數學傳播 31卷4期, pp. 60-73

# 我是這樣上一道數學習題的

## ——一次數學探究性學習活動的嘗試

田彥武

新一輪課程改革在中國大陸悄然興起, 全國上下的教育界爲之關注不少, 國家教育部制定出了一系列的文件和條規, 其中最爲核心和重要的是《普通高中數學課程標準 (實驗稿)》(以下簡稱《標準》), 因爲所有數學教材的編寫和課堂教學及評價等都是圍繞這裏面的觀點進行的。可以說和以往的教學改革相比, 這次是具有深遠意義的。特別是在這其中提出了很多新的教學理念, 如《標準》提倡注重提高學生的數學思維能力, 並指出: "人們在學習數學和運用數學解決問題時, 不斷地經歷直觀感知、觀察發現、歸納模擬、空間想像、抽象概括、符號表示、運算求解、數據處理、演繹證明、反思與建構等思維過程。這些過程是數學思維能力的具體體現, 有助於學生對客觀事物中蘊涵的數學模式進行思考和作出判斷。" 因此, 依《標準》編寫的《普通高中課程標準實驗教科書・數學①～⑤》(必修 A 版) 就特別注重了這一點, 尤其是在編寫部分例習題時, 一方面加強對數學基礎知識的訓練, 另一方面爲拓展學生的思維空間留有了很大的餘地。而教師在處理這些題目時不能就題論題, 應該正確引導學生認眞挖掘題目的內涵和外延, 使學生認識到教材編寫這道題目的意圖, 這不僅不斷完善學生的數學知識結構和認知結構, 而且能激發學生對教材題目研究的興趣, 這對培養學生的探究能力、創新能力和實踐能力是大有裨益的。關於這一點, 筆者曾做過一次嘗試, 見文 [1]。本文筆者以數學④第153頁習題3.1B 組題第3題爲例又進行了一次新的探究性學習活動的嘗試 (共教學了三節課), 今撰文想通過具有國際影響的數學雜誌《數學傳播》來和大家交流, 特別是和臺灣的同行們交流, 如有不當之處, 敬請各位老師批評指正。

教學班級小檔案:
班級: 高一 (11) 班
人數: 共56人, 其中男生31人, 女生26人
中考成績 (同年級名次): 12個班居第九位
高一成績 (同年級名次): 12個班居第二位

習題: 觀察以下各等式:

$$\begin{aligned}\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ &= \frac{3}{4},\\ \sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ &= \frac{3}{4},\\ \sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

分析上述各式的共同特點, 寫出能反映一般規律的等式, 並對等式的正確性作出證明。

顯然, 本題是開放性問題, 思考過程只要抓住從角, 三角函數種類, 式子結構形式三個方面尋找共同特點, 學生不難得出反映一般規律的等式, 這無論對基礎好的還是基礎稍微薄弱的學生來說都會有不同結果的。以下是筆者在批改作業時發現學生的不同結果和不同證明方法:

# 1. 反映一般規律的等式的探索

## 1.1. 幾乎全班學生的結果 (91%):

$$\sin^2\alpha + \cos^2(\alpha+30^\circ) + \sin\alpha\cos(\alpha+30^\circ) = \frac{3}{4}; \tag{1}$$

$$\sin^2(\alpha-30^\circ) + \cos^2\alpha + \sin(\alpha-30^\circ)\cos\alpha = \frac{3}{4}. \tag{2}$$

學生在觀察這三個式子時很快會發現餘弦 $\cos\square$ 中的角度比正弦 $\sin\triangle$ 中的角度大 $30^\circ$, 從而將其中之一的角度看成 $\alpha$, 那麼另一個就馬上得出。這兩個式子可以說幾乎每個學生都寫出了, 學生眞正經歷了直觀感知、觀察發現、歸納類比、抽象概括、符號表示等幾個思維過程, 這對培養學生的抽象概括和歸納能力是大有幫助的。另有個別學生寫出了比(1)、(2) 更一般的式子:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin\alpha\cos\beta = \frac{3}{4},\ \text{其中 } \beta-\alpha = 30^\circ. \tag{3}$$

儘管思考角度一樣, 但這比 (1)、(2) 來說更具有高度的抽象和概括能力, 寫出了含有兩個字母的等式, 說明學生的思考空間更大一些。

## 1.2. 少數學生的結果 (5%):

$$\sin^2(\alpha-15^\circ) + \cos^2(\alpha+15^\circ) + \sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ) = \frac{3}{4} \tag{4}$$

這些學生另辟溪徑, 先取兩角的平均值 $\dfrac{\square+\triangle}{2}$, 再和兩角對比分析得出結果, 儘管沒有上述三個結果來的自然, 但反映出這部分學生思維的靈活性和對問題的洞察力, 他們不僅能看到問題的表面現象, 而且能揭示出問題的本質, 具有很大的創新特點。

### 1.3. 引導學生得出一些新結果:

上述四個等式都受到題目要求的限制, 即“分析上述各式的共同特點”, 亦即學生已固定了式子中三角函數的種類, 只分析角度, 這樣的題目要求在很大程度上會限制一些好同學的思維, 失去了一次訓練學生發散思維的機會。爲此, 我在第二天講評這個題目時, 先給出了與此同結構的兩道試題:

①(1991年全國高中數學聯賽試題) 求值: $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$;

②(1995年全國高考試題) 求值: $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ$.

學生經上述一般規律的結果馬上得出這兩個題目的答案都是 $\frac{3}{4}$, 且② 就是書上題目三個等式的第二個, 學生正處於激情高漲時, 我又出示了1987年江蘇青少年夏令營選拔賽的一道試題:

③求值: $\cos^2 47^\circ+\cos^2 73^\circ+\cos 47^\circ\cos 73^\circ$。

學生經過少許思考後, 變換③得其等價式④: $\sin^2 43^\circ+\cos^2 73^\circ+\sin 43^\circ\cos 73^\circ$。有學生馬上高喊: “一樣, 一樣, 答案還是 $\frac{3}{4}$ ! ”, 也有學生在下面議論: “這命題人也眞是 ...” 等等。但就在此時我立即提出問題: 形如③這樣的式子難道我們都非要變成課本這樣的式子再求值嗎?

有經驗的學生聽到我這樣的提問, 馬上小聲說: “田老師旣然這樣說, 肯定不是, 肯定還有其他等式”。這時學生都紛紛觀察 ③式的結構, 得出如下式子:

$$\cos^2\alpha+\cos^2(120^\circ-\alpha)+\cos\alpha\cos(120^\circ-\alpha)=\frac{3}{4}; \tag{5}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos\alpha\cos\beta=\frac{3}{4},\ \text{其中}\ \alpha+\beta=120^\circ. \tag{6}$$

依 (4) 的經驗, 也有學生得出:

$$\cos^2(60^\circ-\alpha)+\cos^2(60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{3}{4}. \tag{7}$$

根據誘導公式, 有個別學生還得出如下結果:

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha-60^\circ)-\cos\alpha\cos(\alpha-60^\circ)=\frac{3}{4}; \tag{8}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+60^\circ)-\cos\alpha\cos(\alpha+60^\circ)=\frac{3}{4}. \tag{9}$$

模擬餘弦中的 (5)∼(9), 學生得出正弦的一些結果:

$$\sin^2\alpha+\sin^2(60^\circ-\alpha)+\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)=\frac{3}{4}; \tag{10}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{4},\ \text{其中}\ \alpha+\beta=60^\circ; \tag{11}$$

$$\sin^2(30^\circ-\alpha)+\sin^2(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)=\frac{3}{4}; \tag{12}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+60^\circ)-\sin\alpha\sin(\alpha+60^\circ)=\frac{3}{4}; \tag{13}$$

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha-60^\circ)-\sin\alpha\sin(\alpha-60^\circ)=\frac{3}{4}. \tag{14}$$

事已至此, 學生都沈浸在成功的喜悅中, 連經常睡覺的一個學生都興奮地連連叫好, 我趁熱打鐵, 因勢利導, 再次給出了如下一道試題:

⑤(1992年全國高考試題) 求值: $\sin^2 20^\circ+\cos^2 80^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ\cos 80^\circ$。

學生通過對比後傻眼了, 這究竟怎麼回事? 幾個基礎好的同學通過計算很快得出結果不是 $\frac{3}{4}$ 了, 而是 $\frac{1}{4}$, 我在肯定學生得出的結果的同時, 又提出問題: 看來還有比我們上述得出的結果更一般的結果, 誰要是得出, 那就是誰的專利了。正說著, 下課鈴聲響了, 我把它佈置成一道課外探究題, 第二天上課前有學生交上來了, 其中典型的有:

### 1.4. 更一般的結果:

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta); \tag{15}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2(\alpha+\beta); \tag{16}$$

$$\sin^2(\alpha-\beta)+\sin^2\beta+2\sin(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha; \tag{17}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\beta. \tag{18}$$

當然, 除了上述結果之外, 還會有許多優美的結果。希望老師和同學們繼續探索。“機靈的猜測, 豐富的假設和大膽迅速地做出試驗性結論, 這些都是從事任何一項工作的思想家常用的方法”(數學教育家布魯納語)。《新課標》在實施建議中指出: “改善教與學的方式, 使學生主動地學習。. . . 在高中數學教學中, 教師的講授仍然是重要的教學方式之一, 但要注意的是必須關注學生的主體參與, 師生互動。. . . 教學中, 應鼓勵學生積極參與教學活動, 包括思維的參與和行爲的參與。既要有教師的講授和指導, 也有學生的自主探索與合作交流。教師要創設適當的問題情景, 鼓勵學生大膽地猜想, 鼓勵學生發現數學的規律和問題解決的途徑, 使他們經歷知識形成的過程。” 相信自己的學生就等於相信自己的教學, 每個學生都會做出老師意想不到的數學結果。

“在數學中, 一個複雜問題的簡單解法, 一個對稱的式子, 一個優美的圖形, 一個和諧的結構, 一個奇異的念頭, 都會使你沈浸在數學美的海洋中。當你從多角度、多層次、多方位來審視

數學問題時, 你會因爲數學世界的簡潔、對稱、和諧和奇異而讚歎不已; 你會因爲數學的如此之美而如飲醇珍美酒; 你也會因此而陶醉在數學美之中。” 筆者就上述各等式結構的對稱美與數、式的和諧美以及最後結果出奇制勝的奇異美, 我又展開了一次大膽的嘗試, 就等式 $\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \dfrac{3}{4}$ 的證明與學生進行了一番探究, 收到很好的效果。

## 2. 各種各樣的證明方法及其它

### 2.1. 學生想到的證明方法:

分析1(化角): 式子左端 $= \sin^2 20^\circ + \cos^2(30^\circ + 20^\circ) + \sin 20^\circ \cos(30^\circ + 20^\circ)$
$= \sin^2 20^\circ + (\cos 30^\circ \cos 20^\circ - \sin 30^\circ \sin 20^\circ)^2 + \sin 20^\circ(\cos 30^\circ \cos 20^\circ - \sin 30^\circ \sin 20^\circ)$
$= \sin^2 20^\circ + \dfrac{3}{4}\cos^2 20^\circ + \dfrac{1}{4}\sin^2 20^\circ - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \cos 20^\circ + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \cos 20^\circ - \dfrac{1}{2}\sin^2 20^\circ$
$= \dfrac{3}{4}\sin^2 20^\circ + \dfrac{3}{4}\cos^2 20^\circ = \dfrac{3}{4}.$

這是學生普遍想到而且都能做下來的一種方法, 也有的將 $\sin 20^\circ$ 寫成 $\sin(50^\circ - 30^\circ)$。

分析2(配方法): 很多學生由已知的式子很容易想到配方法, 得出式子左端 $= (\sin 20^\circ + \cos 50^\circ)^2 - \sin 20^\circ \cos 50^\circ$, 到了這裏就再也無法進行下去。這時我引導學生利用教材第155頁的例2和第157頁的練習2(和差化積與積化和差公式) 及第154頁的式子①和②(降次公式) 得到如下證法:

$$\begin{aligned}
\text{式子左端} &= (\sin 20^\circ + \cos 50^\circ)^2 - \sin 20^\circ \cos 50^\circ \\
&= (\sin 20^\circ + \cos 40^\circ)^2 - \sin 20^\circ \cos 40^\circ \\
&= (2\sin 30^\circ \cos 10^\circ)^2 - \frac{1}{2}(\sin 70^\circ - \sin 30^\circ) \\
&= \cos^2 10^\circ - \frac{1}{2}\cos 20^\circ + \frac{1}{4} = \cos^2 10^\circ - \frac{1}{2}(\cos^2 10^\circ - 1) + \frac{1}{4} \\
&= \cos^2 10^\circ - \cos^2 10^\circ + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

這是學生由 $a^2 \pm ab + b^2 = (a \pm b)^2 \mp ab$ 想到的結果。另有個別學生由 $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$ 得到如下解法:

分析3(利用立方差公式和三倍角公式)

式子左端 $= \dfrac{\sin^3 20^\circ - \cos^3 50^\circ}{\sin 20^\circ - \cos 50^\circ}$, 此時學生又無法解答, 我引導學生利用剛剛做過的第153頁習題3.1B 組題第1題的結果, 有

$$\text{上式} = \frac{\frac{1}{4}(3\sin 20^\circ - \sin 60^\circ) - \frac{1}{4}(3\cos 50^\circ + \cos 150^\circ)}{\sin 20^\circ - \cos 50^\circ} = \frac{\frac{3}{4}(\sin 20^\circ - \cos 50^\circ)}{\sin 20^\circ - \cos 50^\circ} = \frac{3}{4}.$$

這時, 教室裏一片沸騰, 學生因這些方法的奇特而讚歎不已, 有些學生趕緊拿出課堂上常用的小紙片將這些方法一一記了下來並貼在書的相應位置。此時, 我又提出問題: 根據上面我們所用的一些公式, 本題還有沒有其他的直接解法?

教室裏唧唧喳喳, 七言八語的, 一會兒突然有一個學生站起來說: “老師, 直接用降次公式行不行?”

我立即做了鼓勵, 並和大家一起沿這個思路往下解:

分析 4(降次消元)

$$\begin{aligned}\text{式子左端} &= \frac{1-\cos 40^\circ}{2}+\frac{1+\cos 100^\circ}{2}+\frac{1}{2}(\sin 70^\circ-\sin 30^\circ)\\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 100^\circ-\cos 40^\circ+\sin 70^\circ)=\cdots=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

## 2.2. 一個女學生大膽的猜想:

我正準備引導學生往下分析另一些證法, 突然一個女生 (很少在課堂上回答問題) 嘴裏念叨: “怎麼括弧裏的結果是0呢?” “你剛才說什麼?” 我用和藹的口氣問她。此時, 她的臉通紅, 羞澀而又不情願的站起來說: “老師, 剛才括弧裏的 $\cos 100^\circ-\cos 40^\circ+\sin 70^\circ$ 的結果是0了。” (全班所有學生的目光都盯著她) 她坐下, 很不自在, 低著頭。我立即反映並接連說到: “對對對, 你說的很對, 這個式子的結果就是0, 這裏面是不是還有一般的結果呢?” (我之所以立即做出反映是因爲我曾在文 [2]中給出過一般的結果)。

本打算繼續探究上述題目的不同證法, 結果被這個學生的這一想法打斷了, 我只能順著這個思路探究形如式子 $\cos 100^\circ-\cos 40^\circ+\sin 70^\circ$ 的一般結果了 (對我而言, 是胸有成竹的), 我再讓學生將這個式子化成全部爲餘弦且中間爲“+”的形式: $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$, 接著我讓學生再推導 $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ$, 其中最後也出現了一個同類型的式子: $\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 160^\circ$, 它的結果也是0。學生情緒很激動, 大家都在找規律。很顯然, 這只能從角度觀察得出一般結果了。很快有學生站起來說: “如果把這兩個式子中的 $20^\circ$ 和 $40^\circ$ 都看成 $\alpha$ 的話, 那麼相應的第二項和第三項就分別是 $\cos(120^\circ-\alpha)$ 和 $\cos(120^\circ+\alpha)$, 也就是說對任意角 $\alpha$, 都有 $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$。” “哇, 這麼美妙!” 頓時, 教室裏一陣掌聲, 這掌聲是給這個男生的, 更多的是給這個女生的 (大家一邊鼓掌, 一邊看著那個女生)。我做了手勢讓大家安靜下來, 並說到: “大家都知道, ‘提出問題比解決問題更重要’, 如果在咱們班的數學課堂上, 經常有提出問題並有解決問題的學生, 還愁咱們的數學學不好嗎? 還愁沒有新的數學發明嗎? 其實數學家搞科研就是這套方法, 只要我們大家都朝這個方向努力, 我們都有可能成爲數學家的。剛才的問題是由曹同學提出的, 解決是由劉同學完成的, 我們稱這個公式爲‘曹劉三角恒等式’行嗎? ” 又是一片長時間的掌聲, 我留意了一下, 曹同學偷

偷哭了。原來還有學生不甘落後, 我在講話的時候, 她 (班長) 做出了另一設想: 要找個和餘弦同結構的正弦式子。我話剛說完, 秦同學站起來說: "老師, 我也發現了一個式子, 我把餘弦全改成正弦, 有公式: 對任意角 $\alpha$, 都有 $\sin\alpha-\sin(120^\circ-\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)=0$。" "秦三角恒等式!" 有學生高呼, 教室簡直不像是在上課了, 我也控制不了了, 就在此時, 下課鈴又響了。我做了簡單小結, 指出兩個三角恒等式:

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0; \tag{19}$$

$$\sin\alpha-\sin(120^\circ-\alpha)+\sin(120^\circ+\alpha)=0. \tag{20}$$

並提出問題: "對等式 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=\dfrac{3}{4}$ 的證明, 我們還沒有結束, 我希望同學們課後積極思考, 看還有沒有其他的方法? 可以查閱相關的書籍和資料, 下一節課我們繼續探討, 下課! "

一節課就在這樣短短的40分鐘 (我們學校是40分鐘一節課) 結束了, 學生興趣昂然, 餘興未消, 我也激動不已, 盡心策劃著下一節課。

## 2.3. 學生通過查閱資料得到的證明方法:

第三節課一上課, 學生爭先恐後地到黑板上展示"自己" (均是參考有關資料的) 的方法。主要有以下三種:

分析5(構造對偶式)

$$\begin{aligned}\text{設 }\ \sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ&=A,\\ \cos^2 20^\circ+\sin^2 50^\circ+\cos 20^\circ\sin 50^\circ&=B,\end{aligned}$$

則 $A+B=2+\sin 70^\circ$, $A-B=\cos 100^\circ-\cos 40^\circ-\sin 30^\circ$, 易知 $2A=\dfrac{3}{2}$, 即 $A=\dfrac{3}{4}$, 從而 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=\dfrac{3}{4}$。

分析6(作對稱變換) 令 $\sin 20^\circ=A+B$, $\cos 50^\circ=A-B$ 則

$$\begin{aligned}A&=\frac{\sin 20^\circ+\cos 50^\circ}{2}=\frac{\sin 20^\circ+\sin 40^\circ}{2}=\sin 30^\circ\cos 10^\circ=\frac{1}{2}\cos 10^\circ,\\ B&=\frac{\sin 20^\circ-\cos 50^\circ}{2}=\frac{\sin 20^\circ-\sin 40^\circ}{2}=-\cos 30^\circ\sin 10^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{所以 }\ \sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ&=(A+B)^2+(A-B)^2+(A+B)(A-B)\\ &=3A^2+B^2=\frac{3}{4}\cos^2 10^\circ+\frac{3}{4}\sin^2 10^\circ=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

分析7(利用正、餘弦定理) (注: 正、餘弦定理本應在數學⑤中, 但我們在講向量和三角恒等變換時已經給學生講了)

由餘弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 和正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ 易得: 在 $\triangle ABC$ 中, 有恒等式 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$, 將 $B=20°$, $C=40°$ 代入即得所證等式成立。

我和全班學生共同分析了上述三種方法, 特別提出了這三種方法都具有一般性, 尤其是方法7, 又給我們幾個新的三角形中的恒等式, 即

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A; \tag{21}$$

$$\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C-2\sin A\sin C\cos B; \tag{22}$$

$$\sin^2 C=\sin^2 A+\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos C. \tag{23}$$

方法7真正揭示了等式 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°=\dfrac{3}{4}$ 的幾何背景。我們分析完這三種方法正準備回顧這三節課給我們帶來的收穫時, 有一學生提出: “老師, 我拿的這本資料上有這麼一個等式, 不知能否用來解決這個題目?” 該生提供的恒等式是:

$$\text{在 }\triangle ABC\text{ 中, 有恒等式 }\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1. \tag{24}$$

“結構多麼優美而又易記的恒等式呀! 大家不妨一試。” 很快同學們都相繼得出了結果。大家都在拍手叫絕! 我又提問: “還有沒有和這個恒等式結構相似的恒等式?” 同學們紛紛在練習本上嘗試著猜想和驗證, 我發現有很多同學寫出:

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin A\sin B\sin C=?$$

數分鐘過後, 同學們都沒有得出上述式子的值是一個常數, 唉聲歎氣之餘, 也有學生得出如下結果:

$$\text{在 }\triangle ABC\text{ 中, 有恒等式 }\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\cos A\cos B\cos C=2. \tag{25}$$

這由 (24) 很容易得出。這足見這個學生思維的敏銳程度。我順便告訴大家, “式子 (25) 是1962年北京市高中數學競賽的一道試題, 而且式子 (24) 和 (25) 有很大的用處, 比如用式子 (24) 就能解決1979年新疆的一道數學競賽試題:

在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C<1$, 試判斷這個三角形的形狀。若改成 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$ 和 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C>1$ 結果又會怎樣呢? ”

最後我做了小結, 說到: “其實, 由式子 (24) 和 (25), 我們還會得到很多恒等式, 如

$$\text{在 }\triangle ABC\text{ 中, 有恒等式 }\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C-2\sin A\sin B\cos C=1. \tag{26}$$

以及一些推廣的式子, 由於時間關係, 請大家課後繼續探究, 然後把你的結果給我交上來。通過這三節課的學習, 我們大家應該更進一步地認識到數學該怎麼學, 學數學不是一味地做習題, 而是多研究習題, 挖掘習題的內涵和外延, 只要你留心, 處處都會有新的發現和發明! ”

三節課上完了, 這無論對我還是對學生無疑都是一次非常有意義的嘗試。但隨後我在反思這三節課時相繼也出現了一些問題: 一是這三節課確實達到了學以致用的目的, 是充分調動和激發了學生的學習積極性, 也讓學生體會到了科學發現的途徑和艱難過程, 但我總是覺得眞正受益的還是很少一部分學生, 對大部分學生來說, 這樣的課堂究竟得到了多少? 二是我耗費了三節課的時間處理這樣一道習題, 這當然會影響正常課的教學進度。新課程既提倡我們廣大教師這樣做, 可實際上按課時安排本身正常上課的時間又不夠, 您說就像我這樣的教學嘗試多點好還是少點好? 請大家提出一些建議。

《新課標》指出: “高中數學課程應該返璞歸眞, 努力揭示數學概念、法則、結論的發展過程和本質。數學課程要講邏輯推理, 更要講道理, 通過典型例子的分析和學生自主探索活動, 使學生理解數學概念、結論逐步形成的過程, 體會蘊涵在其中的思想方法, 追尋數學發展的歷史足跡, 把數學的學術形態轉化爲學生易於接受的教育形態。” 因此, “在教學中, 如何從課本例習題出發, 進行變式教學, 無論從方法還是內容上都起著‘固體拓新’之用, 可收到‘秀枝一株, 嫁接成林’之效, 同時可培養學生提出問題和解決問題的能力, 並使學生的探究能力和創新能力得到發展。”

## 附錄

### 《高中數學課程標準》(節選)

第三部分 內容標準

一、必修課程

必修課程是整個高中數學課程的基礎, 包括5個模組, 共10學分, 是所有學生都要學習的內容。其內容的確定遵循兩個原則: 一是滿足未來公民的基本數學需求; 二是爲學生進一步的學習提供必要的數學準備。

5個模組的內容爲:

數學1: 集合、函數概念與基本初等函數 I(指數函數、對數函數、冪函數);

數學2: 立體幾何初步、平面解析幾何初步;

數學3: 演算法初步、統計、概率;

數學4: 基本初等函數 II(三角函數)、平面上的向量、三角恒等變換;

數學5: 解三角形、數列、不等式。

上述內容覆蓋了高中階段傳統的數學基礎知識和基本技能的主要部分, 其中包括集合、函數、數列、不等式、解三角形、立體幾何初步、平面解析幾何初步等。不同的是在保證打好基礎的同時, 進一步強調了這些知識的發生、發展過程和實際應用, 而不在技巧與難度上做過高的要求。

此外, 基礎內容還增加了向量、演算法、概率、統計等內容。

向量是近代數學最重要和最基本的概念之一, 是溝通幾何、代數、三角等內容的橋樑, 它具有豐富的實際背景和廣泛的應用。

現代社會是一個資訊化的社會, 人們常常需要根據所獲取的資料提取資訊, 做出合理的決策, 在必修課程中將學習統計與概率的基本思想和基礎知識, 它們是公民的必備常識。

演算法是一個全新的課題, 已經成爲計算科學的重要基礎, 它在科學技術和社會發展中起著越來越重要的作用。演算法的思想和初步知識, 也正在成爲普通公民的常識。在必修課程中將學習演算法的基本思想和初步知識, 演算法思想將貫穿高中數學課程的相關部分。

必修課程的呈現力求展現由具體到抽象的過程, 努力體現數學知識中蘊涵的基本思想方法和內在聯繫, 體現數學知識的發生、發展過程和實際應用。教師和教材編寫者應根據具體內容在適當的地方 (如統計、簡單線性規劃等) 安排一些實習作業。

二、選修課程

系列1, 系列2說明在完成必修課程學習的基礎上, 希望進一步學習數學的學生, 可以根據自己的興趣和需求, 選擇學習系列1, 系列2。

系列1是爲希望在人文、社會科學等方面發展的學生而設置的, 包括2個模組, 共4學分。系列2則是爲希望在理工、經濟等方面發展的學生設置的, 包括3個模組, 共6學分。

系列1的內容分別爲:

選修1-1: 常用邏輯用語、圓錐曲線與方程、導數及其應用。

選修1-2: 統計案例、推理與證明、數系擴充與複數的引入、框圖。

系列2的內容分別爲:

選修2-1: 常用邏輯用語、圓錐曲線與方程、空間中的向量與立體幾何。

選修2-2: 導數及其應用、推理與證明、數系的擴充與複數的引入。

選修2-3: 計數原理、統計案例、概率。

在系列1、系列2的課程中, 有一些內容及要求是相同的, 例如, 常用邏輯用語、統計案例、數系擴充與複數等; 有一些內容基本相同, 但要求不同, 如導數及其應用、圓錐曲線與方程、推理與證明; 還有一些內容是不同的, 如系列1中安排了框圖等內容, 系列2安排了空間中的向量與立體幾何、計數原理、離散型隨機變數及其分佈等內容。

三、數學探究、數學建模、數學文化

數學探究

數學探究、數學建模、數學文化是貫穿于整個高中數學課程的重要內容, 這些內容不單獨設置, 滲透在每個模組或專題中。高中階段至少各應安排一次較爲完整的數學探究、數學建模活動。以下是對數學探究、數學建模、數學文化的教學要求。

數學探究即數學探究性課題學習, 是指學生圍繞某個數學問題, 自主探究、學習的過程。這個過程包括: 觀察分析數學事實, 提出有意義的數學問題, 猜測、探求適當的數學結論或規律, 給出解釋或證明。

數學探究是高中數學課程中引入的一種新的學習方式, 有助於學生初步瞭解數學概念和結論產生的過程, 初步理解直觀和嚴謹的關係, 初步嘗試數學研究的過程, 體驗創造的激情, 建立嚴謹的科學態度和不怕困難的科學精神; 有助於培養學生勇於質疑和善於反思的習慣, 培養學生發現、提出、解決數學問題的能力; 有助於發展學生的創新意識和實踐能力。

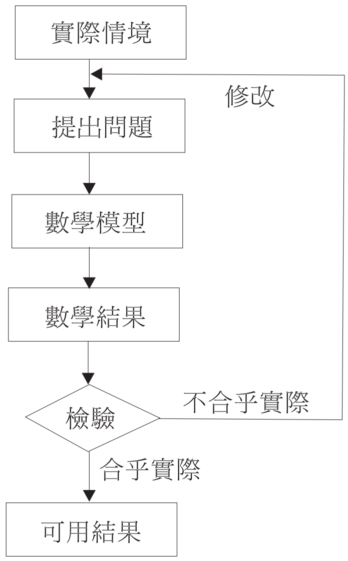
要求

1. 數學探究課題的選擇是完成探究學習的關鍵。課題的選擇要有助於學生對數學的理解, 有助於學生體驗數學研究的過程, 有助於學生形成發現、探究問題的意識, 有助於鼓勵學生發揮自己的想像力和創造性。課題應具有一定的開放性, 課題的預備知識最好不超出學生現有的知識範圍。
2. 數學探究課題應該多樣化, 可以是某些數學結果的推廣和深入, 不同數學內容之間的聯繫和類比, 也可以是發現和探索對自己來說是新的數學結果。
3. 數學探究課題可以從教材提供的案例和背景材料中發現和建立, 也可以從教師提供的案例和背景材料中發現和建立, 應該特別鼓勵學生在學習數學知識、技能、方法、思想的過程中發現和提出自己的問題並加以研究。
4. 學生在數學探究的過程中, 應學會查詢資料、收集資訊、閱讀文獻。
5. 學生在數學探究中, 應養成獨立思考和勇於質疑的習慣, 同時也應學會與他人交流合作, 建立嚴謹的科學態度和不怕困難的頑強精神。
6. 在數學探究中, 學生將初步瞭解數學概念和結論的產生過程, 體驗數學研究的過程和創造的激情, 提高發現、提出、解決數學問題的能力, 發揮自己的想像力和創新精神。
7. 高中階段至少應爲學生安排1次數學探究活動。還應將課內與課外有機地結合起來。

我們不對數學探究的課時和內容做具體安排。學校和教師可根據各自的實際情況, 統籌安排數學探究活動的內容和時間。例如, 可以結合方程的近似求解、導數的應用等內容安排數學探究活動。

數學建模

數學建模是運用數學思想、方法和知識解決實際問題的過程, 已經成爲不同層次數學教育重要和基本的內容。數學建模可以通過以下框圖體現:




數學建模是數學學習的一種新的方式, 它爲學生提供了自主學習的空間, 有助於學生體驗數學在解決實際問題中的價值和作用, 體驗數學與日常生活和其他學科的聯繫, 體驗綜合運用知識和方法解決實際問題的過程, 增強應用意識; 有助於激發學生學習數學的興趣, 發展學生的創新意識和實踐能力。

要求

1. 在數學建模中, 問題是關鍵。數學建模的問題應是多樣的, 應來自於學生的日常生活、現實世界、其他學科等多方面。同時, 解決問題所涉及的知識、思想、方法應與高中數學課程內容有聯繫。
2. 通過數學建模, 學生將瞭解和經歷上述框圖所表示的解決實際問題的全過程, 體驗數學與日常生活及其他學科的聯繫, 感受數學的實用價值, 增強應用意識, 提高實踐能力。
3. 每一個學生可以根據自己的生活經驗發現並提出問題, 對同樣的問題, 可以發揮自己的特長和個性, 從不同的角度、層次探索解決的方法, 從而獲得綜合運用知識和方法解決實際問題的經驗, 發展創新意識。
4. 學生在發現和解決問題的過程中, 應學會通過查詢資料等手段獲取資訊。
5. 學生在數學建模中應採取各種合作方式解決問題, 養成與人交流的習慣, 並獲得良好的情感體驗。

6. 高中階段至少應爲學生安排1次數學建模活動。還應將課內與課外有機地結合起來, 把數學建模活動與綜合實踐活動有機地結合起來。

我們不對數學建模的課時和內容做具體安排。學校和教師可根據各自的實際情況, 統籌安排數學建模活動的內容和時間。例如, 可以結合統計、線性規劃、數列等內容安排數學建模活動。

數學文化

數學是人類文化的重要組成部分。數學是人類社會進步的產物, 也是推動社會發展的動力。通過在高中階段數學文化的學習, 學生將初步瞭解數學科學與人類社會發展之間的相互作用, 體會數學的科學價值、應用價值、人文價值, 開闊視野, 尋求數學進步的歷史軌跡, 激發對於數學創新原動力的認識, 受到優秀文化的薰陶, 領會數學的美學價值, 從而提高自身的文化素養和創新意識。

要求

1. 數學文化應盡可能有機地結合高中數學課程的內容, 選擇介紹一些對數學發展起重大作用的歷史事件和人物, 反映數學在人類社會進步、人類文明發展中的作用, 同時也反映社會發展對數學發展的促進作用。
2. 學生通過數學文化的學習, 瞭解人類社會發展與數學發展的相互作用, 認識數學發生、發展的必然規律; 瞭解人類從數學的角度認識客觀世界的過程; 發展求知、求實、勇於探索的情感和態度; 體會數學的系統性、嚴密性、應用的廣泛性, 瞭解數學眞理的相對性; 提高學習數學的興趣。
3. 以下選題供參考。
   (1) 數的產生與發展;
   (2) 歐幾裏得《幾何原本》與公理化思想;
   (3) 平面解析幾何的產生與數形結合的思想;
   (4) 微積分與極限思想;
   (5) 非歐幾何與相對論問題;
   (6) 拓撲學的產生;
   (7) 二進位與電腦;
   (8) 計算的複雜性;
   (9) 廣告中的資料與可靠性;
   (10) 商標設計與幾何圖形;
   (11) 黃金分割引出的數學問題;

(12) 藝術中的數學;

(13) 無限與悖論;

(14) 電視與圖像壓縮;

(15) CT 掃描中的數學——拉東變換;

(16) 軍事與數學;

(17) 金融中的數學;

(18) 海岸線與分形;

(19) 系統的可靠性。

## 參考文獻


1. 田彥武、馬小林, 一道課本習題的深入研究, 數學通報, 2005, 5。
2. 田彥武, 一個三角恒等式的幾何解釋及其應用, 中學數學月刊, 1999, 5。
3. 田彥武、申篤軒, 兩個三角恒等式的幾何證法, 中學數學月刊, 2000, 5。
4. 中華人民共和國教育部制訂, 普通高中數學課程標準, 人民教育出版社, 2003, 7。
5. 普通高中課程標準實驗教科書數學④A 版及教師用書, 人民教育出版社, 2004, 7。
6. 聶文喜, 一道課本習題的變式教學, 數學通報, 2004, 12。
7. 羅新兵、羅增儒, 課堂問題變式淺析, 中學數學教學參考, 2005, 3。


—本文作者任教於寧夏銀川市第九中學—