數學傳播 31卷3期, pp. 3-12

Read the Masters !

碧　天

(一)

學數學的人大概沒有不知 Abel 大名的。

Niels Henrik Abel (1802～1829) 是挪威人 [注1]。十九世紀初期的挪威是半獨立國家, 被迫與丹麥合併; 1814 年拿破崙遜位之後, 又被迫與瑞典合併。Abel 在 Christiania (今挪威首都 Oslo 的舊稱) 唸中學, 大部份科目表現平平, 唯獨數學成績出類拔萃, 深得數學教師 B. M. Holmboe (1795～1850) 的激賞, 私下教他許多課程範圍之外的高等數學。1821～1825 年 Abel 在 Christianian Univ. 唸書。在這裏, 他遇到了 C. Hansteen 教授 (1784～1873)。Hansteen 教授雖然十分賞識 Abel, 他本人的數學水平也不高。幸好 Christianian Univ. 圖書館的數學書籍期刊十分齊全, Abel 在這個時期讀過不少牛頓 (Isaac Newton, 1643～1727), L. Euler (1707～1783), J.-L. Lagrange (1736～1813), S. Lacroix (1765～1843), G. Monge (1746～1818), A.-M. Legendre (1752～1833), P.-S. Laplace (1749～1827) 與偉大的高斯 (C. F. Gauss, 1777～1855) 等人的著作。此外, 他還從圖書館借了不少當時法國出版的書籍與期刊。

在挪威已經沒有什麼數學好學了, Abel 剛好得到挪威政府的一項獎學金, 可供他到歐洲大陸遊學之用。1825 年 9 月 Abel 與幾個同樣獲得挪威政府獎學金的朋友結伴出國 (他是唯一念數學的), 直到 1827 年 5 月才回到挪威。Abel 這趟「奧德賽之旅」並非兩手空空的到名山寶地拜師求藝, 他是有備而來的。在啓程之前, 他已準備了幾篇論文, 他研究五次方程式根式解的問題、橢圓積分、無窮級數已有豐富的經驗。他深信這些研究成果的重要性, 只是他亟需數學大師的賞識提拔。

1825 年年底他在柏林遇到 A. L. Crelle (1780～1855)。Crelle 是個工程師, 負責督造普魯士的第一條鐵路 (從柏林到波茨坦的鐵路)。Crelle 對數學極有興趣, 他在事業成功之後, 就想辦一份數學期刊, 使德文世界也擁有一份像 J. Gergonne 在 1810 年創辦的 “Annales de Mathématiques pures et appliquées” 那麼好的數學期刊。

Crelle 與 Abel 會面不久, 立刻認識這個年輕人的才華, 他也瞭解創辦一份數學期刊的時機 已經成熟了。1826 年二月 Crelle 的雜誌 "Journal für die reine und angewandte Mathematik"創刊。從第一期到第四期 (1826∼1829), Crelle 雜誌刊登許多 Abel 與 Jacobi 的論文。Abel 死於 1829 年, 但是第五期 (1830) 還有一篇 Abel 的論文。C. G. J. Jacobi (1805∼1851) 是 Abel 在橢圓函數研究的競爭者, 當時是 Königsberg Univ. 的教師 [注2]。

J. Steiner (1796∼1863) 也是 Crelle 雜誌從創刊就積極投稿的數學家, 他是十九世紀有名的綜合幾何學者, 後來成爲柏林大學的副教授, 但是 Steiner 在 1826 年前後仍客居柏林, 以擔任私人家庭教師維生。從第三期開始, Gauss (哥廷根大學)、G. P. L. Dirichlet (1805∼1859, 當時是 Breslau Univ. 的教授)、A. F. Möbius (1790∼1868, 當時是 Leipzig Univ. 的教授)、J. Plücker (1801∼1868, 已在 Bonn Univ. 工作, 但還不是教授) 等人的文章陸續刊登在 Crelle 雜誌 。可以說, 短短幾年之間 Crelle 這份雜誌已建立其聲譽。相對而言, Gergonne 的期刊由於 Gergonne 本人在 1830 年出任 Montpellier Univ. 校長, 繁忙的行政工作迫使他不得不在 1832 年停止這份雜誌。爲了法國數學的榮耀, 也爲了與 Crelle 雜誌競爭, J. Liouville (1809∼1882) 在 1836 年創辦 "Journal de Mathématiques Pures et Appliquées"。經過 180 年的人事滄桑, Crelle 雜誌與 Liouville 雜誌仍繼續發行, 它們維持一貫的高水平作風, 是這 180 年來許多傑出數學家投稿時優先考慮的對象。

(二)

Abel 在 Crelle 雜誌初展身手之後, 在 1826 年二月中旬離開柏林, 與那幾個挪威學生繼續他們的遊學之旅。他經過 Freiberg、Dresden、Prague、Vienna、Venice、Innsbruck 與 Basel (他還登上瑞士的 Rigi Mountain), 終於在 1826 年七月來到當時的數學聖地 — 巴黎。

從十八世紀末期, 除了 Gauss 隱居於 Hanover 公國 (選侯國) 的哥廷根大學之外, 歐洲有名的數學家幾乎都聚集在巴黎。Abel 來到巴黎時, 法國大革命時期重量級的數學家 Lagrange 與 Monge 都已去世。Laplace 與 Legendre 垂垂老矣, 寫過許多知名教科書的 Lacroix、擔任巴黎科學院秘書的 J. Fourier (1768∼1830) 都已經是六十歲上下的人。這時巴黎科學界的明星無疑的是 A. L. Cauchy (1789∼1857) 與 S. Poisson (1781∼1840)。Abel 在寫給他的老師 Holmboe 的信中, 這麼描述他們,

「His (Cauchy) things are excellent, but he writes very obscurely. He has published a series of papers entitled "Exercises des Mathématiques". I buy and read them diligently. Cauchy is immoderately Catholic and bigoted, a very strange thing for a mathematician. Otherwise he is the only one who at present works in pure mathematics; Poisson, Fourier, Ampére, etc. are exclusively occupied by magnetism and other physical theories. Poission is a short man with a pretty belly; he carries himself with dignity, as does Fourier. Lacroix is quite bald and aged.」(見 [3, p.147])

Abel 似乎已看穿當時巴黎數學界名過其實的弱點。但是他必須在這裏成名, 才有機會讓挪威政府任命他爲大學教授。雖然 Crelle 那麼賞識 Abel 的才華 (第一期的 Crelle 雜誌刊登七篇 Abel 的論文, 其中五篇是較長的論著, 兩篇是短文), Abel 卻把他最好的論文留給巴黎科學院。他花了將近三個月的時間把他在橢圓積分的研究成果寫成一篇論文, 寄到巴黎科學院。這篇論文的主要內容就是我們今天習稱的「Abel 加法定理」(請參考 MIT 教授 S. L. Kleiman 關於 Abel 定理的分析 [2, pp.395-440]。巴黎科學院指定 Cauchy 與 Legendre 爲論文審查人, Cauchy 主審, Legendre 副審。

從 1826 年 10 月底寄出論文之後, Abel 一直焦急的等待巴黎科學院的回音。結果是「音訊全無」。巴黎的日子, 對 Abel 而言, 是徹底的失望。焦慮與貧窮的 Abel 終於病倒了, 他發燒咳嗽, 有人懷疑他已染上肺病。在巴黎度過淒苦的聖誕節, Abel 獨自回到柏林尋求友情的慰藉。Crelle 邀請 Abel 擔任 Crelle 期刊的編輯, 這樣他就擁有一份固定的薪水。可是 Abel 拒絕, 他思念故鄉的親人, 他恨不得立刻回到挪威。

Abel 在 1827 年五月底回到挪威。由於他沒有在巴黎科學院會誌出版他的論文, 挪威的學術界大老認爲 Crelle 雜誌只是一份私人出版的新近期刊, 沒有足夠的學術聲譽, 因此挪威政府認定 Abel 的數學之旅是個失敗的個案, 沒有達成預定目標, 也就不爲他安排任何工作。Abel 只得在大學代課, 或以擔任私人家庭教師維生。在貧病交迫之下, Abel 死於 1829 年四月六日。兩天之後, Crelle 在柏林寫信給 Abel, 告訴他普魯士政府決定任命他擔任柏林某個大學的教授, Crelle 說:「你不必再爲生計煩惱。你將來到一個善意的國家。這裡有溫和的氣候, 還有更多的友人珍視你在數學的成就。」

1830年六月巴黎科學院宣布 Abel 與 Jacobi 爲當屆科學院大獎的得主。Abel 寄到巴黎科學院的論文終於在 Cauchy 的檔案中找到, 並在1841年刊載, 造化弄人, Abel 當年的心願總算在十五年後才達成。

2002 年, 在 Abel 誕生兩百年前夕, 挪威政府宣布成立 Abel 獎。第一屆 Abel 獎在 2003 年頒發, 得主是法蘭西學院的 J.-P. Serre [注3]。

(三)

Abel 在巴黎停留將近半年。這時巴黎科學界有一件盛事。Laplace 完成他的名著「天體力學 (Mécanique Céleste)」第五卷。Abel 買了一本, 送給遠在挪威的 Hansteen 教授。Abel 給 Holmboe 的信寫著:「一個人完成這樣的科學鉅著之後, 在回顧一生的科學生涯時, 應該圓滿無憾吧。」他又寫道,

「It is readily seen that any theory written by Laplace will be superior to all produced by mathematicians of lower standing. It appears to me that if one wants to make progress in mathematics, one should study the masters and not the pupils.」(參看 [3, p.138])

Read the masters and not the pupils !

是的, 向大師學習! Abel 一向奉行這項箴言。在 Christianian Univ. 求學時, 他已開始閱讀 Newton、Euler、Lagrange、Laplace、Legendre 與 Gauss 的著作。

紐約大學 (NYU) 教授 Edwards 曾寫一篇文章「Read the Masters!」(見 [6, pp.105-110]) 闡明向大師學習的重要。Edwards 舉兩個例子, 這兩個人都是二十世紀鼎鼎有名的數學家, 一個是 C. L. Siegel (1896∼1981), 另一個是 André Weil (1906∼1998) [注4]。

故事要從 Max Dehn (1878∼1952) 說起。Dehn 是 David Hilbert (1862∼1943) 的學生。他是哥廷根大學1900年的博士。Hilbert 在 1900 年在巴黎國際數學家大會提出著名的 23 個問題不久, Dehn 在 1900 年底解決 Hilbert 第三問題 (四面體分割問題)。Dehn 雖然在 Hilbert 的公設化幾何環境下成長, 他卻是個具有高度幾何直觀的數學家, 他在解決 Hilbert 第三問題之後, 逐漸受到 H. Poincaré (1854∼1912) 的影響, 成為拓樸學研究的先驅之一, 他開始研究 Poincaré 猜想 (單連通的三維封閉流型是否同構於三維球面), 研究紐結理論、低維拓樸、組合群論。有名的 Dehn 引理雖然其中證明有缺漏, 卻是一個重要的基礎性定理 (正確的證明請參考 C. D. Papakyriakopulos, Ann. Math., **66** (1957), 1-26)。

但是以上的描述並不足以概括 Dehn 這個人。Dehn 的數學成就只是他的生活的一部份而已, 瞭解 Dehn 的文化素養、哲學思想與處世態度會令人更敬重他, 也會使我們把 Dehn 從數學家或科學家的格局提昇到「全人」的境界。Dehn 的一生頗富傳奇, 如果有合適的人為他作傳, 其引人入勝之處相信不亞於 S. Nasar 為 John Nash 寫的 "A beautiful mind"。讀者如果對 Dehn 的數學與人生有興趣, 不妨參考 Stillwell 與 Siegel 的文章 [1, pp.965-978; 5; 9, pp.117-135]。

1921 年 L. Bieberbach (1886∼1982) 就任柏林大學的教授職位, Dehn 接任 Bieberbach 在法蘭克福大學 (Frankfurt Univ.) 留下的教授職缺 [注5]。從 1922∼1935 年 Dehn 在法蘭克福大學組織一個數學史的研討會, 這就是有名的「法蘭克福數學史研討會」(請參考 [5])。

Dehn 是這個研討會的靈魂人物, 共同主持這個研討會的教授有: E. Hellinger (1883∼1950)、P. Epstein (1871∼1939, 數論課本有一種 Epstein ζ 函數)、O. Szász (1884∼1952, 匈牙利人) 與 Siegel 本人。他們每星期四下午 4:00 ∼ 6:00 聚會, 從原始文獻探討數學史上的重大發現, 從歐基里德 (Euliclid)、阿基米德 (Archimedes)、中世紀到 17 世紀、刻卜勒 (Kepler)、惠更斯 (Huygens)、費瑪 (Fermat), 都是討論的題材。目的是讓學生更深入的瞭解

正式課堂中學到的數學定理, 老師也可以重新檢視歷史上重大成果的來龍去脈。參加的人, 不論師生, 都要事先讀過這些原始文獻。想想看, 要讀懂這些文獻就要懂古希臘文、荷蘭文、義大利文, 何況還有文獻本身的內容! 如果不是對思想文化、數學發展與人類歷史有高度熱誠的人, 哪個學生能唸完一個學期這種課程?

但是, 正如 Edwards 所說的, Siegel 正好是從研讀 B. Riemann (1826∼1866) 的遺稿才發現, Riemann 的 ζ 函數除了大家熟知的方法之外, 還另有一種方法, 這就是 Siegel 在 1932 年的論文整理出來的 Riemann-Siegel 公式, 它可以用來估計 zeta 函數 $\zeta(\frac{1}{2}+t\sqrt{-1})$ 的近似值 (其中 t 是實數) [4, pp.275-310; 8, pp.25-29]。

Weil 在1926 年聖誕節假期去過法蘭克福, 當時他還是個學生。Dehn 的數學史研討會因爲聖誕假期停止幾週, 因此 Weil 沒有躬逢其盛 [10, pp.51-53]。但是 Weil 仍然見到 Dehn。他對 Dehn 評價極高, 把他比擬成類似蘇格拉底 (Socrates) 的人物。日後只要 Weil 來到法蘭克福, 他一定會參加這個研討會。Weil 在他的論文全集說, 他從學生時代就開始研讀 Riemann 與 Fermat 的論文。他充分相信, 研讀這些文獻才是激發靈感的最好的方法 [6, p.107]。

Edwards 還提出其他論點證明數學史對數學研究的重要性。其實我覺得, 這些論點可以歸納成 Poincaré 的一段話:

「If we wish to foresee the future of mathematics, our proper course is to study the history and present condition of the science.」(如果我們想預測數學未來的趨勢, 我們就必須了解數學過去的歷史與現在的發展。)

(四)

用比較平實的語言來說,「向大師學習!」這個口號的具體涵意無非是: 取法乎上、培養好的數學品味、勇於向重要的、有意義的問題挑戰。

現代的讀者想取得經典著作或重要文獻的途徑已經比一百年前的人容易多了。許多大師的全集 (Collected Works) 或選集 (Selected Works) 在圖書館都可找到, 不要說 Newton、Euler、Lagrange、Abel、Jacobi、Riemann、Poincaré、Hilbert 的全集, 連二十世紀的數學家 Weyl、E. Cartan、Wiener、Kolmogorov、E. Artin、Gelfand、Serre、Borel 的文集都已出版, 至於各重要數學分支大師們的論著也都結集問世。

出版事業與網路資訊提供的便利, 現代的讀者幾乎已經沒有什麼重要的資訊無法取得。問題反而是, 資訊太多, 究竟哪些才是重要的? 因此「向大師學習!」的口號也就更具現實意義。

「向大師學習!」並不是除了已成名的大師的著作之外, 其他人的論文與思想都不屑一顧。一個人總要走遍世界各地之後 , 就像 Abel 或 Weil 的遊學之旅 (見 [10, Chapter 3]), 才知道

什麼是名山大川、什麼是窮山惡水、誰是一代宗師、誰是虛有其表。所謂「數學的品味」就是這樣培養的。

現代的教育制度使許多研究生的基礎訓練過分的狹窄, 並使他們意氣消沈。有不少學生的夢想只不過是在某個小問題做點小小的突破, 再也沒有當年 Abel 雖然來自文化邊陲地帶, 卻充滿初生之犢不畏虎的鬥志。許多人取得博士學位之後, 對其他的問題毫無興趣, 更不用提「向大師學習」, 他們獨　一味, 坐井觀天, 一輩子走不出博士論文的藩籬。我想, 這才是現代高等教育的悲哀。

陳省身先生曾說, 許多有名的數學家最早的幾篇論文都是不重要的問題。有些人出身名門正派, 一出場就是石破天驚的重頭戲。但是, 並不是所有的人都這麼幸運的。大多數人是逐漸蛻變, 從平庸逐漸成熟。蛻變成蝴蝶的毛毛蟲恐怕都有一個共同的特點, 它們都嚮往光明, 奔向新的世界, 他們願意也努力向大師學習 [注6]!

附注

本文提到的數學家, 如果讀者不太熟悉, 請上網查詢
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/BiogIndex.html, 或參考
「Dictionary of Scientific Biography」(New York, 1970∼1990)。

注1: Abel 最重要的數學貢獻是橢圓函數 (elliptic functions) 與橢圓積分 (elliptic integrals)、方程式根式解與無窮級數。

十九世紀初期, Gauss、Cauchy、Bolzano 花了相當多的心力思考如何嚴格的定義函數的極限與級數的收斂發散; Abel 也參與這項工作。例如, 微積分課本的二項式定理

$$(1+x)^\lambda = 1+\lambda x+\binom{\lambda}{2}x^2+\cdots+\binom{\lambda}{n}x^n+\cdots,$$

(其中 $|x|<1$, λ 是任意實數) 就是 Abel 第一個給出嚴格證明的。微積分或高等微積分討論的冪級數 (power series) 收斂半徑以及收斂半徑範圍內可以進行微分、積分, 也是 Abel 證明的。我們當然知道無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n x_n$ 有一種收斂判定法: Abel test。

在五次方程式的研究, Abel 證明: 一般的五次方程式沒有根式解。他還給出某些五次方程式有根式解的充分條件; 這個充分條件, 用 Galois 群的語言來解釋就是: 這個方程式的 Galois 群是交換群。因此, 我們就把交換群也稱爲 Abel 群 (abelian groups)。

Gauss 曾研究何種正 n 邊形可以用直尺與圓規作出, 在他的名著 “Disquisitiones Arithmeticae (整數論)” Gauss 證明了這個定理; 他接著說, 同樣的定理對於雙紐線 $r^2=\cos 2\theta$ 也成立, 他沒有把證明寫下來 (Gauss 的定理請參考 Galois 理論的書)。Abel 看到這段話, 沒有輕易放過, 他自己找到一個證明, 居然與橢圓函數有關!

在十八世紀微積分誕生不久, 數學家就注意橢圓積分的問題。讀過微積分的人都知道如何求不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}。$$

但是, 如何求以下的不定積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k \neq \pm 1)$$

其中 $f(x)$ 是沒有重根的三次多項式?

這些積分就是最常見的橢圓積分。求橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的弧長, 就會出現以下的不定積分

$$\int \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}\, d\theta,$$

它也是橢圓積分。

在定積分

$$y = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1} x,$$

如果考慮反函數 $x = \sin y$, 那麼 $\sin y$ 變成大家熟悉的週期函數。Abel 注意到, 同樣的手法, 令

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad x = \varphi(y),$$

則 $\varphi(y)$ 變成雙週期函數。橢圓函數就是複平面雙週期的亞純函數 (doubly-periodic meromorphic functions)。Abel 這個 "簡單" 的觀察 (從橢圓積分到橢圓函數) 卻是 Euler 與 Legendre 沒注意到的。

在橢圓積分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

其中 $f(x)$ 是沒有重根的三次多項式, 如果令 $y^2 = f(x)$, 我們就得到仿射平面上的代數曲線, 它是一種橢圓曲線 (elliptic curves)。

橢圓函數是十九世紀中期數學研究的顯學, 它除了在物理、天文有廣泛的應用之外, 它還帶動複變函數論 (function theory)、黎曼面 (Riemann surfaces) 與代數幾何的研究, 它在類體論的研究也扮演重要的角色 (Kronecker's Jugendtraum)。十九世紀的數學家, Weierstrass、Riemann、Liouville、Hermite 在橢圓函數的研究都做出重要的貢獻。

注 2: Jacobi 在 22 歲就任教於東普魯士的 Königsberg Univ., 打破當時歐洲學術界排斥猶太人的陋規。1844 年轉任於柏林大學, Jacobi 把橢圓函數的理論基礎建立在 theta 函數

之上, 設 $z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{H}$, $q = e^{\pi\sqrt{-1}\tau}$, 定義四種 theta 函數 ϑ_i $(1 \leq i \leq 4)$ 如下:

$$\vartheta_1(z,\tau) = -\sqrt{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\pi\sqrt{-1}z},$$

$$\vartheta_2(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} e^{(2n+1)\pi\sqrt{-1}z},$$

$$\vartheta_3(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi\sqrt{-1}z},$$

$$\vartheta_4(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi\sqrt{-1}z}。$$

任意的橢圓函數都可寫成兩個 theta 函數的商。$\vartheta_i(0,\tau) = \vartheta_i$ 稱爲 theta 常數 (theta constants)。由 theta 常數可造出某些模型式 (modular forms) 與模函數 (modular functions)。

Jacobi 才華洋溢, 精力充沛, 善於帶領學生, 他的研究的領域遍及數學各個領域。Gauss 雖然是非常偉大的數學家, 但是 Gauss 像個隱士, 對於德語世界的數學發展並沒有太大的影響。是 Jacobi 建立普魯士的數學研究團隊, 引導他們走到世界的前沿。Jacobi 的事蹟可參考 [3]。

注3: Serre 生於 1926 年; 1951 年獲得博士學位, 指導教授是 Henri Cartan (1904～2004)。Serre 獲頒 Fields Medal (1954年), Wolf Prize (2000年), Abel Prize (2003年)。Serre 在許多數學領域都有重要的貢獻, 如: 代數拓樸、代數幾何、交換代數、代數數論、表示論。他寫的書、他的通信、他在法蘭西學院間講授的課程以及在 Séminaire Bourbaki 的演講, 都具有十分深遠的影響。讀者可參考 Oort 的書評 (F. Oort, Nieuw Arch. Wisk., **9** (1991), 67-72)。另有兩篇訪問 Serre 的文章也值得參考: C. T. Chong and Y. K. Leong, Math. Intelligencer, **8** (1986), 8-13; M. Raussen and C. Skau, Notices Amer. Math. Soc., **51** (2004), 210-214。

著名幾何學者 Raoul Bott (1923-2005, 2000 年 Wolf Prize 得主）有一段話生動的描述 Serre 的工作方式（參看 ” A century of mathematics in America Part II, p.532, Amer. Math. Soc. 1989）:

「Serre is a prime example of what I call a ”smart mathematician”—as opposed to a ”dumb one”. What he knows is so crystal clear in his mind that he can give us lesser mortals the feeling that it is indeed all child’s play. He also had, and still has, the infuriating habit of never seeming to work. In public one sees him playing pingpong, chess, or reading the paper—never in the sort of mathematical fog so many of us inhabit most of the time...Mrs. Serre comments that from her view "Serre works all the time." And indeed he claims that all his true work is done in his sleep！」

注 4: Siegel 是二十世紀傑出的數論學者, 在天體力學、幾何數論也有十分重大的貢獻。Siegel 在 1915 年就讀於柏林大學, 本來他的興趣是天文學; 由於上了 Frobenius 與 Planck 的課使他改變主意, Frobenius 的教導把他帶上數論的研究。他在 1920 年獲得哥廷根大學的博士, 指導教授是 E. Landau, Landau 是當時解析數論的權威 (Landau 是 Frobenius 的學生)。Siegel 是 1978 年 Wolf Prize 的得主。有關 Siegel 的生平可參考 [9]。

Weil 對二十世紀數學的影響是十分深遠的。他的專長是: 代數數論、代數幾何、代數群, 可是他在調和分析與拓樸群、複幾何 (Kähler 流型)、代數函數也有非常重要的貢獻。Weil 是 Bourbaki 集團的創始會員。他是塑造算術幾何理論基礎的重要人物, 他提出的 Weil 猜想成爲 Grothendieck 重建代數幾何理論的主要推動力。

Weil 是 1928 年法國國家博士, 指導教授是 Hadamard, Weil 的博士論文就是我們今天習稱的 Mordell-Weil 定理。Hadamard 當時對此論文尙有保留, 他認爲 Weil 應該徹底解決 Mordell 猜想, 不能滿足於只完成幾個特殊情形。事實上, Mordell 猜想的解決還要再等五十多年, 直到 1983 年 Faltings 才證明 Mordell 猜想、Tate 猜想與 Shafarevich 猜想 (Invent. Math., **73** (1983) 349–366)。Weil 是 1979 年 Wolf Prize 的得主, 他的生平可參看他的自傳 [10] 與 Borel 等人的紀念文章 (Notices Amer. Math. Soc., **46** (1999)422–447)。

注 5: Bieberbach 是一個很有爭議性的人物, 一方面他是一個極富創意的傑出數學家, 另一方面他狂熱的支持納粹黨的種族歧視政策。他在 1934 的文章 "Persönlichkeitsstruktur und mathematisches Schaffen (Personality structure and mathematical creativity)" 爲納粹政權淸洗猶太裔數學教授編造「理論基礎」, 受到當時許多人的抨擊。

Bieberbach 是 1910 年哥廷根大學的博士, 指導教授是 F. Klein, 論文題目是 Automorphic functions。1911 年他的教師資格論文 (Habilitationschrift) 是解決 Hilbert 第 18 問題的一篇重要的論文。他曾任教於 Basel 大學 (瑞士)、法蘭克福大學、柏林大學。他在 1916 年提出單複變函數一個問題 (Bieberbach 猜想); 這猜想在 1985 由美國 Purdue Univ. 的 L. de Branges 解決 (de Branges, Acta Math., **154** (1985) 137–152)。Bieberbach 的故事可參考 [9]。

注 6: 作家卡爾維諾 (Italo Calvino, 1923-1985) 有一篇文章, 名叫「爲什麼讀經典?」, 寫得眞好。這篇文章後來收入也用「爲什麼讀經典?」命名的書, 讀者不妨參考一下。

參考文獻

1. I. M. James, (editor), *History of Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1999.
2. O. A. Laudal, and R. Piene, (editors), *The Legacy of Niels Henrik Abel*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
3. O. Ore, Niels Henrik Abel, *Mathematician Extraordinary*, Univ. Minnesota Press, Minneapolis, 1957.
4. C. Siegel, *Gesammeltc Abhandlungen*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
5. C. L. Siegel, *On the history of the Frankfurt mathematics seminar*, English translation, The Math. Intelligencer, **1** (1978), 223-230.
6. L. A. Steen, (editor), *Mathematics Tomorrow*, Springer-Verlag, New York, 1981.
7. A. Stubhaug, *Niels Henrik Abel and His Times*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
8. E. C. Titchmarsh, *Theory of the Riemann ζ-function*, Clarenden Press, Oxford, 1951.
9. B. H. Yandell, *The Honor Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, A K Peters, Natick, 2001.
10. A. Weil, *The Apprenticeship of a Mathematician*, Birkhäuser, Basel, 1992.

—本文作者任教大學數學系—