數學傳播 31卷4期, pp. 81-88

化用賈憲三角*妙算冪和

王 猷

摘要: 正整數 [註1] 的冪和似乎是個永恆的話題, 眾述紛紜。本文致力於介紹一種便捷的算法 [1], 並且創作出一款優雅的證明。此算法屬線性代數型, 其特色在於無需遞推。令人驚訝的是, 冪和竟然與「賈憲三角」有著密切的關係!

1. 緒論

開門須見山。本文之核心乃下述定義及定理。

定義: 所謂「前 n 個正整數的 p 次冪和」, 是指

$$S_p(n)=\sum_{m=1}^{n} m^p = 1^p+2^p+\cdots+n^p, \quad p\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

定理: 冪和 $S_p(n)$ 是關於 n 的、缺常數項的 $p+1$ 次多項式, 即

$$S_p(n)=\sum_{q=1}^{p+1} a_q n^q = \mathbf{a}^T\mathbf{n}, \tag{2}$$

這裡

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{p+1}\end{bmatrix}^T, \qquad \mathbf{n}=\begin{bmatrix}n & n^2 & \cdots & n^{p+1}\end{bmatrix}^T;$$

並且向量 $\mathbf{a}$ 滿足方程

$$\begin{bmatrix}
\binom{1}{0} & -\binom{2}{0} & \binom{3}{0} & \cdots & (-1)^{p-1}\binom{p}{0} & (-1)^p\binom{p+1}{0}\\
 & \binom{2}{1} & -\binom{3}{1} & \cdots & (-1)^{p-2}\binom{p}{1} & (-1)^{p-1}\binom{p+1}{1}\\
 & & \binom{3}{2} & \cdots & (-1)^{p-3}\binom{p}{2} & (-1)^{p-2}\binom{p+1}{2}\\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots\\
 & \mathbf{0} & & & \binom{p}{p-1} & -\binom{p+1}{p-1}\\
 & & & & & \binom{p+1}{p}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ \vdots\\ a_p\\ a_{p+1}\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \tag{3}$$

* 在歐美稱作「巴斯卡三角形」(Pascal's triangle)。

[註1] 本文約定: 正整數集 $\mathbb{Z}_+=\{1,2,3,\ldots\}$, 自然數集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$。

其中 $\binom{p}{q}=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ 爲二項式係數。 $\Box$

我們把位於 (3) 式左邊的那個矩陣作$\mathbf{U}$ [註2], 其代表元素爲

$$u_{ij}=\begin{cases}(-1)^{j-i}\dbinom{j}{i-1}, & \text{當 } i\le j;\\ 0, & \text{當 } i>j.\end{cases} \tag{4}$$

再者, 記 $[\underbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1}_{p+1}]^T=\mathbf{e}$. 於是, 可將 (3) 式簡寫爲

$$\mathbf{Ua}=\mathbf{e}. \tag{3'}$$

如果您很細心的話, 想必已經發現了:

(i) 祇要將 $\mathbf{U}$ 轉置, $\mathbf{U}^T$ 中的所有非零元素便構成了缺一層斜邊的、正負項交錯的賈憲三角;

(ii) $\mathbf{e}$ 是 $\mathbb{R}^{p+1}$ 的標準基底向量 (standard basis vectors) 之一。

2. 證明

不證明, 未可信!

筆者思索出的證明分爲三個步驟, 請跟我來——

第一步 縮和 (telescoping sum)

由二項式定理, 有

$$\begin{aligned}(m-1)^{r+1}&=\sum_{q=0}^{r+1}\binom{r+1}{q}(-1)^{r+1-q}m^q\\ &=\Big[\sum_{q=0}^{r}\binom{r+1}{q}(-1)^{r+1-q}m^q\Big]+m^{r+1},\end{aligned}$$

移項 [註3], 得

$$\sum_{q=0}^{r}(-1)^{r-q}\binom{r+1}{q}\cdot m^q=m^{r+1}-(m-1)^{r+1}. \tag{5}$$

在 (5) 式中依次令 $m=1,2,\cdots,n$, 一舉獲得 n 個等式。纍加諸式, 縮和其右端, 列豎式如

[註2] Upper triangular matrix, 上三角陣。

[註3] 注意, Σ -和式中的各項皆須變號, 即改 $(-1)^{r+1-q}$ 爲 $(-1)^{r-q}$ 。

下:

$$\begin{array}{rl}
\sum_{q=0}^{r}(-1)^{r-q}\binom{r+1}{q}\cdot 1^q & = 1^{r+1} - 0^{r+1} \\
\sum_{q=0}^{r}(-1)^{r-q}\binom{r+1}{q}\cdot 2^q & = 2^{r+1} - 1^{r+1} \\
\vdots \qquad & \ \vdots \qquad \vdots \\
+)\ \sum_{q=0}^{r}(-1)^{r-q}\binom{r+1}{q}\cdot n^q & = n^{r+1} - (n-1)^{r+1} \\
\hline
\sum_{q=0}^{r}(-1)^{r-q}\binom{r+1}{q}\cdot S_q(n) & = n^{r+1} - 0^{r+1}
\end{array}$$

由此, 我們得出重要的等式

$$\sum_{q=0}^{r}(-1)^{r-q}\binom{r+1}{q}\cdot S_q(n) = n^{r+1}. \tag{6}$$

第二步　佈陣 [註4]

將 (6) 式左邊寫爲兩個 $r+1$ 維向量相乘的形式, 得

$$\begin{bmatrix}(-1)^r\binom{r+1}{0} & (-1)^{r-1}\binom{r+1}{1} & \cdots & \binom{r+1}{r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_0(n)\\ S_1(n)\\ \vdots \\ S_r(n)\end{bmatrix} = n^{r+1}. \tag{6'}$$

在 (6′) 式中依次令 $r = 0, 1, \cdots, p$, 總共得到 $p+1$ 個等式。合併衆式如下:

$$\begin{bmatrix}
\binom{1}{0} & & & & \\
-\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \mathbf{0} & \\
\binom{3}{0} & -\binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
(-1)^{p-1}\binom{p}{0} & (-1)^{p-2}\binom{p}{1} & (-1)^{p-3}\binom{p}{2} & \cdots\ \binom{p}{p-1} & \\
(-1)^{p}\binom{p+1}{0} & (-1)^{p-1}\binom{p+1}{1} & (-1)^{p-2}\binom{p+1}{2} & \cdots -\binom{p+1}{p-1} & \binom{p+1}{p}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}S_0(n)\\ S_1(n)\\ S_2(n)\\ \vdots \\ S_{p-1}(n)\\ S_p(n)\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}n\\ n^2\\ n^3\\ \vdots\\ n^p\\ n^{p+1}\end{bmatrix}. \tag{7}$$

我們把位於 (7) 式左邊的那個矩陣記作 $\mathbf{L}$[註5], 顯然其轉置

$$\mathbf{L}^T = \mathbf{U}. \tag{8}$$

再者, 記$[S_0(n) \quad S_1(n) \quad \cdots \quad S_p(n)]^T = \mathbf{s}$ 。於是, 可將 (7) 式簡寫爲

$$\mathbf{L}\mathbf{s} = \mathbf{n}. \tag{7'}$$

[註4] 構造矩陣。

[註5] Lower triangular matrix, 下三角陣。

第三步 抽矢 [註6]

顯而易見, $\mathbf{L}$ 的行列式 $\det\mathbf{L}=(p+1)!\neq 0$, 故 $\mathbf{L}$ 可逆。以其逆 $\mathbf{L}^{-1}$ 同時左乘 $(7')$ 式兩邊, 得

$$\mathbf{s}=\mathbf{L}^{-1}\mathbf{n}, \tag{9}$$

從而

$$S_p(n)=\mathrm{row}(\mathbf{s},p+1)=\mathrm{row}(\mathbf{L}^{-1},p+1)\ \mathbf{n}.$$ [註7]

可見, 前述 $\mathbf{a}^T=\mathrm{row}(\mathbf{L}^{-1},p+1)$。至此 (2) 式得證!

另外, 由於 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}=\mathbf{E}$ [註8], 因而

$$\mathrm{row}(\mathbf{L}^{-1},p+1)\mathbf{L}=\mathrm{row}(\mathbf{E},p+1).$$

把 $\mathrm{row}(\mathbf{L}^{-1},p+1)=\mathbf{a}^T$ 及 $\mathrm{row}(\mathbf{E},p+1)=[\underbrace{0\quad\cdots\quad 0\quad 1}_{p+1}]=\mathbf{e}^T$ 代入上式, 得

$$\mathbf{a}^T\mathbf{L}=\mathbf{e}^T. \tag{10}$$

最終, 我們有

$$\mathbf{U}\mathbf{a}\overset{(8)}{=}\mathbf{L}^T\mathbf{a}=\mathbf{L}^T(\mathbf{a}^T)^T=(\mathbf{a}^T\mathbf{L})^T\overset{(10)}{=}(\mathbf{e}^T)^T=\mathbf{e}.$$

至此 $(3')$ 式得證, 亦即 (3) 式成立!

3. 實驗

算法得以證明, 僅肯定了其正確性; 至於其實用性, 目前尚無法評價。讓我們以 $S_9(n)$ 爲試金石, 看看此算法到底靈也不靈!

值得補充的是, 如若果眞按照 (4) 式來計算 $\mathbf{U}$ 中的各個元素, 那定然使人難耐其繁, 好在二項式係數具有一條可愛的性質:

$$\binom{p}{q}=\binom{p-1}{q}+\binom{p-1}{q-1}. \tag{11}$$

其證明極易, 故不贅言。事實上, 賈憲三角正是據此而作成的 (可參閱 [3])。

[註6] 在矩陣中抽取(行/列) 向量。矢, 原義爲「箭」, 此處指「矢量」——向量的別稱。

[註7] $\mathrm{row}(\mathbf{M},r)$ 表示抽取矩陣 $\mathbf{M}$ 的第 r 行。

[註8] $\mathbf{E}=\mathrm{diag}[\underbrace{1\quad\cdots\quad 1}_{p+1}]$爲單位矩陣。

另外, 爲了便於行文, 我們引進兩個名詞:「上斜層, 下斜層」。稱呼 r 階方陣的主對角線爲第 1 上 (下) 斜層, 緊貼於第 1 上 (下) 斜層上 (下) 方的副對角線爲第 2 上 (下) 斜層, 以此類推, 直至第 r 上 (下) 斜層——方陣右上 (左下) 角的單個元素。

以下, 我們就來陳述 $S_9(n)$ 的演算流程。對照前文所給出的定理、公式及下面這個方程, 各道工序都是易於理解的。

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & -7 & 8 & -9 & 10 \\ & & 3 & -6 & 10 & -15 & 21 & -28 & 36 & -45 \\ & & & 4 & -10 & 20 & -35 & 56 & -84 & 120 \\ & & & & 5 & -15 & 35 & -70 & 126 & -210 \\ & & & & & 6 & -21 & 56 & -126 & 252 \\ & & & & & & 7 & -28 & 84 & -210 \\ & & \text{\Large 0} & & & & & 8 & -36 & 120 \\ & & & & & & & & 9 & -45 \\ & & & & & & & & & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(A) 指定冪次 $p = 9$。

(B1) 製作 $p+1$ 階方陣 $\mathbf{U}_0$, 使之符合下列要求:

- 首行的所有元素均爲 1;
- 屬於主對角線的諸元素, 從左至右依次爲 $1, 2, \cdots, p+1$;
- 主對角線上方的其餘元素, 皆等於各自的左鄰元與左上鄰元之和; [註9]
- 主對角線下方的所有元素均爲 0。

(B2) 在 $\mathbf{U}_0$ 中, 將序號爲偶數的「上斜層」全部冠以負號, 於是生成方陣 $\mathbf{U}$。

(C) 採用「逆向代入法」(backward substitution) 求解方程 $\mathbf{Ua} = \mathbf{e}$, [註10] 從而解出向量 $\mathbf{a}$ 。

(D) 以 n 的降冪爲序, 展示 $S_p(n) = \mathbf{a}^T\mathbf{n}$。

上述流程完全是機械化的, 因而可以利用數學軟體來實現。筆者所用的是著名的 Maple 8, 該軟體具有強大的符號運算功能。下面, 請您瀏覽這段 Maple 程式, 它結構清晰, 一目了然。

[註9] 依據(11) 式。

[註10] 因爲 $\mathbf{U}$ 是行-階梯形矩陣。

```
> with(LinearAlgebra):
> p:=9:
> r:=p+1:
> m:=Vector(r):
> U:=Matrix(r,shape=triangular):
> for j from 1 to r do
>   m[j]:=n^j:
>   U[1,j]:=1:
>   U[j,j]:=j:
> end do:
> for j from 3 to r do
>   for i from 2 to j-1 do
>     U[i,j]:=U[i,j-1]+U[i-1,j-1]:
>   end do:
> end do:
> for j from 1 to r do
>   for i from 1 to j do
>     U[i,j]:=(-1)^(j-i)*U[i,j]:
>   end do:
> end do:
> E:=IdentityMatrix(r):
> e:=Column(E,r):
> a:=BackwardSubstitute(U,e):
> S:=DotProduct(a,m):
> S:=sort(S);
```

激活 Maple 8, 在其工作窗口中輸入並執行以上程式, 一眨眼, 聰明的 Maple 便算出了下述結果。

$$S := \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2$$

即使將源程式的第二行改爲 p := 500 : , 且以低檔電腦執行之, 耗時也不過20秒而已。算法如此快速, 其實用性毋庸置疑!

4. 猜想

猜想, 起源於觀察。

欲全面觀察各次冪和, 最佳途徑莫過於求出 (9) 式中之 $\mathbf{L}^{-1}$, 因爲它的第 $q+1$ 行給出了 $S_q(n)$ 的係數。下面, 我們就用 Maple 來計算14階的 $\mathbf{L}^{-1}$。爲此, 將源程式的第二行改成 p := 13 : , 並將其末尾四行替換成左下方的兩行 [註11]。

```
> L:=Transpose(U):
> L1:=ForwardSubstitute(L,E);
```

$$L1 := \begin{bmatrix} \text{14} \times \text{14 Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

[註11] 在程式中以 L1 表示 $\mathbf{L}^{-1}$。

執行修改後的程式, 輸出如右上方所示——狡猾的 Maple 不直接顯示超過10階的矩陣, 解決辦法是分塊顯示。例如, 指令 SubMatrix(L1, 8..14, 1..7); 可用來顯示 *L1* 左下角的 7×7 子塊, 餘者仿此。人工拼接這些子塊, 得到

$$\mathbf{L}^{-1}=\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 &&&&&&&&&&&&& \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} &&&&&&&&&&&& \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} &&&&&&&&&&& \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} &&&&&&& \mathbf{0} &&& \\
-\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} &&&&&&&&& \\
0 & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{5}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} &&&&&&&& \\
\frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} &&&&&&& \\
\hline
0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{7}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} &&&&&& \\
-\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} &&&&& \\
0 & -\frac{3}{20} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} &&&& \\
\frac{5}{66} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{11} &&& \\
0 & \frac{5}{12} & 0 & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{11}{6} & 0 & -\frac{11}{8} & 0 & \frac{11}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} && \\
-\frac{691}{2730} & 0 & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{33}{10} & 0 & \frac{22}{7} & 0 & -\frac{11}{6} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{13} & \\
0 & -\frac{691}{420} & 0 & \frac{65}{12} & 0 & -\frac{143}{20} & 0 & \frac{143}{28} & 0 & -\frac{143}{60} & 0 & \frac{13}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{14}
\end{array}\right]$$

不難發現, 在 $\mathbf{L}^{-1}$ 中:

(i) 第1下斜層 (即主對角線) 的第 r 個元素爲 $\dfrac{1}{r}$ $(r=1,2,\cdots,14)$;

(ii) 第2下斜層的所有元素皆爲 $\dfrac{1}{2}$;

(iii) 第3–14下斜層的符號特徵可以列表如下——Eureka! 週期性!

下斜層	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th	11th	12th	13th	14th
符號	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0

掌握了以上三條線索, 順藤摸瓜, 筆者提出下述猜想——

猜想: 對於任意 $p\in\mathbb{N}$, 冪和多項式

$$S_p(n)=a_{p+1}n^{p+1}+a_pn^p+\cdots+a_1n$$

之係數滿足下列條件:

$$a_{p+1}=\frac{1}{p+1},\qquad a_p=\frac{1}{2}; \tag{12a}$$

$$\operatorname{sgn} a_{p-q} = \sin\frac{q\pi}{2} \qquad (q = 1, 2, \cdots, p-1).^{[註12]} \tag{12b}$$

事實上, (12a) 式是容易證明的, 祇需解出方程 (3) 底端的兩行

$$\begin{cases} \binom{p}{p-1}a_p - \binom{p+1}{p-1}a_{p+1} = 0 \\ \qquad\qquad\quad \binom{p+1}{p}a_{p+1} = 1 \end{cases}$$

即可。至於 (12b) 式, 就留與諸位研究吧。

5. 結語

本文所介紹的冪和算法, 屬於 H. J. Schultz [1]。他在推測 [註13] (2) 式成立的基礎上, 用「未定係數法」導出了方程 (3)。無疑, 如此推導存在著漏洞。儘管該漏洞可以被彌補: 用「縮和法 + 數學歸納法」, 證明 (2) 式並非很困難 (可參閱 [2])——但是打了補丁的方案畢竟「眞而不美」。

創作一款「眞而美」的證明! 這, 便是筆者的初衷。之後, 筆者收穫了稱心如意的證明, 進而編程解決了冪和多項式的係數計算問題。不料, 卻又引出了更爲複雜的係數結構問題, 可謂「庸人自擾」。然而,「探索無止境」, 這不恰是數學的魅力所在嘛!

参考文獻

1. H. J. Schultz, The sum of the kth powers of the first n integers, *American Mathematical Monthly*, 87(1980), 478–481.
2. R. W. Owens, Sums of powers of integers, *Mathematics Magazine*, 65(1992), 38–40.
3. R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

—本文作者畢業於江蘇省南京航空航天大學—

[註12] $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & 若\ x<0; \\ 0, & 若\ x=0; \\ 1, & 若\ x>0. \end{cases}$ 稱爲「符號函數」(signum function)。

[註13] 原文爲“we make the reasonable guess that”—我們有理由猜測。