數學傳播 31卷4期, pp. 57-59

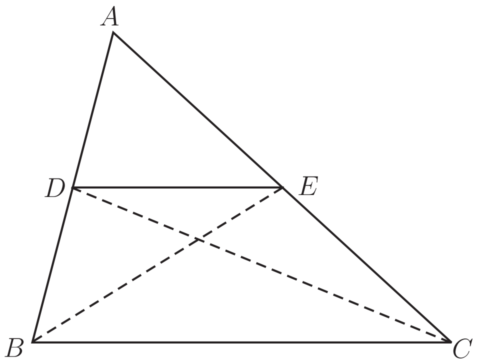
證明不等同理解

張海潮

任何一個數學命題的成立都需要證明; 證明的意義在於提供有關命題成立的論述, 因此至少要做到以嚴謹的推理確認從已知到結論的邏輯脈絡。但是不可否認: 使命題成立的嚴謹推理並不代表對命題內容的完整分析。一個最好的例子就是《幾何原本》第6卷的命題2 [註1], 該命題談的是相似三角形基本定理, 內容如下(《原本》144頁):

如果一條直線平行於三角形的一邊, 則它截三角形的兩邊成比例線段; 又, 如果三角形的兩邊被截成比例線段, 則截點的連線平行於三角形的另一邊。

《原本》對此命題的證明相當巧妙, 它使用了面積關係: 亦即對等高或同高的兩個三角形而言, 其面積之比就是底邊之比 (見《原本》143頁命題1)。以下我們先略述《原本》有關此命題正敍述的證明, 至於逆敍述的部分, 證明方法與正敍述相同。讀者可參考《原本》145頁。
如圖一, 在三角形 ABC 中, 線段 DE 平行於 BC, 連 BE、DC 兩條輔助線



圖一

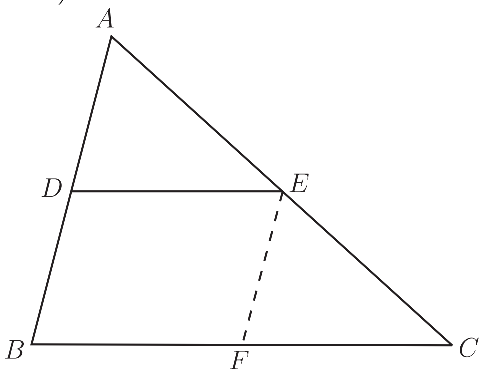
由於 DE 平行於 BC, 所以 $\triangle DEB$ 和 $\triangle DEC$ 等面積; 易見 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DEB$ 的面積比等於 $\triangle ADE$ 和 $\triangle$ DEC 的面積比, 又因爲前一個面積比等於 AD 和 DB 的長度比, 而後一個面積比等於 AE 和 EC 的長度比, 因此 DE 截 $\triangle ABC$的兩邊成比例線段, 命題得證。

不難看出,《原本》對此命題的證明並不直接, 因爲它把邊長的比例問題提升到面積的比例問題。以通俗的話來說, 就是把一維的問題擺在二維的框架之中, 因而證明看起來如刀切豆腐,

鋒利無比。問題是, 我們眞的從這個證明理解了 $\overline{AD}:\overline{DB}$ 等於 $\overline{AE}:\overline{EC}$ 嗎? 不妨回到這個問題最基本的狀態—— $\overline{AD}=\overline{DB}$ 或者是 D 是$\overline{AB}$ 中點的情形, 此時命題是這麼說的 (圖二):

過 $\triangle ABC$ 一邊 $\overline{AB}$ 的中點 D 作一條平行於底邊 $\overline{BC}$ 的直線, 則此直線必定通過 $\overline{AC}$ 的中點。

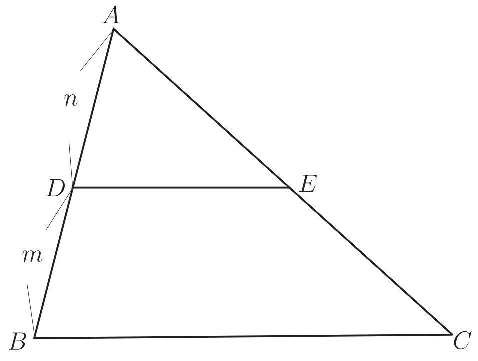
常見的證明是過 E 作 $\overline{AB}$ 的平行線, 然後利用 ASA 定理證明 $\triangle ADE$ 和 $\triangle EFC$ 全等, 因而得到 $\overline{AE}=\overline{EC}$ (圖二)。



圖二

上面這個證明不必將問題轉化成面積, 可以很淸楚的看到爲什麼 $\overline{AD}:\overline{DB}$ 等於 $\overline{AE}:\overline{EC}$。事實上, 這樣的證明方法稍加整修就可以推廣到下面這個命題 (圖三):

如果 $\overline{AD}:\overline{DB}=n:m$ 其中 n, m 爲正整數, 並且 DE 平行 BC, 則 $\overline{AE}:\overline{EC}=n:m$ [註2]



圖三

換句話說, 當 $\overline{AD}$ 和 $\overline{DB}$ 之比是有理數時, 本命題可以用相當直接的方式證明, 但是當 $\overline{AD}$ 和 $\overline{DB}$ 的比值是一個無理數的時候, 圖二或圖三的直接證明便無法進行, 必須採用別的方法; 面積方法此時展現了它的優越性 [註3]。

爲什麼面積方法可以解決比值是無理數的情形? 要回答這個問題, 至少要先回到面積的定義。在平面幾何中, 單位正方形的面積可以說是面積定義的基礎 [註4]。因此之故, 任何一個邊長爲有理數的正方形, 面積都可以合理的定成是邊長的平方。問題同樣發生在邊長是無理數的情形: 當正方形的邊長是無理數的時候, 面積當然還是邊長的平方。只不過, 這樣的結果必須透過極限。一旦透過極限論證, 正方形的面積是邊長的平方、長方形的面積是長寬之積都能成立; 甚至包括平行四邊形的面積是底高之積等等。可以這麼說, 表面上《原本》第6卷的命題2使用了面積證明, 骨子裡可是使用了無理數與有理數的極限關係; 如果早就有極限的語言, 相似三角形基本定理根本可以直接證明, 完全不必訴求面積證法。

如果把《原本》的證明比做魔術, 面積就是魔術師的帽子, 極限則是從帽子中掏出的鴿子。在鴿子出現之前, 表演不會結束, 觀衆千萬要睜大眼睛, 拭目以待 [註5]。

附註

註1: 本文所引出自於台北九章出版社出版的《歐幾里得幾何原本》一書 (簡稱《原本》)。

註2: 證明的方法是從 $\overline{AB}$ 的每一個整數分點作 $\overline{BC}$ 的平行線, 這些平行線加上 $\overline{DE}$ 一共有 $n+m-1$ 條, 它們依序交到 $\overline{AC}$, 並且將 $\overline{AC}\, n+m$ 等分。

註3: 當 $\overline{AD}:\overline{DB}$ 是無理數時, 筆者並不清楚是否有比利用面積證明更精簡的方法。

註4: 單位正方形是指邊長爲1的正方形。

註5: 相似三角形基本定理是三角學的基礎, 從而發展出正、餘弦定理, 構築坐標幾何。

—本文作者爲台大數學系退休教授—