

江戶時代的算額與日本中學數學教育

徐澤林

日本江戶時代 (1603~1867) 的算額, 是懸掛在神社、寺廟廊簷或“繪馬堂”中數學問題匾額, 起源於日本傳統宗教信仰中向神佛祈願的“繪馬”, 在江戶世俗文化環境中作為一種特殊藝能而風行。同時, 作為一種特殊類型的數學傳播載體, 奉揭算額也是世界數學文化史上獨特的文化現象, 這一歷史遺物今天在日本數學教育中仍然發揮著特殊作用。本文介紹算額的起源與現存狀況, 以及日本數學史與數學教育界, 特別是中學數學教師對算額調查研究, 並引入中學數學教學的情況。

一、繪馬的誕生與演變

“繪馬”, 日語念“えま”(Ema), 即懸掛於神社、廟宇廊簷, 或專供懸掛繪馬的“繪馬堂”內的木制彩色匾額, 也就是向神或佛祈願或者感謝神佛使自己祈願實現, 而書寫相應願望的木板畫, 供奉於神社或廟宇之中。這一風俗叫“奉揭繪馬”, 或“奉納繪馬”。

作為宗教信仰活動的奉納繪馬風俗起源較早。民間信仰與人類現實生活密切相關, 它作為一種習俗而產生。無論什麼時代, 人們都會遇到來自自然的或人類社會的各種災難、

危機和挫折, 因此會幻想超自然的神靈給予解救。在古代日本, 人們認為神降臨人間時所乘的神輿是馬, 所以就把馬視為神聖之物, 最初是向神社供奉活馬。在祭祀中供奉活馬的風俗在古典著作《常陸國風土記》中就有記載, 所記為崇神天皇時代的事。《續日本紀》等古文獻中, 這方面的記述不絕。

後來可能由於經濟上的考慮, 出現用土製或木製的馬偶代替活馬來進行祭祀。《續日本紀》中除有用活馬祭祀的記載外, 也有關於用馬偶進行祭祀的記錄, 如神護景雲三年二月乙卯條中, 就有以“馬形”和鞍奉獻太神宮的記載。^[1]



京都市戒壇院的繪馬

關於繪馬的出現，《神道名目類聚抄》稱：造り馬モ及ハザルモノ、馬ヲ画テ奉ルナリ、今世俗、馬ニアラデ、種々ノ絵ヲ図シテ献上事ニナリヌ^[2]

意思是說，“不及造馬偶，只好畫馬奉獻。當時的世俗，不止畫馬，還畫各種圖畫奉獻到社、寺中。”

後來人們不僅不再向神社、寺廟奉獻活馬，而是畫馬代替馬偶來奉獻。至於繪馬最初是何時出現的，今不可考，其普及、大眾化是鎌倉時代（1180~1333）以後的事。從古代遺留的實物遺存來看，大概在室町時代（1392~1573）末期就已經流行了。從這時起，除了繪畫馬的圖形外，還繪其他各種動物的圖形，因為祭祀活動中常常用牲畜供奉神佛。隨著時代推移，繪畫形式、圖案式樣、畫板式樣都不斷發生變化，人們祈求的願望也呈多樣化，如祈求病癒、祈求平安生產、祈求生兒育女等等。

大約至室町時代末期，是繪馬發展的轉型期。繪馬圖案內容除多樣化外，還有大型化趨勢，主要是匾額形式，且桃山時代（十六世紀後半葉）開始出現豪華化。從中世乃至整個近世，各種藝能已普及到一般社會階層，歌仙繪、浮世繪、和歌、和算等學藝發達起來，劍道、柔道、武道等藝道也流行起來，於是出現學問性質的特殊繪馬，如歌仙繪、藝能繪等。^[3]和算繪馬就是這種特殊的學問繪馬，後人稱其為“算額”。



京都市清水寺的繪馬架



京都市地主神社內的繪馬

至江戶時代，隨著奉納繪馬風俗的盛行，在市井上出現了專門從事為人繪畫繪馬的畫師，以及專門出售繪馬的繪馬屋。以經營繪馬為生計，這種職業一直存續到現代。

大正（1912~1926）、昭和（1926~1989）前期，日本文化西方化盛行，軍國主義也氾濫，所以“年中行事”中奉納繪馬的習俗也就慢慢衰落了，神社、佛寺中繪馬銳減。現代繪馬都是小型的，繪畫題材也豐富多彩，主要是祈求家庭平安、身體健康、順利升學、考試合格、順利就職或升遷、生意興隆、愛情永恆、喜結良緣的繪馬。

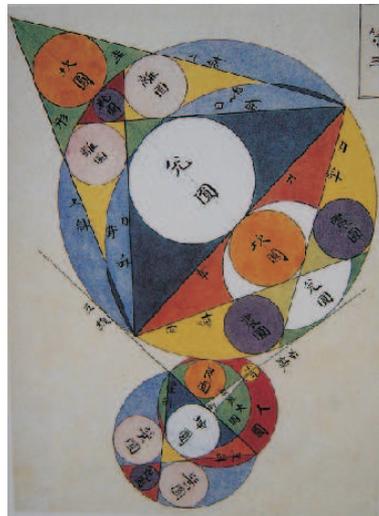
二、江戶時代的算額

“算額”這一名稱，大概最早出現於幕末和算家山口和的《道中日記》中。日本學士院藏書目錄《和算圖書目錄》中雖有《奧州堺明神算額寫》、《大阪算額》、《嚴島算額寫》、《羽州久保田算額改訂》之類的書名，但它們都是關於“算額”問題的抄本，題名也是今人所擬，所以在山口和《道中日記》之前，未必有“算額”之稱謂。

從《和算圖書目錄》中的《相川天神社神壁》、《愛宕山圓滿寺額解》、《愛宕山額二術》、《愛宕山額算法》、《愛宕山額面解義》等書名來看，“奉納術解”、“標額”、“奉納算題”、“懸額”、“額算題”、“匾揭解義”、“奉納算法”等稱謂，也是指算額。而且有時還稱“繪馬算”或“數術之額”。到了幕末，利用“算額問題”進行學習日益普遍，於是把算額中的問題叫做“額題”或“面題”。

和算與歌舞伎、浮世繪等一樣，在江戶時代庶民和低級武士中產生，主要是在私塾中進行教育的。對和算感興趣進行學習研究的主要是低等武士和一些較富裕殷實的農民、町人，它是江戶世俗文化之一。江戶時代的這些社會階層把數學當成一種藝能，加以研習與承傳，而奉揭算額正是這一藝能活動的表現。

學習、研究和算的人，最初是爲了自己能夠順利地進行數學研究、數學能力不斷提高而向神佛祈願，於是向神社佛閣奉納繪馬，當然也包含爲使自己會解數學問題因而感謝神佛恩賜，目的在於勉學。以後演變成各種願望都有，有祈願家庭安全的、有祈願學術私塾繁榮的、有祈願子孫出生的，恐怕最多的是祈願自己能夠解難題、能夠構造好的數學問題，或者是爲炫耀自己數學能力的優秀。一般都是在繪馬板上寫出數學問題，要求讀者給予解答，也有奉納者自己給出解答的。例如，京都市八阪神社的算額，1683年奉納的伏見禦香宮算額之解答算額，類似於早期和算書中的遺題繼承。和算家通過算額問題進行學術交流與學術辯論，和算學派最上流與關流的爭論最爲顯著，會田安明的《芝愛宕山（江戶）奉納算額》就是典型的例子。



幕末和算家渡邊一奉納的算額



東京愛宕山神社的算額

會田安明的《芝愛宕山（江戶）奉納算額》就是典型的例子。

算額最早何時出現，今不可考。從村瀨義益的《算學淵底記》(1681)中，可以窺知江戶時代中期的寬文年間(1661~1673)就已經開始形成這種風習，江戶(今東京)各地就存有算額問題。在《算學淵底記》中，介紹懸掛於“武州目黑不動尊”的算額中問題。可以推測，京都、大阪等地或許更早就有許多算額了。這一風習一直保存到明治時期，所以今天在神社、寺廟中發現的算額也有一部分是明治時期的算額。

現存最早的算額是栃木縣佐野市星宮神社天和三年(1683)奉納的算額，其次分別是京都市北野天滿宮(1686)、京都市八坂神社(1691)、福井縣武生市大塩八幡宮(1701)、埼玉縣本莊市都島正觀音(1726)等地的算額。除北海道地區沒有發現算額外，日本全國幾乎所有地區都出現過算額，到1997年為止，全國範圍內共發現現存算額約884面，最近這幾年又新發現一些算額，現存算額總數大約達到900餘面。這些算額現都逐步被電子化，在網路上公布(網址為：和算の館 <http://www.wasan.jp/>)。

江戶時代中後期，隨著奉納算額風習的流行，也出現了通過解答算額中的問題而進行數學學習的現象，所以到18世紀後半葉，出現了“算額問題集”之類數學書。最早的“算額問題集”是藤田貞資的《神壁算法》(1789)，此後，仿此的算額集陸續出版。比較著名的有以下諸書：

- (1) 增刻神壁算法，上下，藤田嘉言編，藤田貞資閱，水玉堂，寬政元年初版。
- (2) 續神壁算法，藤田嘉言編，藤田貞資閱，水玉堂文化3年版。
- (3) 精要算法，卷之上中下，藤田定資著，安島直圓訂，天明元年。
- (4) 京都祇園額解術，安島直圓，抄本。
- (5) 改補算額備要大成，佐佐木其爭，安政4。
- (6) 算額級聚拔，藤田吉勝。
- (7) 算額三除開立方，抄本。
- (8) 算額用字和解，抄本，嘉永6年。

數學愛好者將算額作為一種遊藝，也有一些人還通過遊歷以數學為生計，江戶時代就出現所謂的“遊歷算家”，代表人物有幕末的山口和(?~1850)與佐久間纘(1819~1896)等人。他們到處旅行指導數學，首先去神社佛閣調查有無算額，如果有就再去拜訪奉納者，找不到這些奉納者，就去找一些莊主、名主和富裕的農民，說自己是數學家，如果這個村莊有對數學感興趣的年輕人，自己就可以教他們，於是開辦數學私塾。遊歷算家對日本江戶時代的數學教育與數學普及起了很大的作用。

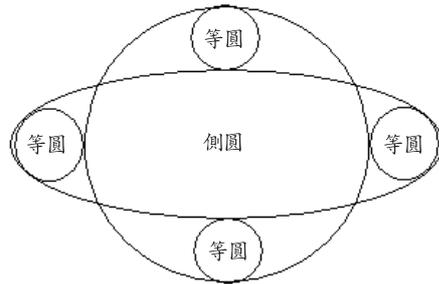
三、算額中的問題與解法

算額中數學問題大都以幾何題為主，且多為討論圓、橢圓、各種多邊形之間的相容、相切關係的幾何題。這些問題不僅數量關係複雜、難度高，而且以不同色彩繪出幾何圖形也顯得十分美觀，具有藝術效果。由以下兩算額問題，我們可窺算額算題之一斑：

問題 1: 京都武信稻荷神社的算額問題。今有如圖側圓與全圓交罅容等圓四個, 只云全圓徑一十寸, 問等圓徑幾何?

答曰: 等圓徑二寸三分八厘四毛餘。

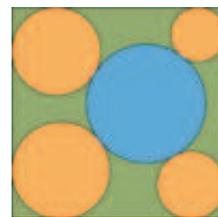
術曰: 置一十七個開平法, 以減五分餘, 四除之, 乘全徑得等徑, 合問。^[4]



問題 2: 1874年群馬縣秋葉神社的算額問題。今有如圖, 方內容設中圓、東西南北四圓, 東圓徑七寸, 西圓徑六寸, 南圓徑三寸, 北圓徑九寸, 問方面幾何?

答曰: 方面二十一寸

術曰: 置東徑乘西徑, 內減南徑因北徑, 餘名日; 置東徑南徑差, 內減西徑北徑差, 餘名月; 置東徑南徑差, 連乘西徑北徑差, 東徑北徑差、西徑南徑差半之, 平方開之, 加日, 以月除之, 得方面, 合問。^[5]



算額中問題難度不等, 有相當於初中年級的, 有相當於高中年級的, 還有很多問題相當於大學一、二年級的。

這些幾何問題, 主要是利用天元術、點竄術的代數方法布列方程求解, 也有需要積分法的“圓理”來求解。中國宋元時期的代數學於 17 世紀傳播日本, 和算家在其基礎上發展成爲“傍書法”與“點竄術”的文字代數方法, 與 Viete 符號體系相比, 和算傍書法除在關係符號上的欠缺外, 代數作用是一樣的。傍書法與點竄術的使用, 促進了和算代數學進步, 也使和算家的數學研究不再熱中於數值計算, 而注重形式化和技藝性的演算, 同時, 中國代數化幾何傳統也被和算所繼承, 在藝能繪馬流行的氛圍中, 自然形成了這類十分美觀且關係複雜的幾何學風格, 人們常常稱這類計算幾何爲“和式幾何”。

衆所周知, 西方古希臘歐幾裏得幾何產生以來, 一直到十九世紀非歐幾何的誕生, 歐式幾何學並沒有什麼進展, 連新定理的發現也非常少。中國傳統數學中幾何學比代數學顯得薄弱。相對於此, 十八、十九世紀日本和算中幾何卻顯得十分發達, 算額的幾何問題中包含了大量的幾何新定理, 例如, 懸掛於福井縣鯖江市舟津神社的算額中的幾何問題, 本質是 Descartes 圓定理和 Soddy 六球定理^[6]。現代日本數學史研究者在研究算額時經常發現, 算額中很多問題, 本質就是後來西方數學家所發現的幾何定理。

江戶時代和算家爲處理特別複雜的幾何圖形計算, 還發明了如“變形術”、“極形術”、“算變法”之類的幾何變換方法。對於沒有學習過和算的數學教師和學生來說, 很難讀懂和算家的解法, 而且解決和算中的難題也需要較高的數學修養與解題能力。

現在日本的數學愛好者在解答算額問題時，基本採用現代的解析方法（特別是解析幾何方法），使用現代數學語言和符號，再現和算家的解法過程。這方面的著述頗多，其中比較有影響的是愛知縣春日井高等學校的數學教師深川英俊與美國加利福利亞大學數學教授 Dan Sokolowsky 共同撰著的《Japanese Temple Geometry Problems》(1989年在加拿大出版)。該書又於1994年以書名《日本の數學—何題解けますか?》(深川英俊, ダン・ソコロフスキー) 在日本森北出版社出版。另外還有長野縣和算研究會編輯出版的英文著作《Japanese Temple Mathematical problems》也有一定的影響。

四、日本中學數學教師對算額、地方和算史的研究

和算屬於民間性學術，數學研究與教育活動基本上是在民間私塾、寺廟中進行的，和算家一般都是下層武士或比較富裕的農民。和算家生平事蹟鮮見史籍，和算著作也多以抄本流傳，和算流派林立而有門禁之陋習，這樣就使得和算史料紛雜，於是地域和算史料調查顯得十分重要。地方和算史料調查工作始於著名數學史家三上義夫（1875~1950），他在受聘學士院專事和算史料調查工作期間，走遍日本全國農村，追尋和算家後代子孫，調查各地和算家師承關係、藏書與活動等情況，並且調查廣布各地神社寺廟的算額。^[7] 其後，以日本數學史學會為中心開展算額調查活動，1964年出版了赤羽千鶴等人的《長野縣の算額》，萩野公剛（1927~198?）整理出版了《郷土數學文獻》，1966年松岡元久出版了《山形の算額》，此後，地方和算史研究與算額研究十分活躍，很多縣都成立了地方和算史研究會（日本行政區劃共有一都一道二府四十三縣，而地方和算研究會就有十五個之多），開展地方和算史資料調查與研究，尤其是對算額的調查與研究，並且開展和算普及工作。這些地方和算史研究會基本都是由中學數學教師自發組織的，主要有以下各研究會：

日本全國和算研究會一覽表

研究會名稱	事務局地點	聯繫人
愛媛和算研究會	愛媛縣宇摩郡土居町藤原 1-8	渡邊雅道
岡山縣和算研究會	岡山市島田本町 2-8-8	河本知徳
近畿數學史學會	滋賀縣甲賀市水口町名阪 1129-23	吉田柳二
近畿和算 Seminar	奈良市東九條町 1014-4	小寺 裕
長野縣和算研究會	長野市松代町西條 4065 長野縣松代高等學校內	小林博隆
神奈川縣和算研究會	藤澤市本鶴沼 2-8-18	川瀨正臣
群馬縣和算研究會	藤岡市岡之郷 631-3	中村幸夫
山梨縣郷土數學研究會	甲府市大手 1-1-34	中山政三

日本全國和算研究會一覽表(續)

研究會名稱	事務局地點	聯繫人
福島縣和算研究會	郡山市台新2-20-4	柴 昌明
岩手縣和算研究會	一關市山目字大槻126-5	安富有恆
山形縣和算研究會	山形市雙月新町4-2	板垣貞英
關東甲信越靜和算研究會	東京·神奈川·群馬·山梨·長野五縣 輪流每年召開一次	
東北和算研究會	福島·岩手·山形三縣輪流每年召開一次	
南部和算研究會	岩手縣盛岡市東松園3-25-8	柳本浩
日本數學史學會	奈良市東九條町1014-4	小寺 裕
和算研究所	東京都北區榮町48-23 東書文庫大樓1層	佐藤健一

日本數學會、日本數學史學會從其產生開始，就與中學教師有很深的淵源。日本數學會的前身“東京數學會社”於明治十年（1877）成立，因為當時東京大學也還在建立中，所以會員大都是中學數學教師，其中和算家出身者占70%，洋算關係出身者占30%。等日本的大學紛紛建立之後，才逐漸演變成大學數學教師的數學學術組織（初名“東京數學物理學會”，後分裂為“日本數學會”和“日本物理學會”）。日本數學史學會自下平和夫任會長之後，也漸漸變成中學數學教師的學術組織，學會受出版商研成社、東京書籍的資助，中心工作是編輯出版學會雜誌《數學史研究》，並經營“和算研究所”以收集整理和算資料。當然，學會也經常組織一些研討會，做一些和算普及工作。學會運營機關目前在東京都港區慶應義塾中等部（中學）內。目前會員近200人，以中學數學教師為主。

關於算額調查與地方和算史料調查活動，自赤羽千鶴、萩野公剛、松岡元久等人工作發表之後，這方面的成果一直非常豐富，據不完全統計，有100餘種。

現在日本的地方和算研究會、日本數學史學會以及和算研究所的工作，除上述和算史調查活動外，還經常舉辦一些數學史料展示會、研討班、和算讀書會等，開展和算史的普及工作。這些活動的組織者與參與者，主要是在職的中學數學教師，也有部分退休大學數學教師，他們都是自費參與這些學術活動。

五、算額與日本的中學數學教育

日本各地的中學數學教師在對本地算額進行調查研究的同時，也注意在中學數學教學中充分利用這些歷史材料，發揮它們的教育作用。這是基於對數學教育中採用數學史的意義和作用，有以下幾方面的認識：

- (1) 學生對數學史實的關心，會對所學習的內容有更深入的理解；
- (2) 學生通過瞭解數學史實，以提高文化修養，更深地理解數學在現代社會中的作用；

(3) 學生學習數學史，從而瞭解數學是如何發展的，有助於對人類歷史發展形成科學的認識。

基於這些認識，一些中學數學教師在數學教學中有計劃地組織學生到當地的神社、寺廟中探尋遺存的算額，並進行解讀。同時也指導學生自己製作新的算額奉納於神社、寺廟中。認為這樣的探尋、製作算額的數學實踐活動，對於基礎教育又有以下特殊的作用：

- (1) 通常數學學習，問題由教師佈置給學生，學生對問題求解。於是造成這樣的結果：使學生養成被動接受問題的習慣，從而缺乏自己發現問題、提出問題的意識和能力。所以通過學生自己製作算額，可以培養學生自己發現問題、提出問題的意識和能力。
- (2) 問題設制是學生將自己發現的一些數學性質和關係通過分析、再加以組織的過程，它將要求學生掌握許多數學知識和思考方法，這對於知識與思考方法的整合非常有用。同時，通過問題的設制，可以培養學生具有關心事物、主動地處理它們的意欲和態度。
- (3) 這是一項數學實踐活動，通過這一形式來進行數學學習，學會如何構造數學問題，有助於對學生數學思維方法的培養，學會自己做數學、感悟和欣賞數學。
- (4) 從綜合學習上來說，製作算額，除數學學習與實踐活動外，還有助於其他學科的學習：^{[8][9]}

- ①《語文》課：學習古文，認識一些古文字；
- ②《手工技術》課：學習一些簡單的木工技術，獲得一些手工製作的技能；
- ③《美術》課：掌握一些繪畫技能和色彩、顏料方面的知識，書法方面也得到練習；
- ④《社會》課：瞭解日本江戶時代的歷史文化，特別是瞭解當地的鄉土歷史文化，而實地去神社、寺廟奉納算額也是一種社會實踐活動。

具體步驟與做法如下：

- (1) 首先介紹和算、江戶時代的文化；
- (2) 展示本地現存的算額照片，介紹和算文化；
- (3) 解讀算額中的問題。
- (4) 利用和算術語詞典，把算額中的數學問題翻譯成現代語文形式和符號形式。
- (5) 解算額中的問題，並弄清和算家當時的解法。
- (6) 參考數學教科書中的數學內容和方法自己設計、構造數學問題，並且自己給出解答，或者與同學共同探討問題的解答。
- (7) 把自己設計的問題和解答用文言與和算術語改寫。
- (8) 製作彩色算額板。抄寫題文、答文，幾何圖形繪畫著色。
- (9) 盡可能地把所製作的算額奉納到附近的寺院中。

另一方面，算額中的問題十分豐富，這些問題都是現今中學課本中所沒有的，且有一定的難度，所以，數學教師們常常引入一些算額問題，以作為中學數學教材的補充材料。

六、餘論

算額作為一種特殊藝能的繪馬，在江戶町人文化與和算發達的背景下流行起來。大量算額的出現，以及從奉納算額者的身份來看，表明江戶時代的日本一般民衆對數學學習和研究的濃厚興趣，這些民衆不僅包括閒逸階層的低級武士，還包括普通的農民和商人，由此可見，江戶時代日本數學普及率非常之高。數學傳播的場所、途徑也是多方面的，主要有寺子屋、私塾性的數學道場或地方藩屬的數學道場，再就是神社中的算額了。

算額作為日本江戶時代的民族歷史文化遺產，得到了很好的保護，使日本傳統數學史料更為豐富。和算發達史不足300年，但現在館藏和算史料十分豐富，僅和算資料最為集中的東北大學圖書館與學士院圖書館就收藏了五萬餘冊和算圖書與抄本，前者收藏達3萬冊，後者也達2萬5千冊。這些和算資料是在政府的鼓勵下，從民間調查收集或由民間自發寄贈的，除二戰即將結束的短暫期間外，日本一直沒有間斷對和算資料調查收集。在和算史料的調查與收集過程中，地方和算研究會以及中學數學教師也發揮了重要作用。相對日本來說，中國傳統數學發達史有兩千五百餘年，但現在保存下來的中算書籍不及3000種。造成這一結果除清末以來中國一直處於戰亂或政治動亂外，恐怕還與國民對保護文化遺產的意識比較淡漠有關。

今天日本以地方和算研究會為中心的數學史普及活動，以及將數學教育與數學史緊密結合的一系列工作，使傳統的數學文化在今天的數學教育中發揮積極作用。他們把和算及算額作為鄉土文化和不同於現代數學的另類數學文化加以介紹，而不是僅僅當做愛國主義教育的材料，這樣有助於學生對數學文化多樣性的理解和認識。

中國與日本同屬於漢字文化圈，其數學文化傳統、數學思維方式相同，數學教育也有所面臨的同樣問題。在目前國內數學史在數學教育的作用沒有引起足夠重視的情況下，日本這些經驗，值得中國數學史界、數學教育界認真思考與借鑒。

參考文獻

1. 岩井宏實，繪馬——ものと人間の文化史，法政大學出版局，1974，P.11.
2. 轉引自岩井宏實，繪馬——ものと人間の文化史，法政大學出版局，1974，P.20.
3. 岩井宏實，繪馬——ものと人間の文化史，法政大學出版局，1974，P.27.
4. 近畿數學史學會編，近畿の算額，大阪教育圖書株式會社，1992，P.21.
5. 群馬和算研究會，會報，第18號，1993年6月，P.9.
6. 道協義正、木村規子，Descartes の定理と Soddy の六球連鎖定理に關連して，科學史研究，第II期第22卷 (No.148)，岩波書店，1983，P160
7. 松崎利雄，和算の數學的研究小史，數學史研究，通卷80卷，1979，1-3，創立20周年紀念號，P.34.
8. 本上亮典，“算額の製作”をテーマにした総合的な學習，第3回啓林館教育實踐大賞受賞論文。
9. 本上亮典，和算の教材をめざして，第84回全國算數、數學教育研究（兵庫）大會中學部會第11分會報告。

—本文作者現為天津師範大學數學學院教授—