數學傳播 31卷3期, pp. 13-16

連續整數冪次和公式之指數生成函數探討

吳松霖 · 李國寧 · 胡豐榮 · 許天維

一. 引言

關於連續整數冪次和 $S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 之公式解探討, 近年來引起諸多研究者興趣, 紛紛從各種不同的角度, 給予公式簡易證明, 使許多讀者能夠學習到許多「有中生新」之證明手法 ([2]、[4]、[5]、[6]、[8])。

在這樣熱烈探究 $S_k(n)$ 之公式解的情況下, 要再對 $S_k(n)$ 之公式解證明, 賦予新面貌, 似乎是困難的差事, 然於茶餘飯後之際, 偶見 [7]一文, 利用生成函數的求和法, 探究 $1^k+2^kx+3^kx^2+\cdots+n^kx^{n-1}$ 之求和問題時, 突然靈機一動, 我們考慮 $S_k(n)$ 之指數生成函數 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}S_k(n)\frac{T^k}{k!}$。指數生成函數之用語, 乃參考 [1], p.60。

透過簡單的計算可以發現:

$$\sum_{k=0}^{\infty}S_k(n)\frac{T^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=1}^{n}l^k\Big)\frac{T^k}{k!}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(lT)^k}{k!}=\sum_{l=1}^{n}e^{lT}=\frac{e^{T(n+1)}-e^T}{e^T-1}.$$

另一方面, 由於 [8]中, 將 $S_k(n)$ 擴充至 R 映到 R 之函數, 其定義爲 $S_k(x)=\dfrac{1}{k+1}\Big\{(x+1)^{k+1}-x-1-\displaystyle\sum_{i=2}^{k}C_i^{k+1}S_{k-i+1}(x)\Big\}$, $k\geq 2$, $S_1(x)=\dfrac{x(x+1)}{2}$, 我們很自然地聯想到如何計算 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}S_k(x)\frac{T^k}{k!}$ 之問題。根據上面的計算, 我們可能猜得到答案爲 $\dfrac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}$, 但如何給予嚴格證明, 似乎變成"連續整數冪次和公式「有中生新」證明"腦力激盪外的另一項新考驗。

基於上述動機, 加上 $S_k(x)$ 之指數生成函數, 可以將連續整數冪次和公式, 連結到函數解析領域。因此, 計算 $S_k(x)$ 之指數生成函數變成極爲重要的課題。

二. 泰勒展開式

爲了計算 $S_k(x)$ 之指數生成函數, 首先, 我們將 $\dfrac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}$ 看成是 T 的函數, 然後考慮 $\dfrac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}$ 在 $T=0$ 之泰勒展開式。令 $\dfrac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\hat{S}_k(x)\dfrac{T^K}{k!}$, 這裏 $\hat{S}_k(x)=\dfrac{d^k}{dT^k}\Big(\dfrac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}\Big)\Big|_{T=0}$。

很明顯地, 如果我們可以證明: 對任意固定的 k 與 x, $\hat{S}_k(x)=S_k(x)$, 則大功即可告成。

在還沒有正式證明 $\hat{S}_k(x)=S_k(x)$ 之前, 我們再看一個 T 的函數之泰勒展開式, 即 $\dfrac{T}{e^T-1}$ 在 $T=0$ 之展開, 令 $\dfrac{T}{e^T-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}B_k\dfrac{T^k}{k!}$, 這裡 $B_k=\dfrac{d^k}{dT^k}\Big(\dfrac{T}{e^T-1}\Big)\Big|_{T=0}$。實際計算發現 $B_{2k+1}=0,\ \forall\ k\in N$。

三. $\hat{S}_k(x)$ 之相關性質

性質 1: $\dfrac{d^2}{dx^2}\hat{S}_k(x)=\dfrac{d}{dx}k\hat{S}_{k-1}(x),\ \forall\ k\in N$。

證明: 因爲 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\hat{S}_k(x)\dfrac{T^k}{k!}=\dfrac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}$, 所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\hat{S}_k(x)\frac{T^k}{k!}=\frac{d}{dx}\Big(\frac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}\Big)=\frac{Te^{T(x+1)}}{e^T-1},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\hat{S}_k(x)\frac{T^k}{k!}=\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{e^{T(x+1)}-e^T}{e^T-1}\Big)=\frac{T^2e^{T(x+1)}}{e^T-1}.$$

又因爲 $\hat{S}_0(x)=x$, 所以

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\hat{S}_k(x)\Big)\frac{T^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\hat{S}_{k-1}(x)\Big)\frac{T^k}{k!}=T\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\hat{S}_{k+1}(x)}{k+1}\Big)\frac{T^k}{k!}.$$

因此 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{d^2}{dx^2}\Big(\dfrac{\hat{S}_{k+1}(x)}{k+1}\Big)\dfrac{T^k}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{d}{dx}\Big(\hat{S}_k(x)\Big)\dfrac{T^k}{k!}$。即 $\dfrac{d^2}{dx^2}\Big(\hat{S}_{k+1}(x)\Big)=(k+1)\dfrac{d}{dx}\hat{S}_k(x)$, $\forall\ k=0,1,2,\ldots$, 故得證。

性質 2: $\dfrac{d}{dx}\hat{S}_{2k+1}(x)=(2k+1)\hat{S}_{2k}(x),\ \forall\ k\in N$。

證明: 由性質1

$$\Rightarrow\frac{d^2}{dx^2}\hat{S}_{2k+1}(x)=(2k+1)\frac{d}{dx}\hat{S}_{2k}(x),\ \forall\ k=0,1,2,\ldots.$$

因爲

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{S}'_k(-1)\frac{T^k}{k!} = \frac{T}{e^T - 1} \tag{3.1}$$

所以 $\hat{S}'_k(-1) = B_k, \Rightarrow \hat{S}'_{2k+1}(-1) = B_{2k+1} = 0, \forall\, k \in N$。

又因爲

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{S}_k(-1)\frac{T^k}{k!} = \frac{1-e^T}{e^T - 1} = -1,$$

所以

$$\hat{S}_k(-1) = 0,\ \forall\, k \in N \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_{-1}^{x} \hat{S}''_{2k+1}(y)dy = \int_{-1}^{x} (2k+1)\hat{S}'_{2k}(y)dy,\\
&\Rightarrow \hat{S}'_{2k+1}(x) - \hat{S}'_{2k+1}(-1) = (2k+1)\Big(\hat{S}_{2k}(x) - \hat{S}_{2k}(-1)\Big),\ \forall\, k \in N.\\
&\Rightarrow \hat{S}'_{2k+1}(x) = (2k+1)\hat{S}_{2k}(x),\ \forall\, k \in N \text{ 故得證。}
\end{aligned}$$

四. 結語

根據 $\dfrac{e^{T(x+1)} - e^T}{e^T - 1}$ 在 $T = 0$ 之泰勒展開式, 吾人不難計算出 $\hat{S}_0(x) = x$, $\hat{S}_1(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$, $\hat{S}_2(x) = \dfrac{x(x+1)(2x+1)}{6}$。然而對 $k \geq 3$, $\hat{S}_k(x)$ 之計算, 似乎就變得很繁瑣。雖然逐一計算 $\hat{S}_k(x)$, 再將計算結果與 $S_k(x)$ 之定義對照, 可以淸楚驗證 $\hat{S}_k(x) = S_k(x)$ 之事實, 但是如同前述, 對 k 很大的時候, 逐一比對 $\hat{S}_k(x)$ 與 $S_k(x)$ 是曠日費時的工作。

所幸, 在前節中, 我們得到 $\hat{S}_k(x)$ 具有性質1與性質2。然而根據 $S_k(x)$ 之定義, $S_k(x)$ 亦具有性質1與性質2([8])。據此, 吾人可以得證 $\hat{S}_k(x) = S_k(x)$, $\forall\, x \in R$, $k \in N$。也就是 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x)\frac{T^k}{k!} = \frac{e^{T(x+1)} - e^T}{e^T - 1}$。

後記

茲以數學歸納法, 補充 $\hat{S}_k(x) = S_k(x), \forall\, x \in R,\ k \in N$ 之證明如下:

當 $k = 1$ 時, 根據性質2, 可以得到

$$\hat{S}_3(x) - \hat{S}_3(-1) = 3\int_{-1}^{x} \hat{S}_2(y)dy = 3\int_{-1}^{x} \frac{y(y+1)(2y+1)}{6}dy = \frac{x^2(x+1)^2}{4},$$

因爲 $\hat{S}_3(-1)=0$ (根據公式 (3.2)), 且 $S_3(x)=\dfrac{x^2(x+1)^2}{4}$ (根據[8], p.31), 所以 $\hat{S}_3(x)=S_3(x)$, $\forall\ x\in R$。

假設 $k=p>1$ 時, $\hat{S}_p(x)=S_p(x)$, $\forall\ x\in R$ 成立。現在考慮 $k=p+1$ 時, 根據公式 (3.1) 與 [8], p.32中之公式 (5), 我們可以得到

$$\hat{S}_l'(-1)=S_l'(-1)=B_l,\ \forall\ l\in N.$$

又根據性質1, 我們有

$$\begin{aligned}\hat{S}'_{p+1}(x)-\hat{S}'_{p+1}(-1)&=p\int_{-1}^{x}\hat{S}'_p(y)dy=p\Big\{\hat{S}_p(x)-\hat{S}_p(-1)\Big\}\\&=p\{S_p(x)-S_p(-1)\}=S'_{p+1}(x)-S'_{p+1}(-1)\end{aligned}$$

所以 $\hat{S}'_{p+1}(x)=S'_{p+1}(x)$, $\forall\ x\in R$, 再次積分得

$$\hat{S}_{p+1}(x)-\hat{S}_{p+1}(-1)=S_{p+1}(x)-S_{p+1}(-1),\ \forall\ x\in R.$$

另外, 根據公式 (3.2) 與 [8], p.31之公式 (3), 可得 $\hat{S}_{p+1}(-1)=S_{p+1}(x)$, $\forall\ x\in R$, 故 $\hat{S}_{p+1}(x)=S_{p+1}(x)$, $\forall\ x\in R$。因此, 根據數學歸納法得證 $\hat{S}_k(x)=S_k(x)$, $\forall\ x\in R$, $k\in N$。

參考文獻

1. 文耀光、潘健強 (民93), 生成函數與投信問題的解, 數學傳播, 第二十八卷第二期, 59-62。
2. 李政豐 (民91), 連續整數冪次和公式的另類思考, 數學傳播, 第二十六卷第二期, 82-93。
3. 李宗元 (民67), 閒話 $1^k+2^k+\cdots+n^k$, 數學傳播, 第二卷第四期, 12-14。
4. 何景國 (民71), 求 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^k$ $(k=1,2,3)$ 的幾種方法, 數學傳播, 第六卷第四期, 93-97。
5. 陳國裕 (民88), 如何求出 $1^2+2^2+\cdots+n^2$, 數學傳播, 第二十三卷第一期, 76-84。
6. 傅海倫 (民89), 再談如何求出 $1^2+2^2+\cdots+n^2$, 數學傳播, 第二十四卷第二期, 62-64。
7. 蔡聰明 (民87), 生成函數的求和法, 數學傳播, 第二十二卷第四期, 54-58。
8. 蘇益弘、胡豐榮、許天維 (民94), 從連續整數冪次和公式引發之擴充想法, 數學傳播, 第二十九卷第二期, 30-33。

—第1、2位作者爲台中教育大學研究生, 第3、4位作者服務於台中教育大學數學教育學系—