數學傳播 31卷4期, pp. 78-80

以古典幾何研究一高考試題

石長偉

2005年江西省高考理科壓軸題: 設拋物線 $\Gamma : y = x^2$ 的焦點爲 F, 動點 P 在直線 $l : x-y-2=0$ 上運動, 過點 P 作拋物線的兩條切線 PA 、PB, 且與拋物線 Γ 分別相切於 A 、B 兩點, (1) 求 ΔAPB 的重心 G 的軌跡方程; (2) 證明 $\angle PFA = \angle PFB$。

標準答案與好多雜誌提供的都是純粹的解析法, 因爲解析法本身運算麻煩, 爲了簡化思維, 所以筆者對此題進行了古典幾何法的深入探索, 直接將此題的結論推廣到圓錐曲線中, 並加強了推廣命題。

1. 預備知識

1.1 若 (如圖1.1) 圓錐曲線 Γ 的割線 AB 延長交相應於焦點 F 的準線 l 於 C, AF 交 Γ 於 D, 則 CF 平分 $\angle AFB$ 的外角 $\angle BFD$

證明: 分別過 A 、B 作 $AA' \perp l$, $BB' \perp l$, 知 $BB' : AA' = BC : AC$; 根據圓錐曲線統一定義知 $AF = e \cdot AA'$, $BF = e \cdot BB'$; 所以 $AF : BF = AC : BC$, 由三角形外角平分線性質定理知 CF 平分 $\angle AFB$ 的外角 $\angle BFD$。

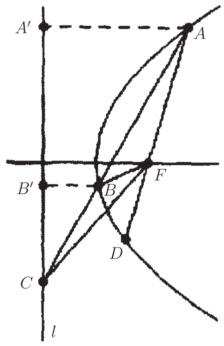

圖1.1

1.2 若 (如圖1.2) 圓錐曲線 Γ 的切線 PQ 交相應於焦點 F 的準線 l 於 Q, 則 $\angle PFQ$ 爲直角。

證明: 根據切線的定義, 當圖1.1中的 B 點無限接近至與 A 重合時, 割線變爲切線, 由1.1知 $\angle PFQ$ 爲直角。

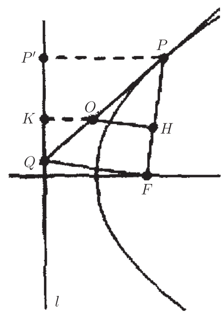

圖1.2

1.3 若 (如圖1.2) 圓錐曲線 Γ 的切線 PQ 交相應於焦點 F 的準線 l 於 Q, O 爲 PQ 上的任意一點, 且 $OK\perp l$, $OH\perp PF$, 則 $HF=e\cdot OK$。

證明: 由1.2知 $OF\perp FP$, $\because OH\perp FP$, $\therefore FH:FP=QO:QP$, 過點 P 作 $PP'\perp l$, $\because OK\perp l$, $\therefore QO:QP=OK:PP'$, 即 $OK:PP'=FH:FP$, 又據圓錐曲線統一定義知 $PF=e\cdot PP'$, 所以 $HF=e\cdot OK$。

2. 命題推廣

2.1 若 (如圖2.1) O 爲焦點爲 F 的圓錐曲線 Γ 外的一點, 過點 O 作 Γ 的兩條切線 OA 、OB, 切點分別是 A 、B, 且 A 、B 點在 Γ 的同支上, 則 $\angle OFA=\angle OFB$ ("同支"是指橢圓、拋物線及雙曲線的一支)。

證明: 過 O 點作 $OH_1\perp AF$, $OH_2\perp BF$, $OK\perp l$, 由1.3知 $OK\cdot e=H_1F$, $OK\cdot e=H_2F$, 故 $H_1F=H_2F$。在 $Rt\Delta OH_1F$ 與 $Rt\Delta OH_2F$ 中, OF 公用, $H_1F=H_2F$, 所以 $\Delta OH_1F\cong\Delta OH_2F$, $\therefore \angle OFA=\angle OFB$。

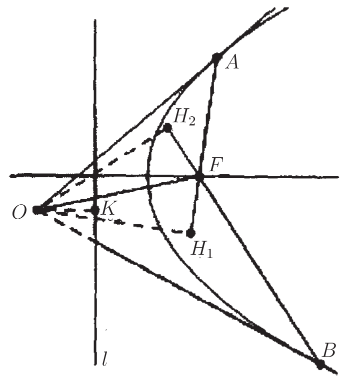

圖2.1

2.2 若 (如圖2.2) O 爲焦點爲 F 的圓錐曲線 Γ 外的一點, 過點 O 作 Γ 的兩條切線 OA 、OB, 切點分別爲 A 、B, 且 A 、B 點在 Γ 的異支上, 則 $\angle OFA+\angle OFB=\pi$ ("異支"是專指雙曲線的兩支)。

證明: 過 O 點作 $OH_1\perp AF$, $OH_2\perp BF$, $OK\perp l$, 由1.3知 $OK\cdot e=H_1F$, $OI\cdot e=H_2F$, 故 $H_1F=H_2F$。在 $Rt\Delta OH_1F$ 與 $Rt\Delta OH_2F$ 中, OF 公用, $H_1F=H_2F$, 所以 $\Delta OH_1F\cong\Delta OH_2F$, $\therefore \angle OFH_1=\angle OFH_2$。又 $\because \angle AFH_2+\angle H_2FO+\angle OFH_1=\pi$, $\therefore \angle OFA+\angle OFB=\pi$。

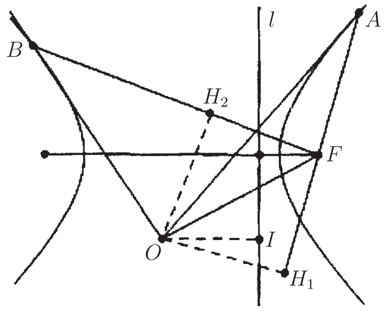

圖2.2

3. 命題加強

若 O 爲焦點爲 F 的圓錐曲線 Γ 外的一點, 過點 O 作 Γ 的兩條切線 OA 、OB, 切點 A 、B 在 Γ的同支上, 延長 AB 交準線於 K, 延長 BF 至 Q, ①當切點 A, B 在對稱軸的異側

時 (如圖3.1); ②當切點 A, B 在對稱軸的同側時 (如圖3.2); 則 $\angle OFK$ 爲直角 (“同支”是指橢圓、拋物線及雙曲線的一支)。

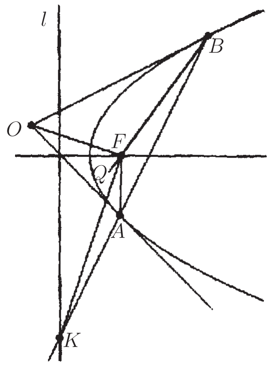

圖3.1

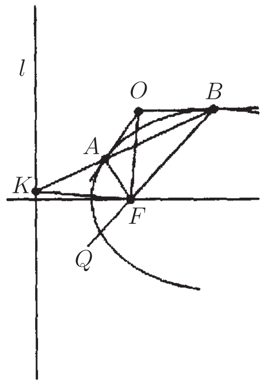

圖3.2

證明: ①由1.1知 $\angle QFK = \angle AFK$, 又由2.1知 $\angle BFO = \angle AFO$, 但是 $\angle AFO = \angle OFQ + 2\angle QFK$, 並且 $\angle OFQ + \angle BFO = \pi$, 故 $2(\angle OFQ + \angle QFK) = \pi$, 所以 $\angle OFK$ 爲直角。

②由1.1知: $\angle AFK = \angle QFK$, 又由 $\angle AFO = \angle BFO$, 因爲 $\angle QFK + \angle AFK + \angle AFO + \angle BFO = \pi$, 即 $2(\angle AFK + \angle AFO) = \pi$, 所以 $\angle OFK$ 爲直角。

圓錐曲線問題的純幾何證法與解析法相較而言, 純幾何法顯得優越多, 讀者不妨在解決問題時, 多一法考慮, 必有異種收穫。

—本文作者任教於陝西省西安東方中學—