數學傳播 31卷3期, pp. 53-69

平面三角公式之幾何淵源

汪曉勤

自19世紀德國生物學家海克爾 (E. Haeckel, 1843 ∼ 1919) 所提出的生物發生學定律–“個體發育史重蹈種族發展史”被應用於教育後, “歷史發生原理”便應運而生。就數學教育而言, 該原理說的是: 學生對數學概念的認知過程與數學概念的歷史發展過程具有相似性。德國數學家 F ・克萊因 (F. Klein, 1849 ∼ 1925)、法國數學家龐加萊 (H. Poincare, 1854 ∼ 1912)、匈牙利數學家和數學教育家波利亞 (G. Polya, 1887 ∼ 1985)、荷蘭數學家和數學教育家弗賴登塔爾 (H. Freudenthal, 1905 ∼ 1990)、美國數學家和數學教育家 M. 克萊因 (M. Kline, 1908 ∼ 1992) 等都是該原理的支持和提倡者。龐加萊主張, 數學課程的內容應完全按照歷史發展順序展現給讀者, 他指出:

> “動物學家堅持認爲, 在一個短時期內, 動物胚胎的發育重蹈所有地質年代其祖先們的發展歷史。人的思維發展似乎也是如此。教育工作者的任務就是讓孩子的思維經歷其祖先之所經歷, 迅速通過某些階段而不跳過任何階段。鑒於此, 科學史應該是我們的指南。”(Kline, 1970)

波利亞指出: “只有理解人類如何獲得某些事實或概念的知識, 我們才能對人類的孩子應該如何獲得這樣的知識作出更好的判斷。” 弗賴登塔爾則稱“年輕的學習者重蹈人類的學習過程, 儘管方式改變了”(Ernest, 1998)。

因此, 數學歷史作爲考察數學教學有效性的一個重要視角, 長期以來一直受到數學教育家們的普遍關注, 我們從衆多教育取向的數學史研究 (如 Cajori, 1917; Kline, 1958; Hallerberg 等, 1969; Kline, 1970; Katz, 1998; Katz, 2000b 等等) 中可以看出這一點。就三角學而言, 早在20世紀60年代, Aaboe 就曾指出: 該學科的歷史發展順序是更爲自然的教學順序 (Katz, 2000a)。因此, 對於學生視若畏途的三角公式, 教材編寫者和教師理應參考其發展歷史。然而, 數學史文獻 (包括教育取向的數學史研究文獻) 中, 對三角學歷史反映不足 (Grattan-Guinness, 1994), 數學教師對該課題缺乏深入瞭解。本文試圖通過對17世紀以前平面三角公式歷史淵源的考察, 尋求三角公式的教學啓示和教學素材。

1. 托勒密

在三角學發展的初期, 天文學家關心的是一段長度已知的弧所對弦的長度。如圖1所示, 在單位圓中, 弧長 (圓心角) α 所對弦長 ($Chord\ \alpha$) 與我們今天的正弦之間的關係是

$$Chord\ \alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

法國數學史家坦納裏 (P. Tannery, 1843 ∼ 1904) 認為, 早在天文學家希帕霍斯 (Hippachus, 前2世紀) 之前, 阿基米德 (Archimedes, 前287 ∼ 前212) 和阿波羅尼斯 (Apollonius, 前260 ∼ 前190) 可能已經編制過弦表, 阿基米德的折弦定理① 似乎就是一個證據。希臘三角學創始人希帕霍斯、梅內勞斯 (Menelaus, 1世紀) 都製作過弦表, 可惜沒有流傳下來。

西元2世紀, 古希臘天文學家托勒密 (C. Ptolemy, 85? ∼ 165?) 為造出從1/2度到180度每隔1/2度所有弧的弦表 (造表方法可參閱 Smith,1925; Brendan,1965), 提出了後人以其名字命名的定理: 圓內接四邊形兩對角線乘積, 等於兩組對邊乘積之和。利用該定理, 已知兩角所對弦, 就可以求出它們的和或差所對的弦長。

如圖2, 設 $ABCD$ 是直徑為1② 的圓 O 的內接四邊形, 對角線 BD 為圓之直徑。$\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, 則由托勒密定理, 在四邊形 $ABCD$ 中: $AC\cdot BD = AD\cdot BC + AB\cdot CD$, 即

$$Chord\ 2(\alpha+\beta) = Chord\ 2\alpha\ Chord\ (\pi-2\beta) + Chord\ (\pi-2\alpha)\ Chord\ 2\beta \tag{2}$$

其中, $Chord(\pi-2\alpha)$ 可由畢氏定理得到

$$[Chord\ (\pi-2\alpha)]^2 + [Chord\ 2\alpha]^2 = 1$$

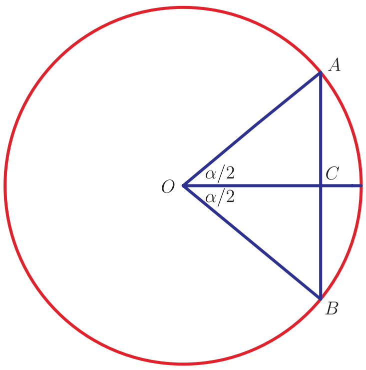

圖1

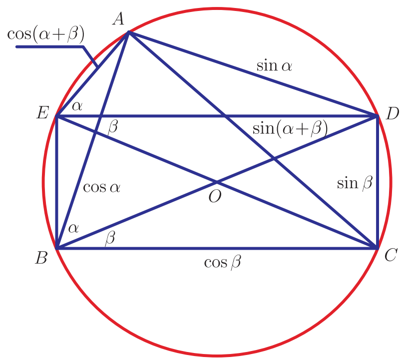

圖2

①設 ABC 為圓之折弦 (由弦 AB 和 BC 構成), 過 ABC 弧之中點向折弦之較長弦引垂線, 則垂足為折弦之中點。

②托勒密將直徑分成120等分, 將每一小部分的長度作為弦長的單位。

此即我們今天的平方關係式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \tag{3}$$

由 (1) 可知, (2) 就是我們今天的和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{4}$$

類似地, 在四邊形 $AEBD$ (EC 爲直徑) 中應用托勒密定理可得

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{5}$$

若圓內接四邊形 $ABCD$ 的一邊 BC 爲圓 O 的直徑 (如圖3), 設 $\angle ABC=\alpha$, $\angle DBC=\beta$, 則由托勒密定理可得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{6}$$

類似地, 在圓內接四邊形 $ABEC$ (ED 爲直徑) 中應用托勒密定理有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{7}$$

托勒密爲了製作弦表, 還利用了另外一個公式, 即我們今天的半角公式:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{8}$$

托勒密的推導方法如圖4所示。$\angle BAC=\alpha$, AC 爲圓的直徑 ($=2R$), AD 爲 $\angle BAC$ 的平分線, 在 AC 上取 $AE=AB$, 作 $DF\perp AC$, 垂足爲 F。則有

$$CD^2=FC\cdot AC=\frac{1}{2}EC\cdot AC=\frac{1}{2}(AC-AB)\cdot AC$$

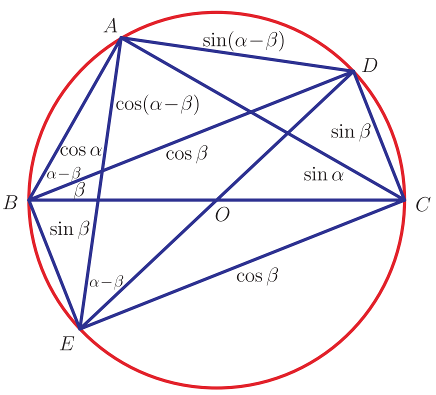

圖3

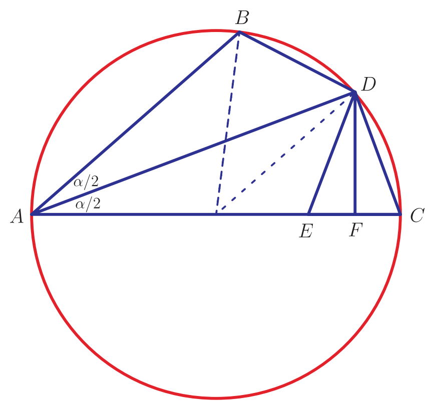

圖 4

因此

$$(Chord\ \alpha)^2 = \frac{1}{2}[2R - Chord(\pi - 2\alpha)] \cdot 2R \tag{9}$$

此即公式 (8)。

2. 帕普斯

三角公式與幾何命題之間的密切關係, 也明顯地反映於古希臘亞歷山大晚期的幾何學家帕普斯 (Pappus, 西元4世紀初)《數學彙編》的幾何命題之中。《數學彙編》是一部“關於希臘幾何學的手册或指南”(Heath, 1921), 它不僅爲我們保留了許多重要的希臘數學史料 (如倍立方問題的解法、阿基米德半正多面體等等), 而且也包含了許多帕普斯自己的命題。帕普斯對蜜蜂“智慧”的讚美、對畢氏定理的推廣、三等分角的圓錐曲線解法、鞋匠刀形內切圓問題、軌跡問題、圓錐曲線的統一定義、關於旋轉體體積和表面積的形心定理 (今稱“古爾丁定理”) 等等, 在今天都已廣爲人知 (具體可參閱一些數學史專著的介紹, 如 Heath, 1921; Boyer, 1968; Kline, 1972; Eves, 1983等)。《數學彙編》第5卷第4部分是對阿基米德《論球與圓柱》的評注, 其中, 帕普斯給出了下面兩個命題:

命題1: 如圖5, 設 H 是以 AB 爲直徑的半圓上的一點, CE 是半圓在點 H 處的切線, $CH=HE$。CD 和 EF 爲 AB 的垂線, D 、F 爲垂足。則 $(CD+EF)\cdot CE = AB\cdot DF$。

命題2: 如圖6, 設 C 、E 是以 AB 爲直徑的半圓上的兩點, CD 和 EF 爲 AB 的垂線, D 、F 爲垂足, CEK 弧爲半圓。則 $(CD+EF)\cdot CE = EK\cdot DF$。

在圖5中, 過 H 作 AB 的垂線, 垂足爲 G; 過 E 作 CD 的垂線, 垂足爲 I。易知 Rt$\triangle OGH$ 與 Rt$\triangle CIE$ 相似。於是 $\frac{CE}{OH} = \frac{IE}{GH} = \frac{DF}{GH}$, 或即 $GH\cdot CE = OH\cdot DF$。但 $GH = \frac{1}{2}(EF+CD)$, $OH = \frac{1}{2}AB$, 故得命題1的結論。在圖6中, 作 $OH \perp CE$ 於 H。作垂線 HG 、EI, 由 Rt$\triangle OGH$ 與 Rt$\triangle CIE$ 的相似性, 即可證得命題2。

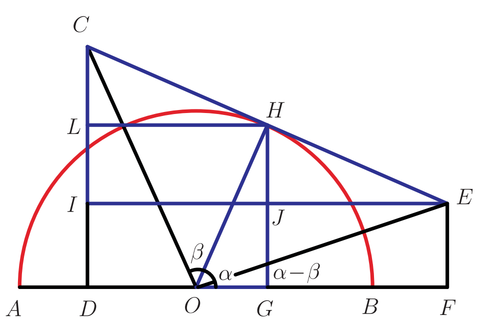

圖5

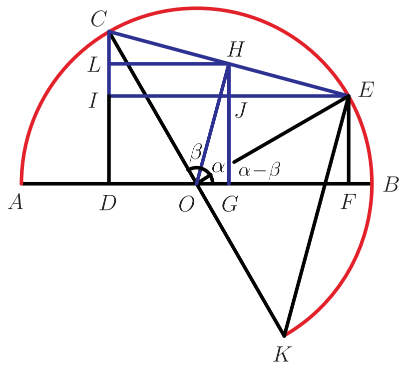

圖6

托勒密的兩個命題爲我們提供了許多三角公式的幾何模型。設 $\angle HOB=\alpha$, $\angle COH=\angle EOH=\beta$, $OC=OE=1$, 則 $\angle COD=\pi-(\alpha+\beta)$, $\angle EOF=\alpha-\beta$。於是有:

$$
\begin{aligned}
&OH=\cos\beta, \quad HG=\sin\alpha\cos\beta, \quad OG=\cos\alpha\cos\beta,\\
&HE=\sin\beta, \quad HJ=CL=\cos\alpha\sin\beta, \quad JE=\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}
$$

因 $CD=LD+CL=HG+HJ$, $OF=OG+JE$, $EF=HG-HJ$, $OD=DG-OG=JE-OG$, 故分別得公式 (4)-(7)。

當 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ 時, 上述方法正是Young (1957) 所介紹的和角公式的第一種推導法, 因簡潔、直觀而爲一些中學數學教師用於課堂教學。

又因 $HG=\frac{1}{2}(CD+EF)$, $HJ=\frac{1}{2}(CD-EF)$, $JE=\frac{1}{2}(OF+OD)$, $OG=\frac{1}{2}(OF-OD)$, 故

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\,[\,\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\,] \tag{10}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\,[\,\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\,] \tag{11}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\,[\,\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\,] \tag{12}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\,[\,\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\,] \tag{13}$$

若所設的角不變, 而 $OG=1$, 因 $\angle HCL=\alpha$, 故得 $HG=\tan\alpha$, $OH=\sec\alpha$, $CH=\sec\alpha\tan\beta$, $CL=CH\cos\alpha=\tan\beta$, $LH=\tan\alpha\tan\beta$。於是在直角三角形 COD 中:

$$\tan(\angle COD)=\frac{CD}{OD}=\frac{HG+CL}{OG-LH}\ (\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}) \quad \text{或} \quad \frac{HG+CL}{LH-OG}\ (\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi)$$

因此我們有

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \tag{14}$$

如圖7和8, 設 $\angle COD=\alpha$, $\angle EOF=\beta$, $OC=OE=1$, 則 $\angle COE=\pi-(\alpha+\beta)$, $\angle OHG=\angle CEI=\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\angle OEH=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 。於是有:

$$
\begin{aligned}
&OH=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad HG=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad OG=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},\\
&HE=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad HJ=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad JE=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.
\end{aligned}
$$

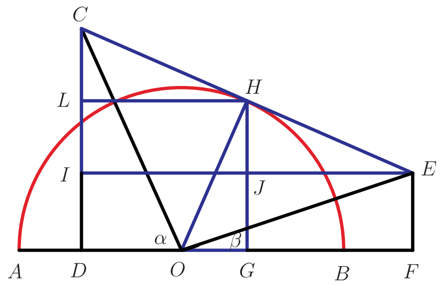

圖7

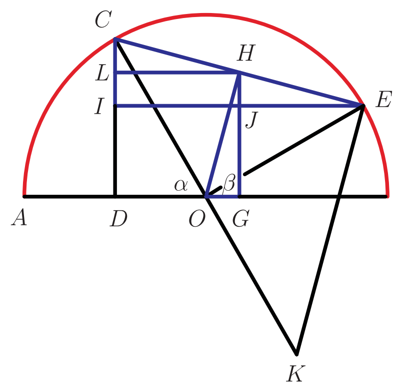

圖8

因 $CD+EF=2GH$, $CD-EF=CI=2HJ$, $OD+OF=DF=2JE$, $OD-OF=-2OG$, 故

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{15}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{16}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{17}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{18}$$

又梯形 $ECDF$、三角形 COD 、EOF 、COE 的面積分別爲

$$S_{\text{梯形}ECDF}=\frac{1}{2}(EF+CD)\cdot DF=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\cdot(\cos\alpha+\cos\beta),$$
$$S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}OD\cdot CD=\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha,$$
$$S_{\triangle EOF}=\frac{1}{2}OE\cdot EF=\frac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta,$$
$$S_{\triangle COE}=\frac{1}{2}OC\cdot OE\cdot\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta),$$

而梯形 $ECDF$ 的面積等於三角形 COD 、COE 、EOF 的面積之和, 因此

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)$$

或即

$$\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)\cdot(\cos\alpha+\cos\beta) \tag{19}$$

由此即得和角正弦公式 (4)。等式 (19) 對應著圖9中的菱形面積與圖10中的兩個矩形面積相等。

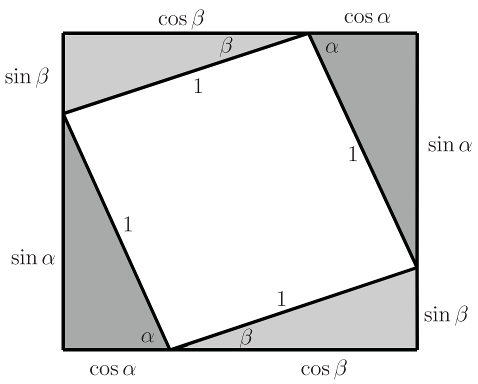

圖9

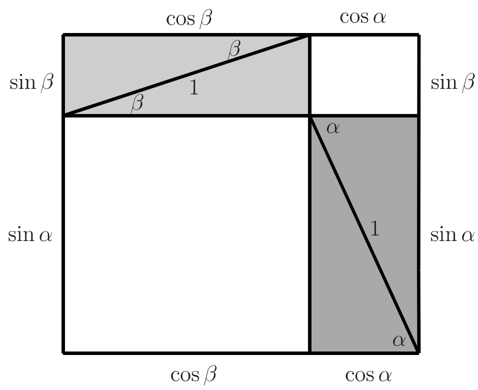

圖10

另一方面, 在三角形 CIE 和 COE 中, 由余弦定理和畢氏定理分別可得:

$$CE^2 = CI^2 + IE^2 = (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2,$$
$$CE^2 = OC^2 + OE^2 + 2OC\cdot OE\cos(\alpha+\beta) = 2 + 2\cos(\alpha+\beta).$$

故得和角餘弦公式 (5)。

3. 阿布・韋發

10世紀阿拉伯人阿布・韋發 (Abu'l-Wefa, 940 ∼ 998) 是三角學歷史上最早使用所有六種三角函數、並研究它們之間關係的天文學家和數學家。他所知道的同角三角函數關係如下:

$$\tan\alpha : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha\ ; \tag{20}$$
$$\cot\alpha : 1 = \cos\alpha : \sin\alpha\ ; \tag{21}$$
$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha\ ; \tag{22}$$
$$\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha. \tag{23}$$

從圖11中很容易發現關係式 (3)、(20)-(23)。要注意, 在16世紀之前, 三角函數並不是用比率, 而只是用線段來表示的。

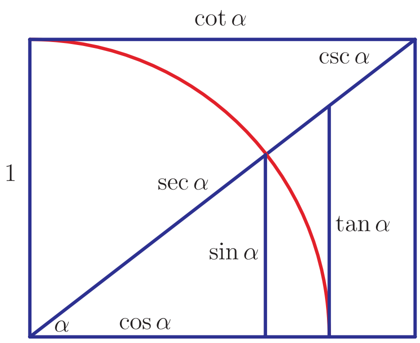

圖11

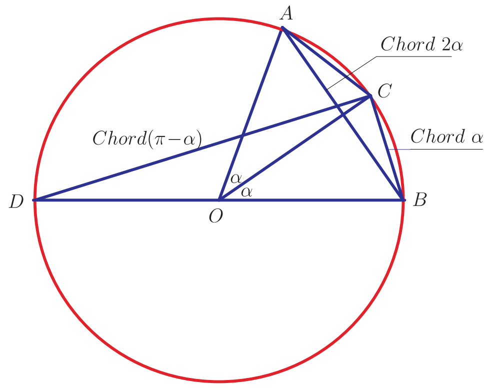

圖12

阿布・韋發製作了每隔 $15'$ 的正弦和正切表。在半徑爲 R 的圓上, 他獲得了如下關係:

$$\frac{2R - Chord(180^\circ - 2\alpha)}{Chord\ \alpha} = \frac{Chord\ \alpha}{R} \tag{24}$$

$$\frac{Chord\ 2\alpha}{Chord\ \alpha} = \frac{Chord(180^\circ - \alpha)}{R} \tag{25}$$

其中 (24) 與 (9) 等價; 而 (25) 則由圖12中三角形 ABC 和三角形 CDO 的相似性得到, 它等價於倍角正弦公式

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \tag{26}$$

值得注意的是, 阿布・韋發還得到了等價於 (4) 和 (6) 的公式:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} + \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta} \tag{27}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta} \tag{28}$$

其中 α 和 β 均爲銳角。從形式上看, 這兩個公式明顯刻上了幾何方法的烙印。

如圖13所示, 在直徑爲1的圓 O 中, $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$, 設 $\alpha > \beta$, $\alpha+\beta < \pi$, $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}$, $BD \perp AC$。取 $\angle POB = 2\beta$, 又按托勒密的做法 (圖4), 在 AC 上取 $AQ = AP$。於是 $BQ = BP = BC$, 從而得 $DQ = DC$。於是, $AB = \sin\alpha$, $BC = \sin\beta$, $AC = \sin(\alpha+\beta)$, $AP = \sin(\alpha-\beta)$, $BD = \sin\alpha\sin\beta$。因

$$AC = AD + DC = \sqrt{AB^2 - BD^2} + \sqrt{BC^2 - BD^2},$$
$$AP = AQ = AD - DQ = AD - DC = \sqrt{AB^2 - BD^2} - \sqrt{BC^2 - BD^2},$$

故得 (27) 和 (28)。

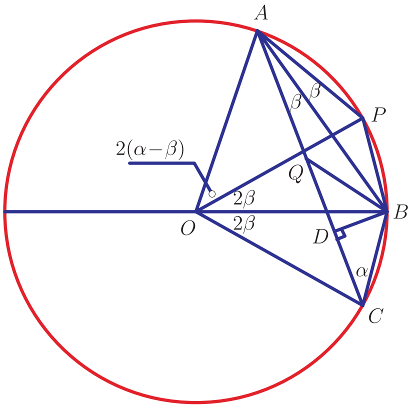

圖13

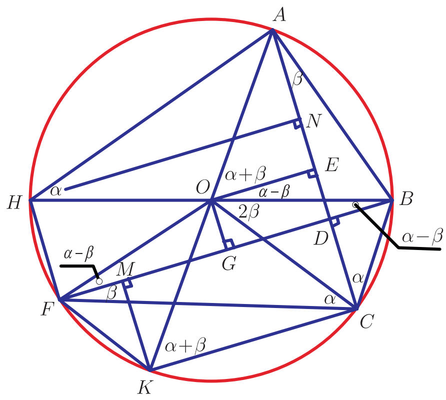

圖14

儘管上述方法能夠符合阿布・韋發的原意, 但我們很難用它來推導更多的三角公式。事實上, 我們可以用更好的方法來推導更多的公式。在直徑爲1的圓 O 中, 仍取 $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha + \beta < \pi$, $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$, $BD \perp AC$。作 OE 垂直於 AC, 垂足爲 E, 延長 BD 交圓於 F, 作 OG 垂直於 BF, 垂足爲 G。延長 BO 和 AO, 分別交圓於 H 和 K, 分別過 H 、K 作 AC 和 BF 的垂線, 垂足爲 N 、M。連接 CK 、KF 、CF 、OF 、HF 和 AH , 如圖14所示。易知 $\angle OBF = \angle OFB = \angle EOB = \alpha - \beta$, $\angle AKC = \alpha + \beta$, $\angle OFC = \angle OCF = \alpha$, $FC = \cos\alpha$, 從而有

$$AC = \sin(\alpha+\beta), \quad HF = \sin(\alpha-\beta), \quad KC = \cos(\alpha+\beta), \quad BF = \cos(\alpha-\beta),$$
$$AD = \sin\alpha\cos\beta, \quad CD = \cos\alpha\sin\beta, \quad FD = \cos\alpha\cos\beta, \quad BD = \sin\alpha\sin\beta$$

於是由 $AC = AD + DC$, 得和角正弦公式 (4); 由 $HF = AD - AN = AD - DC$, 得差角正弦公式 (6); 由 $KC = FD - FM = FD - BD$, 得和角余弦公式 (5); 由 $FB = FD + BD$, 得差角余弦公式 (7)。

另一方面, 因

$$AE = CE = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta), \quad ED = OG = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),$$
$$BG = FG = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta), \quad GD = OE = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta),$$

故由 $AD = AE + ED$, $CD = CE - ED$, $FD = FG + GD$, $BD = BG - GD$ 分別得積化和差公式 (10)-(13)。

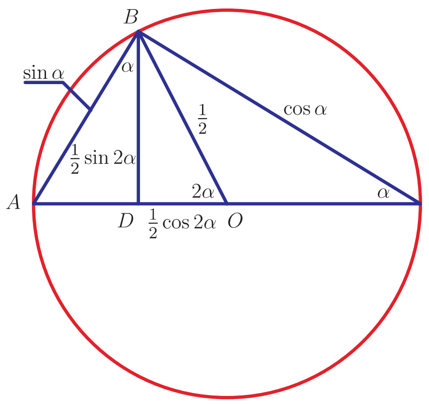

圖15

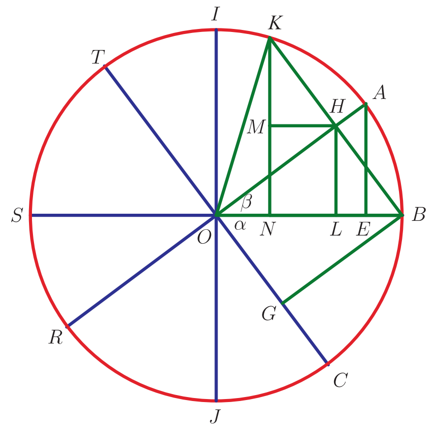

圖16

當 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 時, 四個積化和差公式成了倍角正弦和餘弦公式。如圖15所示, AC 是圓 O 的直徑, $AC=1$, $\angle AOB=2\alpha$。於是在三角形 BDC 中, 由 $\sin\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$ 和 $\cos\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}{\cos\alpha}$ 分別得

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{29}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \tag{30}$$

在三角形 BDA 中, 由 $\sin\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)}{\sin\alpha}$ 和 $\cos\alpha=\dfrac{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ 分別得

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \tag{31}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

在三角形 ABC 中, 由射影定理和面積公式分別可得

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\\
&\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\\
&\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha\;;\\
&\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha.
\end{aligned} \tag{32}$$

事實上, Woods (1936)、Dorwart (1942) 等即曾作過類似的推導。

4. 比爾吉與克拉維斯

早期三角學的歷史是與天文學密切相關的。事實上, 在15世紀德國數學家雷格蒙塔努斯 (Regiomontanus, 1436 ～ 1476) 撰寫《論各種三角形》之前的歐洲, 三角學一直依附於天文學, 爲天文計算服務。1510左右, 德國天文學家維納 (J. Werner, 1468 ～ 1522) 爲了簡化天文計算, 率先使用了後人以其名字命名的三角公式 (12)。例如, 要計算98,436 × 79,253, 可設 $\sin\alpha = 0.49218$, $\sin\beta = 0.79253$。從三角函數表中查得 α 和 β, 然後又從三角函數表中查得 $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, 根據維納公式, 即得 $2\sin\alpha\sin\beta$。將小數改成整數, 就得到所求的乘積。

這種方法被稱爲"加減術", 主要爲在天文臺從事研究工作的天文學家所使用。16世紀丹麥著名天文學家弟谷 (Tycho Brahe, 1546 ～ 1601) 以及他的助手們就曾使用過這種方法, 他們還知道公式 (13)。但弟谷的"加減術"知識是否源於維納的手稿, 公式 (12) 是不是他自己的發現, 仍有待數學史家的考證。"加減術"成了納皮爾 (J. Napier, 1550 ～ 1617) 和比爾吉 (J. Burgi, 1552 ～ 1632) 的對數思想的先驅。

公式 (12) 和 (13) 最早正式發表於16世紀著名天文學家烏爾索斯 (N. R. Ursus, 1551 ～ 1600) 於1588年出版的《天文學基礎》一書中。烏爾索斯告訴我們, 瑞士著名鐘錶匠、對數發明者之一比爾吉給出過公式 (12) 的幾何證明。烏爾索斯還說, 從比爾吉的證明中可以很容易地推導出公式 (13)。Thoren(1998) 認爲, 公式 (13) 最早可能就是比爾吉本人發現並證明的, 時間約在1585年左右。可惜比爾吉的具體證明沒有流傳下來。

16世紀德國著名數學家和天文學家克拉維斯 (C. Clavius, 1537 ～ 1612) 讀過烏爾索斯的著作, 但他似乎對維納、比爾吉、弟谷等人的工作一無所知, 因而把公式 (12) 和 (13) 錯誤地歸功於烏爾索斯的發現。在出版於1593年的天文著作《星盤》(*Astrolabium*) 中, 克拉維斯分三種情形對公式 (12) 作了全面而清晰的證明 (Smith, 1959)。

(1) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

如圖16所示, 在單位圓 O 中, $\angle AOB=\beta$, $\angle BOC=\alpha$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$。過點 B 作 OA 的垂線, 垂足爲 H, 交圓於 K; 又作 OC 的垂線, 垂足爲 G。分別過點 A 、H 和 K 作 OB 垂線, 垂足分別爲 E 、L 、N。於是

$$\frac{OA}{AE}=\frac{OH}{HL}=\frac{BG}{\frac{1}{2}KN}$$

即

$$\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\beta}=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}.$$

於是得

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\beta,$$

或即

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta.$$

(2) $\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$

如圖17所示。在單位圓 O 中, $\angle AOB=\beta$, $\angle COD=\alpha$, $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, $OA\perp OD$。過點 C 作 OA 的垂線, 垂足爲 H , 交圓於 K; 分別過點 A 、H 、K 作 OB 垂線, 垂足分別爲 E 、L 、N; 又過點 C 作 OB 、OD 、KN 、HL 的垂線, 垂足分別爲 F 、G 、P 、U。因 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$, 故 $\angle OCF=\alpha+\beta$; 因 $\angle KON=\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta$, 故 $\angle OKN=\alpha-\beta$。於是, 在直角三角形 COG 、AOE 、OCF 和 KON 中分別有:

$$CG=\sin\alpha,\quad OG=\cos\alpha,\quad AE=\sin\beta,\quad OE=\cos\beta;$$
$$OF=\sin(\alpha+\beta),\quad CF=\cos(\alpha+\beta),\quad ON=\sin(\alpha-\beta),\quad KN=\cos(\alpha-\beta).$$

於是

$$\frac{OA}{AE}=\frac{OH}{HL}=\frac{CG}{HU-LU}=\frac{CG}{\frac{1}{2}(KN-CF)},$$

即

$$\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]} \tag{33}$$

此即公式 (12)。

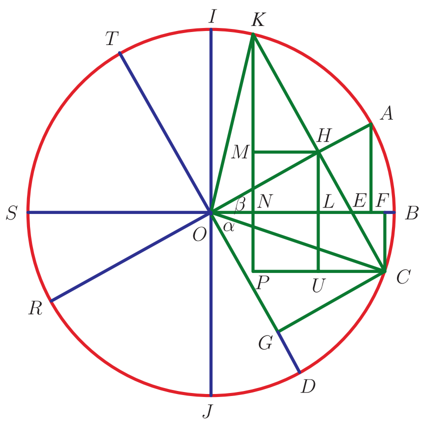

圖17

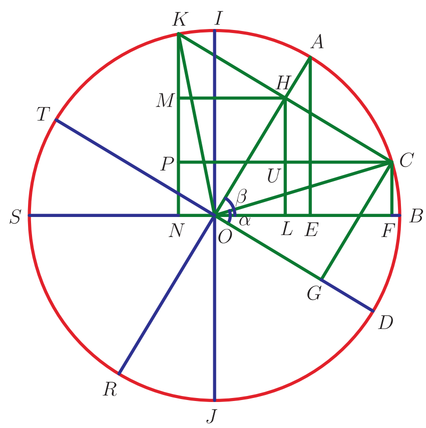

圖 18

克拉維斯只證明了公式 (12), 但我們完全可以進一步證明其他三個積化和差公式 (10)、(11) 和 (13)。在圖17中, 從

$$\frac{OA}{OE}=\frac{OH}{OL}=\frac{CG}{\frac{1}{2}(OF+ON)}$$

得

$$\frac{1}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]} \tag{34}$$

即得公式 (10); 從

$$\frac{OA}{OE}=\frac{HC}{UC}=\frac{OG}{\frac{1}{2}(OF-ON)}$$

得

$$\frac{1}{\sin\beta}=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]} \tag{35}$$

此即公式 (11); 從

$$\frac{OA}{OE}=\frac{CH}{HU}=\frac{OG}{\frac{1}{2}(KN+CF)}$$

得

$$\frac{1}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]} \tag{36}$$

此即公式 (13)。

(3) $\alpha+\beta>\dfrac{\pi}{2}$

如圖18所示。在單位圓 O 中, $\angle AOB=\beta$, $\angle COD=\alpha$, $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, $OA\perp OD$。作圖同上。此時, 因 $\angle BOC=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}$, 故 $\angle OCF=\pi-(\alpha+\beta)$; 因 $\angle KON=\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta$ $(\alpha>\beta)$ 或 $\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$ $(\alpha<\beta)$, 故 $\angle OKN=\alpha-\beta$ $(\alpha>\beta)$ 或 $\beta-\alpha$ $(\alpha<\beta)$。因此, 在直角三角形 OCF 和 KON 中分別有: $OF=\sin(\alpha+\beta)$, $CF=-\cos(\alpha+\beta)$, $ON=\sin(\alpha-\beta)$ $(\alpha>\beta)$ 或 $-\sin(\alpha-\beta)$ $(\alpha<\beta)$, $KN=\cos(\alpha-\beta)$。於是

$$\frac{OA}{AE}=\frac{OH}{HL}=\frac{CG}{HU+CF}=\frac{CG}{\frac{1}{2}(KN+CF)},$$

故仍有公式 (31) 成立。類似可導出其他三個公式。

或許, 克拉維斯的方法在今天看來顯得很繁瑣, 但我們必須知道: 17世紀, 特別是英國數學家沃利斯 (J. Wallis, 1616 ∼ 1703) 以前, 三角公式往往是用比例形式來表達的, 因此, 克拉維斯利用相似比來導出比例形式的積化和差公式, 也就不足爲奇了。

實際上, 我們完全可以將克拉維斯改進得更簡單一些, 使其適合於今天的課堂教學; 同時, 我們還可以進一步導出更多的三角公式。考慮 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ 的情形, 在圖17中, 作 $HM\perp KN$ 於 M, 易得:

$$
\begin{aligned}
&OL=OH\cos\beta=CG\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta,\\
&HL=OH\sin\beta=CG\sin\beta=\sin\alpha\sin\beta,\\
&UC=HC\sin\beta=OG\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta,\\
&HU=HC\cos\beta=OG\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta,\\
&OF=\sin(\alpha+\beta),\quad CF=\cos(\alpha+\beta),\\
&ON=\sin(\alpha-\beta),\quad KN=\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}
$$

因此, 由 $OF=OL+UC$, $CF=HU-HL$, $ON=OL-NL=OL-UC$, $KN=KM+MN=HU+HL$, 分別得和角與差角公式 (4)-(7); 由 $OL=\frac{1}{2}(OF+ON)$, $UC=\frac{1}{2}(OF-ON)$, $HL=\frac{1}{2}(KN-CF)$, $HU=\frac{1}{2}(KN+CF)$, 分別得積化和差公式 (10)-(13)。

類似可證 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$ 的情形。

5. 韋達

與克拉維斯同時代的法國數學家韋達 (F. Viète, 1540 ∼ 1603), 是歷史上第一個將代數方法引入三角學的數學家, 他系統地利用所有的六種三角函數來解平面和球面三角形; 最早研究一般的 n 倍角公式; 最早利用三倍角余弦公式來解三次方程。但韋達在推導三角公式時, 仍然經常使用幾何方法。韋達給出了同角三角函數更多的關係式:

$$1:\sec\alpha=\cos\alpha:1=\sin\alpha:\tan\alpha\ ; \tag{37}$$

$$\csc\alpha:\sec\alpha=\cos\alpha:1=1:\tan\alpha\ ; \tag{38}$$

$$1:\csc\alpha=\cos\alpha:\cot\alpha=\sin\alpha:1 \tag{39}$$

這些關係式從圖11中都可以直接得到。在圖19中, 設 $BD=1$, 則得韋達的另外兩個等式:

$$\csc\alpha+\cot\alpha=\cot\frac{\alpha}{2}\ , \tag{40}$$

$$\csc\alpha-\cot\alpha=\tan\frac{\alpha}{2}. \tag{41}$$

值得注意的是, 韋達用幾何方法推導了和差化積公式 (15)。如圖18, 設 $\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\beta$ 是單位圓 O 的兩個圓心角。不妨設 α 和 β 爲銳角, 且 $\alpha>\beta$。過 A、C 分別作 OB 的垂線 AD、CE, 垂足爲 D、E。延長 AD 交圓 O 於 G, 連 OG、CG。又作 $CF\perp AG$, 垂足爲 F。又過圓心 O 作 AC 的垂線, 垂足爲 H, 作 $HI\perp OB$, 垂足爲 I。則因 $AH=CH$,

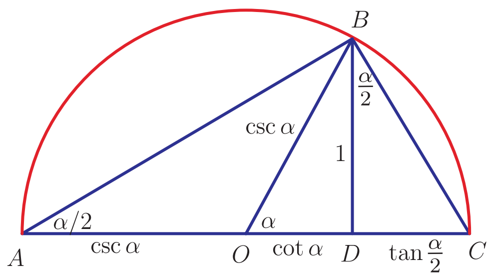

圖19

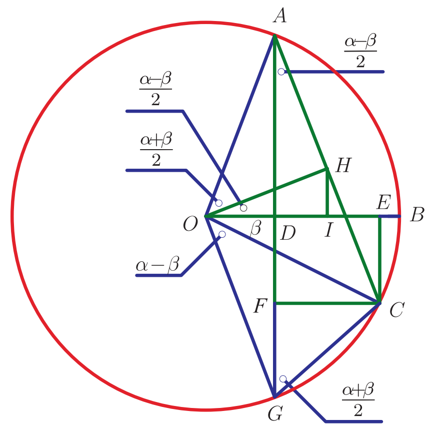

圖20

故得 $DI=IE$。於是

$$\sin\alpha+\sin\beta=AD+CE=AF=AC\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

利用韋達的上述方法, 我們也可以證明其餘的和差化積公式 (16)-(18):

$$\sin\alpha-\sin\beta=AD-CE=DG-DF=FG=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=OD-OE=-DE=-CF=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ;$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2OI=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

若將韋達的方法用於圖14, 則延長 OE, 交圓於 S; 分別過點 O 和 S 作 AB 的垂線, 垂足分別爲 T 和 R, 如圖21所示。於是三角形 ABS 就是韋達圖20中的三角形 AGC。

至於和角與差角公式以及積化和差公式, 我們可以用從帕普斯命題導出三角公式的方法來推導: 如圖22, 分別過點 A、D、G 作 OC 的垂線, 垂足分別爲 M、N、P; 分別過點 D、G 作 AM 的垂線, 垂足分別爲 R、S, GS 與 DN 的延長線交於 T。則由 $AM=AR+DN$, $OM=ON-DR$, $GP=AR-DN$ 和 $OP=ON+NP=ON+DR$ 即得公式 (4)-(7); 由 $AR=\frac{1}{2}(AM+GP)$, $DN=\frac{1}{2}(AM-GP)$, $DR=\frac{1}{2}(OP-OM)$ 和 $ON=\frac{1}{2}(OP+OM)$ 分別得 (10)-(13)。

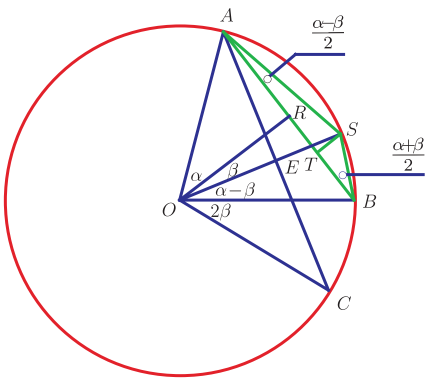

圖21

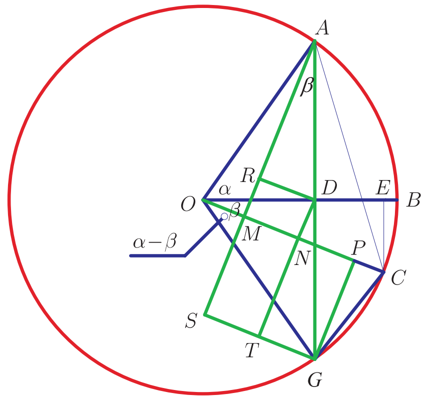

圖22

6. 餘論

從托勒密定理, 到帕普斯的幾何命題, 到阿布·韋發的和角與差角公式, 再到維納、比爾吉和克拉維斯的積化和差公式以及韋達的和差化積公式, 三角公式的早期歷史表明: 幾何定理乃是三角公式的源泉, 幾何方法是推導三角公式不可或缺的方法。如果我們接受歷史發生原理, 那麼, 數學歷史就是一面鏡子, 是 M · 克萊因所說的"教學之指南"(Albers & Alexanderson, 1985), 因而我們在教材編寫和教學設計上, 就有必要更多地使用幾何方法。

三角公式的早期歷史, 同時也爲我們提供了很好的教學材料: 阿布 · 韋發和韋達可能使用過的圖11, 完全可以用於同角三角函數關係式的教學; 托勒密定理可以用於和角與差角公式的教學; 帕普斯的幾何命題則可以用於和角、差角、積化和差、和差化積等公式的教學; 阿布 · 韋發、克拉維斯、韋達等數學家的方法 (本人的或我們復原的), 不僅可以被改進成合適的教學素材, 而且也大大開闊了我們的視野, 加深了我們對三角公式的理解。

最後, 我們必須指出, 在韋達以前, 由於天文學家和數學家過於依賴幾何方法, 因而三角公式的發展受到了極大的限制。韋達首次將代數方法引入三角學, 從而最早獲得了一般的 n 倍角公式, 這對於一個僅僅依靠幾何方法的古代數學家而言是難以想像的。對此, 韋達曾驚歎說: "對於等分角的分析涉及到了迄今無人發現的秘密! " (Cajori, 1926) 正是這個秘密的發現, 使韋達得到了解三次方程的新工具, 並成功解出了比利時數學家羅曼努斯 (A. Romanus, 1561 ∼ 1615) 於1593年提出的45次方程。更讓16世紀以前的數學家無法想像的是, 在18世紀歐拉的《無窮分析引論》中, 三角公式層出不窮, 但已見不到任何幾何的影子, 這大概連韋達也是始料不及的。如果說幾何學是三角學的母體, 那麼代數學則是三角學的翅膀。如果借用晚淸數學家華蘅芳 (1833 ∼ 1902)"傍晚之星"的比喻, 那麼16世紀以前依存于幾何學母體的三角公式仿佛"初見一點, 旋見數點, 又見數十點", 而16世紀以後插上代數學翅膀的三角公式則是"燦然佈滿天空"了。

參考文獻

1. Albers, D. J. and Alexanderson, G. L. (1985), *Mathematical People: Profiles and Interview*, Boston: Birkhauser.
2. Boyer C. B. (1968), *A History of Mathematics*, New York: John Wiley & Sons.
3. Brendan, B. T. (1965), How Ptolemy constructed trigonometry tables, *Mathematics Teacher*, **58**, 141-149.
4. Cajori, F. (1917), *A History of Elementary Mathematics*, New York: The Macmillan Company.
5. Cajori, F. (1926), *A History of Mathematics*, New York: Macmillan.
6. Dorwart, H. L. (1942), Values of the trigonometric ratios of $\pi/8$ and $\pi/12$, *American Mathematical Monthly*, **49**, 324-325.
7. Ernest, P. (1998), The history of mathematics in the classroom, *Mathematics in School*, **27**(4), 25.
8. Eves, H. (1983), *An Introduction to the History of Mathematics*, Philadelphia: Saunders College Publishing.
9. Grattan-Guinness, I. (1994), An overview of trigonometry and its functions, In: Grattan -Guinness, I. (ed.). *Encyclopaedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*. London: Routledge, 499-503.
10. Hallerberg, A. et al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, Washington: NCTM.
11. Heath, T. L. (1921), *A History of Greek Mathematics*, London: Oxford University Press.
12. Katz, V. (1998), *A History of Mathematics: An Introduction*, Massachusetts: Addison-Wesley.
13. Katz, V. (2000a), Trigonometry in the historical order, In: Fauvel, J. & van Maanen, J. (eds.). *History in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
14. Katz, V. (2000b), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, The Mathematical Association of America.
15. Kline, M. (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York: Oxford University Press.
16. Kline, M. (1958), The ancients versus the moderns: a new battle of the books, *Mathematics Teacher*, **51**(6), 418-427.
17. Kline, M. (1970), Logic versus pedagogy, *American Mathematical Monthly*, **77**(3), 264-282.
18. Smith, D. E. (1925), *History of Mathematics*(Vol.2), Boston: Ginn & Company.
19. Smith, D. E. (1959), *A Source Book in Mathematics*(Vol.1), New York: Dover Publications.
20. Thoren V. E. (1998), Prosthaphaeresis revisited, *Historia Mathematica*, **15**, 32-39.
21. Woods, R. (1936), The trigonometric function of half or double an angle, *American Mathematical Monthly*, **43**, 174-175.
22. Young, F. H. (1957), The addition formulas, *Mathematics Teacher*, **50**, 5-48.

—本文作者現任教於上海華東師範大學數學系—