,\cdots\cdots,m-1$。

當 $k_n \leqq 2+k_{n+1}$ 時，$y \geqq f_{k_{n+1}} \geqq f_{k_n-2}$ 則

$$y'=f_{k_n}-y \leqq f_{k_n}-f_{k_n-2}=f_{k_n-1}<2f_{k_n-2} \leqq 2y$$

所以你可以取走 y' 個石頭，使剩下 $x'=f_{k_1}+f_{k_2}+\cdots\cdots+f_{k_{n-1}}$ 個石頭，而且

$$2y'=2(f_{k_n}-y)<2f_{k_n}<f_{k_n}+f_{k_n+1}=f_{k_n+2} \leqq f_{k_{n-1}}$$

也就是對方下次所能取走的石頭數目小於 $f_{k_{n+1}}$ 如此又可用歸納法繼續推演本定理。

其次，如果 $k_n>2+k_{n+1}$ 時，分解

$$f_{k_n}=f_{k_n-1}+f_{k_n-3}+f_{k_n-5}+\cdots\cdots+f_{k_n-t-2}+f_{k_n-t}+f_{k_n-t-1}。$$

其中 t 爲 ≥ 3 的奇數，而且 $k_n - t = k_{n+1}$ 或 $1 + k_{n+1}$。

$$y' = f_{k_n - t} + f_{k_n - t - 1} - y < f_{k_n - t} \leq f_{1 + k_{n+1}} < 2f_{k_{n+1}} \leq 2y$$

所以你可以取走 y' 個石頭，使剩下

$$x' = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots\cdots + f_{k_{n-1}} + f_{k_n - 1} + f_{k_n - 3} + \cdots\cdots + f_{k_n - t + 2}$$

個石頭，而且

$$2y' < 2f_{k_n - t} < f_{k_n - t} + f_{k_n - t + 1} = f_{k_n - t + 2}$$

也就是下次對方所能取走的石頭數目小於 $f_{k_n - t + 2}$。同理可用歸納法。

(iii)雙倍遊戲中的安全殘局是 f_n, $n = 1, 2, \cdots\cdots$.

〔證明〕 $x = f_n$ 時就如 (ii) 所述，對方所取的石頭不超過 δ_n，所以你是留下安全殘局。

若一開始 x 不是 f_n 型態，化爲費氏標準式，

$$x = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots\cdots + f_{k_m}, \text{ 其中 } k_i \geq 2 + k_{i+1},\ i = 1, \cdots\cdots, m-1$$

對方可以取去 f_{k_m} 剩下 $x' = f_{k_1} + \cdots\cdots + f_{k_{m-1}}$ 輪到你時不得取超過 $2f_{k_m} < f_{k_m + 2} \leq f_{k_{m+1}}$ 由(ii)可知他留下了他的安全殘局，所以一開始的是你的不安全殘局。

(六) 結　語

有興趣嗎？讓我們隨便規定一個玩法：「一堆石頭有 100 個，兩人輪流取石，每次每人至少取一個，最多取上次對方取走石數的三倍。最後取光的贏得遊戲。當然，第一個拿的人不可以第一次就取光所有石頭。」

筆者也不曉得其中有何規則。

來吧！你先？還是我先？東南亞電影一場外加牛肉麵一碗。

參考書目

1. 「數學漫談」，大衞·柏佳米尼及「時代生活」雜誌社編輯部著，傅溥譯註，美亞書局發行。
2. A.M. Yaglom and I.M. Yaglom, *Challeng Mathematical Problems with Elementary Solutions*, vol. 1 and 2 Translated into English by James McCawley, Jr.
3. C.S. Cheng (鄭清水) and F.K. Hwang (黃光明) *The Even-odd Game* 民國六十年六月份「學聲」(清華大學數學學會出版)，pp. 7-10.

——本文作者曾任職本所現就讀於美國康乃爾大學