

## 回首來時路\*

李天岩

當初第一志願考進數學系，當然號稱是因為對數學感興趣。其實中學時代對數學的所謂興趣多半也只是建立在鑽研和解決數學難題時所得到的‘快感’上吧。沒想到一進了大學，差點就被初等微積分裡那些莫名其妙的  $\epsilon$ - $\delta$  給逼瘋了。記得那時同寢室的另三位室友都是大一數學系的新生。那時我們多在晚間11點左右就熄燈就寢。但是常常在半夜一、二點鐘時，發現大家都被那些鬼  $\epsilon$ - $\delta$  的抽象概念搞得睡不著覺。記得我隔壁書桌的一位同學常常在打草稿寫‘遺書’，‘遺書’的內容基本上是說：什麼都搞不懂，不知怎麼辦好，不想活下去了...。後來到了美國以後才知道，我們都不是天字第一號的笨蛋。好比說，在我目前任教的密西根州立大學，系裡根本禁止在一、二年級初等微積分的課程裡灌輸學生所謂  $\epsilon$ - $\delta$  的抽象概念。其實在牛頓，萊比尼茲 (Leibniz) 發明微積分時，‘逼近’，‘漸近’，‘Infinitesimal’ 的概念並沒有非常嚴格的‘定義’。也只有到19世紀的中期，數學界的頂尖高手才開始對所有數學概念要求‘嚴格地定義’(rigorously defined)。比如說，請告訴我到底什麼是“1”？什麼是“2”？為什麼  $1 + 1 = 2$ ？(For that matter, 到底什麼是“+”?) 若在初等微積分入門那個階段就要用  $\epsilon$ - $\delta$  去嚴格刻劃‘逼近’，‘漸近’，‘Infinitesimal’ 的抽象概念，就好像在小學生學基本算術加乘法之前，要求他們先嚴格定義什麼是“1”，什麼是“2”... 什麼的。果真如此，少年維特對數學的煩惱肯定提前發生了，不是嗎？中學時代對數學難題的鑽研基本上和數學概念上的所謂 intuition 沒啥關係，因此大家都好像嚴重忽略在引入抽象概念之前，先介紹 intuitive idea 的重要性。我也是到美國以後才知道，數學上的邏輯推理和對數學結構性的認知有相當大的差距。記得上次在南京時，和一位南京大學數學系的年青教授午餐，這位教授那時並沒有放過‘洋’，他聽說東方學生到美國念研究所一、二年級時成績多半傑出，可是過了選課期到研究做論文的階段就逐漸落後老美了，不知是真是假？其實這位教授所聽說的大致正確。一般較用功的東方學生，在國內受教育時大都下很大的功夫在記憶數學上的邏輯推論：這一步為什麼 implies 下一步，下一步為什麼 implies 再下一步... 什麼的。然後把所有習題都拿來鑽一鑽。在這種情況下，一般的筆試是很難考倒這些學生的。

---

\* 本文是由作者在2005年底及2006年底兩次於清華大學講演的講稿改寫。

可是美國學生所不同的是，在他們早期的數學教育裡卻已很普遍的在問：What it says? 以及 Why it works? 這些問題在考筆試時幾乎不太可能遇到。但在做研究時卻是非常非常重要。我有一個台灣來的博士生。有一次我請他把我在專題討論班裡講過的一篇很重要、很複雜的文章用他自己的數學語言仔細寫出來。從他後來交來的報告裡，可以看出他的確下了很大的功夫把文章中被省略的邏輯細節嚴密的補足了。我把他的報告改了改還給他。然後他又交了來，我又改了改再還給他。他再交來時，我請他告訴我，這篇文章到底在幹什麼？沒想到他卻一個字都答不上來。其實在一般的數學研究論文裡，我們最常見的是作者用些莫名其妙的定義推些最一般性的定理。我們若只是非常用力的去瞭解它的邏輯推理，而輕易忽略去搞清楚作者腦袋瓜裡到底在想些什麼，那麼我們對文章的瞭解的確非常有限，很難由此做出傑出的工作。非常遺憾的是，極多數重要論文的作者都不會輕易把他們腦袋瓜子裡真正的 point 用力寫出來。你必須自己去問這些問題，自己去追求它的答案。

這一路過來，我常舉的一個例子是，我對一個矩陣的‘行秩’和‘列秩’為什麼會相等的好奇。其實在任何基本“線性代數”的書裡，我們都可以找到它們為什麼相等的證明。但是從那些邏輯推理的外表，我實在看不出它們為什麼 happen to be equal。在我真正瞭解到它們為什麼會一樣的過程中，這個‘好奇’卻幫我瞭解了許多廣義逆矩陣的幾何意義。又好比說，誰不會矩陣運算裡的‘高斯消去法’啊？有一次我問台灣南部大學數學系的一位教授（這位教授在大學念書時，好像還贏過台灣“線性代數”比賽的‘銀牌’）高斯消去法的幾何意義到底是什麼？他說，這年頭誰要去想這種問題?! 語言簡單的東西，懂不懂好像不那麼重要。管它懂不懂老子照樣可以擠出可以在‘SCI’雜誌發表的文章。可是遇到較複雜的語言時，好比近代代數幾何裡的基本語言‘Scheme’，一般人若對它整個的來龍去脈缺乏一個整體性的理解，恐怕連‘定義’都無法輕易記憶。記得我在自修‘交換代數’時，遇到所謂的‘局部環’(local ring)，當時只是好奇，為什麼稱它‘局部環’？從它定義（只有唯一的一個 maximal ideal 的環）的表面實在看不出憑什麼稱它為‘局部環’。可是在我試圖真正去瞭解為什麼要稱它‘局部環’的過程裡，這個‘好奇’卻幫助我了解許多代數幾何上的概念。這一路過來，這種對數學的‘好奇’以及對這些‘好奇’問題答案的追逐的確給我帶來對研讀數學的極大樂趣。在這裡我想強調的是，對這些‘好奇’的 chase 毫無爭取在 SCI 的期刊上發表論文的意圖。

當初去 University of Maryland 念研究所是一個巧合，遇到後來的指導教授 James A. Yorke 更是一個極大的巧合。不管怎樣，記得 Yorke 教授頭一次看了我當初在清華念書的 File 時，顯然是吃了一驚。以為我是那路殺來的“高手”，功力無比深厚。現在回想起來那個檔案裡所紀錄的實在是有極大的 Misleading(這字有時是‘詐欺’的禮貌性用詞)。看哪！我在念大二的“三高”時，‘高等微積分’用的是 Apostol 的‘Mathematical Analysis’。‘高等幾何’用的是 Halmos 的‘Finite Dimensional Vector Spaces’。‘高等代數’用的是 N. Jacobson 的‘Lectures in Abstract Algebra’。微分方程用的是 Coddington 的‘Introduction to Ordinary Differential

Equations'。大三念'近世代數'時,用的是 van der Waerden 的'Modern Algebra'。念'複變函數論'用的是 Ahlfors 的'Complex Analysis'。另外,大三還念了拓樸學、數論。大四念了泛函分析、李氏群論、實變數函數論(用的是 Royden 的'Real Analysis'),微分幾何(用的是 Hicks 的'Notes on Differential Geometry')。這些課不但都修過,而且成績都不低(大四修的課都在90分以上)。在表面上看來,這個紀錄的確是相當傲人了,不是嗎?可是今天把那些教科書拿出來翻一翻,實在很難想像當初是怎麼混過來的。好比說, Ahlfors 那本書的水平不低。它絕不適合做初學複變數函數論的教科書。記得我們大二在學高等微積分時,教授根本就跳過了'線積分'(現在想來,大概根本的原因還在於 Apostol 那本書過於'高深',教授無法教完書裡大部分的材料。)可是 Ahlfors 的書基本上是假定閣下已清楚的掌握了所謂的"Countour Integral"(複數面上的線積分)。若是對 Countour integral 都不甚理解,我很難想像當時怎麼去理解'Cauchy Integral'、'Laurent Expansion'...等等基本的概念。那時的老師們好像一般來說都覺得,能用愈深的教科書(其實每本書都'號稱'是'self contained')學生自然就會變得較'高檔次'吧!其實抽象數學的出發點多半起始於對實際問題所建立的數學模式。然後將解決問題的方式建立理論,再抽象化,希望能覆蓋更一般性的同類問題。因此在學習較高深的抽象數學理論之前,多多少少要對最原始的出發點和工具有些基本的認識。要不然,若是一開始就搞些莫名其妙的抽象定義,推些莫名其妙的抽象定理,學生根本無法知道到底是在幹些什麼。可是爲了考試過關,只好跟著背定義,背定理,背邏輯,一團混戰。對基礎數學實質上的認識真是微乎其微。我們那時的學習環境大致如此。所以我那時檔案裡的紀錄雖然極爲 Impressive,但是如今回想起來,當時實在是'一竅不通'。背定理,背邏輯最多只能應付考試。畢業服完兵役以後,絕大多數以前所學當然都忘了。老實說,在出國前,我真想放棄學數學,不幹算了。後來在美遇到了導師 Yorke 教授。從他那裡,我才慢慢對學數學和數學研究開始有了些初步的認識。這些認識大大助長了我以後學習數學的視野和方式。最重要的是,學習'高檔次'的數學理論,絕對必須從對低檔次數學的理解出發。

我自己常常覺得老天在我數學的 Career 上實在是給了我太大的幸運。記得那年在 B. Kellogg 教授所開'非線性數值分析'的課堂上聽到他所講關於 M. Hirsch 用微分拓樸的反證法證明"Brouwer 固定點"的存在定理。其實我覺得只要把 M. Hirsch 的證明稍稍做些變動(這個變動大概不超過原來證明的1%吧!),就可以輕易的把他的反證法("...若'固定點'不存在,則天下會大亂..."什麼的)變成一個找這些固定點的實際方法。後來和導師 J. Yorke 教授提起了我的看法。記得那時擺在我面前的研究課題有好幾個,沒想到 Yorke 教授卻堅持要我全力以赴的去實踐這個算法的構想。老實說,那時我心裡最不想做的就是這一個問題。首先,我那時根本不懂計算(連基本的 FORTRAN 語言都不會)。另外,我們那時並沒什麼'工作站', '個人電腦'...什麼的,所有計算程式都必須打在卡片上(一行一張卡),然後把它們送去計算機中

心，他們用學校僅有的二台機器替你跑程式，剩下來的就看你的運氣了，有時二十分鐘之後就有結果。有時要等二、三小時甚至更長。還有一個不想做這個題目的理由：那時總以為數學研究總是要證些定理什麼的，搞些  $\varepsilon$ - $\delta$  的玩意兒，我對算 Brouwer 固定點的構想即使可以順利運作，好像也無法擠出些‘定理’來。不管怎樣，在我們那個年代，好像老師叫你做什麼，你照著做就是了。雖然我自己心中極不熱衷這個題目，但是從裡到外都毫無排斥的意識。

記得我是在1974年的1月中開始著手這個問題。關於寫程式，甚至打卡都只好一面做一面學。幾乎每天在清晨6點半就送卡片去計算機中心，然後是等結果，改程式，等結果，改程式，... 常常弄到半夜12點多。每次等到的結果都因程式或算法的錯誤，基本上拿到的都是一大疊的廢紙。後來，去計算機中心拿（或等）一疊廢紙好像已經變得習以為常了。記得是在3月15日那天早上，我到計算機中心所拿到的結果卻只有薄薄的幾頁。起先心中只是大為疑惑：今天是怎麼回事？沒想到打開一看，居然算出‘固定點’來了！

說實在的，我那時心中並沒有很大的成就感。這就好像老師要我去掃廁所，我終於把廁所打掃乾淨了，如是而已。沒想到，大約在一個月以後，Yorke 教授在 AMS (美國數學學會) 的 ‘Notices’ 上看到一個將在當年6月26~28日在南卡羅來納州的 Clemson University 舉行的一個 “International Conference on Computing Fixed Points with Applications” 國際性會議的 information。完全出乎我們意料之外的是，從1967年開始就有一大群人在研究 Brouwer 固定點的算法。這些人多半是出自名校經濟系、商學院、作業研究、工業工程... 等系所的教授，因為許多經濟學上的模式的‘均衡點’(Equilibrium) 都可以用 Brouwer 固定點的方式來表達，因此 Brouwer 固定點的運算變成了實際應用上的一個重要工具。這個 Conference 顯然邀請了那個門派所有的‘大老’、‘天王’們去做報告。Yorke 教授在知道這個會的訊息之後，立刻打了個電話給這個 Conference 的主辦人 S. Karamardian，告訴他我們有一個新的算法。當時 Karamardian 也只是半信半疑的勉強答應提供我們二張來回 Clemson 的機票。後來我和 Kellogg 教授一起去參加了那個 Conference。我們在那裡‘一鳴驚人’。後來耶魯大學經濟系的講座教授 H. Scarf(他是當初在1967年，頭一個提出 Brouwer 固定點算法的開山祖師爺) 在 Conference Proceeding 的 Introduction 裡說：

“... For many of us one of the great surprises of the conference at Clemson was the paper by Kellogg, Li and Yorke which presented the first computational method for finding a fixed point of a continuous mapping making use of the considerations of differential topology instead of our customary combinatorial techniques. In this paper, the authors show how Hirsch’s argument can be used to define paths leading from virtually any pre-assigned boundary point of the simplex to a fixed point of the mapping. ...”

附帶一提的是，我們算法中所引用的微分拓樸概念，後來在解非線性問題數值計算的‘同倫算法’上起了‘革命性’的作用。

前一陣子，我在美國一個期刊上讀到一篇成功企業家在退休後所寫的感言。其中讓我一直無法忘卻的一句話是：

“... One must prepare to be lucky! ...”

回想當初我在 struggle 固定點的運算時，實在有的是藉口可以像我曾接觸過的一些學生似的總是在拖宕，閃躲，拒絕幹活，騙自己，...。果真如此，這個天上掉下來的‘萬年火龜’不是輕易擦身而過了嗎？

有一次和 Yorke 教授閒聊起關於‘智商’的事。一般來說，他並不太看重‘智商’的高低。記得那時他說，“... People in U. C. Berkeley have high IQ by definition. But, you just can't believe what kind of stupid problems they are looking at. We will choose the right problem to beat their IQ by 20 points. ...”這些話顯然是略為邪門，但是這些年來，每次遇到該選什麼研究題目時，總是想起他這些話。回想當初若給我一個選擇，我絕不會拚了老命去算 Brouwer 的固定點。那時心裡真正想搞的倒是在那時偏微分方程領域裡相當時髦的 Monotone Operator。那時有許多牌子很大的人物（像是 Hartman, Stampacchia, Minty, J. L. Lions ...）都在搞那一套。可是現在看來，那個時期在 Monotone Operator 領域的工作，簡直沒有一個里程碑性的成果能夠保留到今天。這些年來，我個人曾直接接觸過些數學界的頂尖高手。但是若談到對判斷題目意義的本領，我的導師 Yorke 教授在這方面的功力的確深厚，絕不輸那些‘頂尖高手’——這也許是我自己最大的幸運吧！

我從清華畢業已將近40年了。有時常常想，若是重新再給我一次學習的機會，我將怎麼做，怎麼做... 什麼的，但是，

“沒有人能使  
時光倒流，  
草原再綠，  
花卉再放。

只有在剩餘部份，爭取力量！”

（錄自中學時代看過的一場由華倫比提和娜姐麗華領銜主演的電影，“天涯何處無芳草”）

所以，重新再給我一次機會的事只是幻想。我希望我的經歷能在諸位長遠的數學研究，學習，甚至教學上貢獻一點什麼。謝謝大家。