數學傳播 31卷4期, pp. 74-77

假幣問題及其解法

文耀光

1. 引言

所謂「假幣問題」(又稱「12錢幣問題」), 是指有12枚錢幣, 其中有一枚是假幣, 它與真幣的形狀相同, 但重量不相同。如果容許以天平稱量3次, 但不可使用砝碼, 怎樣可判別出哪一枚才是假幣? 並確定它比真幣較重還是較輕?

這是一個經典的數學謎題, 曾在 Beasley(1990) 及趙文敏 (1995) 所著的趣味數學書中介紹過, 其本質與 Bundy(1996) 所討論的 Odd Ball Problem 屬同類問題, 但三人的解法不一樣。本文將介紹另一種簡單的解法, 讀者只須對3進制有基本的認識便可以理解。

2. 解法及其原理

要找出那一枚是假幣, 可採用以下的步驟進行:

1. 首先, 以整數1至12爲每個錢幣編上一個互不相同的號碼。
2. 然後, 把每個編號化成3進制, 並以 -1, 0 或 1表示每個位出現的數值。如下所示:

$$\begin{array}{ll} 1 = (0,0,1)_3 & 7 = (1,-1,1)_3 \\ 2 = (0,1,-1)_3 & 8 = (1,0,-1)_3 \\ 3 = (0,1,0)_3 & 9 = (1,0,0)_3 \\ 4 = (0,1,1)_3 & 10 = (1,0,1)_3 \\ 5 = (1,-1,-1)_3 & 11 = (1,1,-1)_3 \\ 6 = (1,-1,0)_3 & 12 = (1,1,0)_3 \end{array}$$

3. 接著, 把這些3進制的數值, 從右至左, 看成是每次秤量時擺放在天平上的位置: 1表示放置於左邊, -1 表示放置於右邊, 而0表示兩邊都不放置。那麼, 可以初步得出錢幣的擺放位置如下:

秤量次序	置於左邊的錢幣	置於右邊的錢幣
第三次	5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12	
第二次	2, 3, 4, 11, 12	5, 6, 7
第一次	1, 4, 7, 10	2, 5, 8, 11

4. 由於此時在天平的左、右所放置的錢幣數目不相同, 所以需要把某些錢幣的位置變動一下。怎樣進行呢? 我們可以把整數1至12的3進制表示法以直列的方式記錄, 觀察每一橫行中1與 -1 的數目是否相同, 然後作一些適當的變動。如下表所示:

錢幣	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
高行	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
中行	0	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0	1	1
低行	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0

可以看到, 中行和高行中出現的1過多。我們可以選擇把某些直行中的數字的正、負號由正變負, 或由負變正, 使得在高、中、低行中出現的 1 與 -1 的數目相等。譬如, 如果把直行 7, 9, 11, 12 中的數字的正、負號改變, 則表中的數值會變成:

錢幣	1	2	3	4	5	6	7*	8	9*	10	11*	12*
高行	0	0	0	0	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
中行	0	1	1	1	-1	-1	1	0	0	0	-1	-1
低行	1	-1	0	1	-1	0	-1	-1	0	1	1	0

(註: 有 * 號的數字是指曾被改動過正、負的數字。)

此時, 每一橫行中的1與 -1 的數目都各有4個[1], 從而讓我們確定了每個錢幣最終的擺放位置如下:

秤量次序	置於左邊的錢幣	置於右邊的錢幣
第三次	5, 6, 8, 10	7*, 9*, 11*, 12*
第二次	2, 3, 4, 7*	5, 6, 11*, 12*
第一次	1, 4, 10, 11*	2, 5, 7*, 8

由於在每次秤量中, 天平的狀態只有三種, 分別是「左重」(L)、「右重」(R) 或「平衡」(#), 而秤量的結果一定不會出現「三次皆平衡」、「三次皆左重」或「三次皆右重」[2] 的情況, 所以不同秤量結果的數目是: $3 \times 3 \times 3 - 3 = 24$。如果我們把 L、R 與 # 分別跟1, -1 與 0 作「一一對應」的話, 那麼透過3進制的表示, 我們便可以知道何者是假幣, 以及知道它比眞幣較輕還是較重。爲甚麼呢? 我們不妨用一個簡單的例子加以說明: 假設錢幣6是一個假幣, 而且它比眞幣較重。由於它在秤量時的罷放位置是以 $(1, -1, 0)$ 來表示, 故其稱量結果將會是 (L, R, #)。反過來說, 如果稱量的結果是 (L, R, #), 它的3進制表示 $(1, -1, 0)$ 會唯一地[3] 確定了假幣的

[1] 若改動其他數字的話, 也可以產生相同效果。例如, 把3, 6, 8, 10, 12都改成負數的話, 則每一橫行中出現的1與 -1 的數目也會相等, 讀者不妨驗證一下。

[2] 由於存在有一假幣, 故不可能出現「三次平衡」。另外, 由於沒有任何一個錢幣在每次秤量中都置於同一邊 (參看錢幣的擺放位置), 所以亦不會出現「三次左重」或「三次右重」的情況。

[3] 因爲每個錢幣的擺放位置之3進制表示各不相同, 故此種對應唯一的。

編號是6, 而且由於天秤下墜的方向與它在天秤出現的位置是一致的, 所以知道它比眞幣較重。另外, 如果錢幣6是一個假幣, 而它比眞幣較輕。因爲它在秤量時的罷放位置是以 $(1,-1,0)$ 來表示, 故其稱量結果將會是 (R, L, $\#$)。反過來說, 如果稱量的結果是 (R, L, $\#$), 它的3進制表示 $(-1,1,0)$[4] 會唯一地確定了假幣的編號是6, 而且由於天秤下墜的方向與它在天秤出現的位置是相反的, 所以知道它比眞幣較輕。

應用類似上述的分析, 我們可以對所有可能出現的結果作以下的結論:

	天秤下墜的方向			天秤下墜方向的3進制表示	天秤下墜方向的10進制表示	結論
	第三次	第二次	第一次			
1	#	#	L	(0, 0, 1)	1	假幣是1號, 它比眞幣較重。
2	#	#	R	(0, 0, -1)	-1	假幣是1號, 它比眞幣較輕。
3	#	L	R	(0, 1, -1)	2	假幣是2號, 它比眞幣較重。
4	#	R	L	(0, -1, 1)	-2	假幣是2號, 它比眞幣較輕。
5	#	L	#	(0, 1, 0)	3	假幣是3號, 它比眞幣較重。
6	#	R	#	(0, -1, 0)	-3	假幣是3號, 它比眞幣較輕。
7	#	L	L	(0, 1, 1)	4	假幣是4號, 它比眞幣較重。
8	#	R	R	(0, -1, -1)	-4	假幣是4號, 它比眞幣較輕。
9	L	R	R	(1, -1, -1)	5	假幣是5號, 它比眞幣較重。
10	R	L	L	(-1, 1, 1)	-5	假幣是5號, 它比眞幣較輕。
11	L	R	#	(1, -1, 0)	6	假幣是6號, 它比眞幣較重。
12	R	L	#	(-1, 1, 0)	-6	假幣是6號, 它比眞幣較輕。
13	R	L	R	(-1, 1, -1)	-7	假幣是7號, 它比眞幣較重。
14	L	R	L	(1, -1, 1)	7	假幣是7號, 它比眞幣較輕。
15	L	#	R	(1, 0, -1)	8	假幣是8號, 它比眞幣較重。
16	R	#	L	(-1, 0, 1)	-8	假幣是8號, 它比眞幣較輕。
17	R	#	#	(-1, 0, 0)	-9	假幣是9號, 它比眞幣較重。
18	L	#	#	(1, 0, 0)	9	假幣是9號, 它比眞幣較輕。
19	L	#	L	(1, 0, 1)	10	假幣是10號, 它比眞幣較重。
20	R	#	R	(-1, 0, -1)	-10	假幣是10號, 它比眞幣較輕。
21	R	R	L	(-1, -1, 1)	-11	假幣是11號, 它比眞幣較重。
22	L	L	R	(1, 1, -1)	11	假幣是11號, 它比眞幣較輕。
23	R	R	#	(-1, -1, 0)	-12	假幣是12號, 它比眞幣較重。
24	L	L	#	(1, 1, 0)	12	假幣是12號, 它比眞幣較輕。

由這個表可見, 如果把秤量結果的3進制表示化成10進之後, 它的絕對值便是假幣的編號。另外, 如果所得的10進數是 1, 2, 3, 4, 5, 6, -7, 8, -9, 10, -11 或 -12 的話, 是代表假幣比眞幣較重。反之, 如果所得出的10進數是 -1, -2, -3, -4, -5, -6, 7, -8, 9, -10, 11

[4] 注意: $(-1,1,0)=-(1,-1,0)$。

或 12 的話, 是代表假幣比眞幣較輕。換言之, 秤量結果的10進制表示, 除了是 ± 7, ± 9, ± 11 及 ± 12 是例外, 其他所得數值的正、負號正好對應著假幣是「較重」或「較輕」的情況。有了這種認知, 會有助於我們快速和正確地判斷出何者是假幣, 以及知道它比眞幣較輕還是較重, 而不需要利用上表去查看結果。以下是一些具體的示例:

例一: 假設秤量所得的結果是: 第一次是左重、第二次是右重, 而第三次是平衡。它對應的3進數是 $(0,-1,1)_3 = 0\times 9+(-1)\times 3+1 = -2$。由此可知錢幣2是假幣, 它比眞幣較輕。

例二: 假設秤量所得的結果是: 第一次是右重、第二次是平衡, 而第三次是左重。它對應的3進數是 $(1,0,-1)_3 = 1\times 9+0\times 3-1 = 8$。由此可知錢幣8是假幣, 它比眞幣較重。

例三: 假設秤量所得的結果是: 第一次是左重、第二次是右重, 而第三次是左重。它對應的3進數是 $(1,-1,1)_3 = 1\times 9+(-1)\times 3+1 = 7$。由此可知錢幣7是假幣, 它比眞幣較輕。

3. 結語及其他問題

總括而言, 本文所介紹的方法, 是運用了整數的3進制表示的唯一性。解法簡單, 而且其思維方式可以應用到其他類似的數學問題上去。譬如, 以下的兩個問題, 都可以運用3進制的方法求解[5], 讀者不妨動手一試:

問題一: 如果只可以用4塊不同重量的砝碼, 去秤出由1至40磅中各不同的整數重量, 問該4塊砝碼的重量應分別是多少?

問題二: 有1克, 3克, 9克, 27克, 81克和243克的砝碼各一個。如果把一件重200克的物件放置於一個天平的右邊, 如何把上述砝碼置於天平之上, 才可以令天平的左、右平衡?

參考文獻

1. J. Beasley (1990), The Mathematics of Games. Oxford University Press.
2. B. Bundy (1996), The Odd Ball Problem, *Mathematical Spectrum*, 26, 14-15.
3. 趙文敏 (1995), 寓數學於遊戲, 第一輯, 九章出版社。

—本文作者現任教於香港教育學院數社科技學系—

[5] 兩題的答案如下:
問題一: 1磅, 3磅, 9磅, 27磅。
問題二: 將1克與81克的砝碼置於右邊, 其餘的置於左邊。