數學傳播 31卷3期, pp. 85-86

對“方程式之根的 n 次方之和的解法”一文的迴響

薛昭雄

頃閱「數學傳播」第121期 (民國96年3月) 中有一文“方程式之根的 n 次方之和的解法”作者爲張力友先生。他在文中發表了他的教學心得證明了下述結果: 若 $f(x)$ 爲一 n 次方程式且 α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 爲其根。令 $s_k=\alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k$, 則

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k}{x^{k+1}} \tag{1}$$

我想就此結果表示三點意見如下:

(A) (1) 式爲早已熟知的結果, 可參見任何方程式論之專著。譬如文獻 [1] 第172頁即有相同之結論。

(B) (1) 式也可推廣至下式:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_{-k}}{x^{k-1}} \quad (\text{當然 } \alpha_i \text{ 均不爲}0)$$

這也是早已熟悉的結果。(見文獻 [1] 第172頁)。

(C) 下述之牛頓公式 (有關對稱多項式)(請見參考文獻 [2]) 也可利用來求 s_k $(k\geq 1)$ 之值。

若 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 則

$$\begin{aligned}
&s_1+a_1=0\\
&s_2+a_1s_1+2a_2=0\\
&s_3+a_1s_2+a_1s_1+3a_3=0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&s_n+a_1s_{n-1}+a_2s_{n-2}+\cdots+na_n=0
\end{aligned}$$

由上式方程式組可求出 s_n 如下:

$$(-1)^m s_m = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ & a_2 & a_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 \\ ma_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}, \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

利用上述行列式即可求出 s_m 由係數 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 表示出的值。

當 $m > n$ 時, 可用下式求出 s_m 之値

$$s_m + a_1 s_{m-1} + \cdots + a_{n-1} s_{m-n+1} + a_n s_{m-n} = 0$$

参考文獻

1. W. S. Burnside and A. W. Panton, *The Theory of Equations*, Vol II, Dover Publications, Inc., New York, 1960.
2. H. W. Turnbull, *Theory of Equations*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1947.

—本文作者任教於美國內華達大學—