數學傳播 31卷2期, pp. 81-92

朱世傑的垛積招差術和組合恒等式

羅見今

摘要: 朱世傑「四元玉鑒」(1303) 中的垛積招差術是中世紀數學的重要成就。以往將垛積術歸於"高階等差數列求和", 本文認爲它屬於組合求和, 闡明"術"、"草"與數據表間存在著的變換關係: $S=f(n)=g(n)=\sum c_k=\sum a_kb_k$, 用組合符號和 $\sum$ 表示成40多個恒等式, 這是朱世傑利用垛積模型的實驗結果。

關鍵詞: 中國數學史, 組合和, 組合恒等式, 有限差分法。

朱世傑的垛積招差術主要集中在「四元玉鑒」(1303)[1] "茭草形段"7題 (簡記"茭1∼7")、"箭積交參"7題、"如象招數"5題 (簡記"招1∼5")、"果垛疊藏"20題 (簡記"果1∼20") 共39題中, 清代沈欽裴[2](1821)、羅士琳 (1774∼1853)[3]和當代錢寶琮[4,5]、湯天棟[6]、方淑姝[7]、杜石然[8] 諸家各有論述。「四元玉鑒」上述問題體例清晰。原著內容較簡略, 除"箭積交參"7題外, 本文依據的版本[3] 每問都包含: I. 朱世傑的問題和答案; II. 朱世傑的"術", 即列出高次方程: $f(n)-S=0$, n 爲正整數; III. 羅士琳的"草", 即解法過程: 據算理 (立術本意) 列出多項式 $g(n)$, 將它展開後有$g(n)=f(n)$; "草"後有"依注還原草", 驗證解法; IV. 羅士琳的數據表, 據朱世傑的 I、II 列出, 分爲上、中、下三行, 這裏記作 a_k, c_k, b_k , $A=\sum a_k$, $B=\sum b_k$ 皆有 $a_kb_k=c_k$, 且一般滿足 $C=\sum c_k=g(n)$。$S=tC$, t 爲正整數。本文著重討論"術"、"草"與數據表間的這一種關係 (S 常以 C 代之):

$$S=f(n)=g(n)=\sum c_k=\sum a_kb_k$$

應用組合記法 (僅用其計算二項式係數意義) 與求和符號 $\sum$, 將涉及20題的成果表示成現代形式, 得出40多個組合恒等式, 未見前人系統闡發, 除"箭積交參"7題和"果垛疊藏"後12題較平凡外, 謹列出各題條件說明這些組合恒等式的由來, 以就正於同好。

朱世傑建立了三角垛積系列 $\binom{n+p-1}{p}$, 其中各垛定義爲

$$p=2, \text{茭草垛: } 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}$$
$$p=3, \text{三角垛: } 1+3+6+\cdots+(n+1)n/2=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}=\binom{n+2}{3}$$
$$p=4, \text{撒星形垛: } 1+4+10+\cdots+(n+2)(n+1)n/6=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}=\binom{n+3}{4}$$

$p=5$, 三角撒星形垛:

$$1+5+15+\cdots+(n+3)(n+2)(n+1)n/24=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+3}{4}=\binom{n+4}{5}$$

$p=6$, 三角撒星更落一形垛:

$$1+6+21+\cdots+(n+4)\cdots(n+1)n/120=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+4}{5}=\binom{n+5}{6}$$

在此基礎上獲得了組合恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}. \tag{1}$$

本文稱式(1) 爲“朱世傑恒等式”, 它是賈憲三角形中每斜行前 n 項和的計數公式, 表明了組合的一項基本性質, 與帕斯卡恒等式等具有同樣的重要性。

在「組合恒等式」[9]、「組合數學」[10]中不見 (1) 式, 常見

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{k}{p}=\binom{m+1}{p+1} \tag{2}$$

及

$$\sum_{k=0}^{q}\binom{p+k}{k}=\binom{p+q+1}{q} \tag{3}$$

兩者均爲朱世傑恒等式的等價公式, 表示賈憲三角形中的同一性質。

證明: 由 (3) 知 $\sum_{k=0}^{q}\binom{p+k}{p}=\binom{p+q+1}{p+1}$, 令 $m=p+q$, $q=m-p$, 代入得 $\sum_{k=0}^{m-p}\binom{p+k}{p}=\binom{m+1}{p+1}$, 亦 $\sum_{k=0}^{m}\binom{k}{p}=\binom{m+1}{p+1}$, 即式 (3) 變換成 (2)。

再證 (1)(2) 兩式等價。令 $m=n+p-1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+p-1}{p}=\sum_{k=1}^{m-p+1}\binom{k+p-1}{p}=\sum_{k=p}^{m}\binom{k}{p}=\sum_{k=0}^{m}\binom{k}{p}=\binom{m+1}{p+1}$$

式 (1) 即變換成 (2) 式; 反之, (2)(3) 式亦可變換成 (1) 式。證完。

從朱世傑的垛積術中還可以歸納出另一組合恒等式 (尚缺現代證明):

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+p-1}{p}k=\frac{(p+1)n+1}{p+2}\binom{n+p}{p+1}. \tag{4}$$

垛積術與招差術互爲逆運算, 稱爲和分與差分。有的組合恒等式是用有限差分法獲得的。設 a_k 爲 h 階 $(1\le h\le k-1)$ 差分數列的通項, $\Delta^r a$ 表示 r 階 $(0\le r\le h)$ 差分數列的首項。朱世傑的內插公式相當於:

$$a_k=\sum_{r=0}^{h}\binom{k-1}{r}\Delta^r a \tag{5}$$

其中朱氏算至 $h=3$, 即三階內插公式。原著並未直接給出這一形式, 但定義明確, 演算法與結果與此式全合, 與牛頓內插公式相同:

$$u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k u_1 \tag{6}$$

1. 茭草形段

茭1. 共積 $S=680$, 落一底子 $n=15$; 茭草形 $a_k=k$, 乘數 $b_k=(k+1)/2$, 三角底積 $c_k=k(k+1)/2$, 獲三角垛公式, 即式 (1) 當 $p=3$ 的情形:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}r=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}=\binom{n+2}{3}. \tag{7}$$

茭2. 式 (1) 中 $p=4$; $S=1820$, $n=13$; 三角積 $a_k=k(k+1)/2$, 反錐差 $b_k=n-k+1$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}(n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}=\binom{n+3}{4}. \tag{8}$$

茭3. 式 (1) 中 $p=2$; $S=3367$, $n=12$; 三角積 $a_k=k(k+1)/2$, 錐差 $b_k=k$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}k=\frac{3n+1}{4}\binom{n+2}{3}. \tag{9}$$

茭4. 式 (1) 中 $p=4$; $S=8568$, $n=14$; 三角積 $a_k=k(k+1)/2$, 逆列三角積 $b_k=(n-k+2)(n-k+1)/2$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}\binom{n+2-k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+3}{4}=\binom{n+4}{5}. \tag{10}$$

這是一種組合卷積公式, 在下文"果6"中還要提到, 是式 (41) $p=2$, $q=2$ 時的情況。

茭5. 式 (4) 中 $p=3$; $S=50388$, $n=16$; 三角積 $a_k=k(k+1)/2$, 逆列梯田積 k 段 $b_k=(n+k)(n-k+1)/2$ (據數表後"附: 求梯田積")

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}(n+k)(n-k+1)/2=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}k=\frac{4n+1}{5}\binom{n+3}{4} \tag{11}$$

式右名爲"嵐峰更落一形"垛。該式表明它可用兩種方式合成。

茭6. 茭草直錢: $S=22578$, $n=28$; 茭草束 $a_k=k$, 拋差 $b_k=b+(k-1)d$ (首項 $b=9$, 公差 $d=3$)

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}[b+(k-1)d]=[b+(n-1)(\frac{2}{3}d)]\binom{n+1}{2} \tag{12}$$

此式表明組合 (茭草垛) 乘等差數列求和, 仍爲組合 (三角垛) 乘公差縮小的等差數列。

茭7. 茭草直錢: $S=42846$, $n=36$; 茭草束 $a_k=k$, 逆列拋差 $b_k=b+(n-k)d$ (末項 $b=6$, 公差 $d=5$), 具有與上式相同的性質:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}[b+(n-k)d]=[b+(n-1)(\frac{1}{3}d)]\binom{n+1}{2}. \tag{13}$$

2. 箭積交參

「四元玉鑒」卷中之八"箭積交參"應用圓、方箭束兩種數列的性質, 體例與三角垛系列不同, 但仍屬垛積問題, 一般數學史著作卻不列入垛積類探討, 當代研究論及甚少。

圓箭束即「漢書•律曆志」所記"六觚爲一握", 中算家已熟知之。李儼[11]指出羅士琳在「比例匯通」中給出解法: 此"六角物乃是六個周包一, 自內而外, 每層加六。"今設圓箭束共 k 層 ($k\geq 0$), 圓箭積記爲 a_k, $a_0=1$, 即中心一箭, 則羅氏解法相當於遞推公式 $a_k=a_{k-1}+6k$。羅氏又給出 a_k 的演算法: 對 $k=9$, "置外週六九五十四, 加內週六, 得六十; 複以外週五十四乘之, 得三千二百四十爲實, 以六角束六倍之得十二爲法, 以法除實, 得二百七十, 加中心一, 合問。"

求出 $a_9 = 271$。不失一般性, 這相當於求 a_k 的通項公式:

$$a_k = \frac{6k(6k+6)}{2\cdot 6} + 1 = 3k^2 + 3k + 1. \tag{14}$$

可由遞推式求出通項式: $a_k = a_{k-1}+6k$, $a_{k-1} = a_{k-2}+6(k-1)$, $a_{k-2} = a_{k-3}+6(k-2)$, $\cdots$, $a_{k-(k-1)} = a_{k-k}+6[k-(k-1)]$, 將各式相加, 得 $a_k = a_0+6[k+(k-1)+\cdots+2+1]$, 即得式 (14)。

方箭束積是自然數平方數列

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \tag{15}$$

方箭第 k 層外周爲 $4k$ $(k \geq 0)$。朱世傑"箭積交參七問"皆據 (14)(15) 兩式立術, 得到7個一元二次方程, 較平凡, 此略而不論。只是第七問"今有方、圓箭各一束, 共積二百八支。只云圓箭外邊第二層周數 (士琳按: 此下當有"加二支"三字) 與方箭外邊第一層周數同, 問方、圓周各幾何?" 原題文字有舛誤。李鋭 (字尙之, 1768～1817) 首先提出應"加二支", 沈欽裴引用[2], 羅氏亦同, 指圓箭束第5層外周30加2與方箭束第8層外周32相等。但仍有問題。簡單的改法: 將"第一層"改爲"第四層"即可, 僅錄以備考。

3. 如象招數

招1. 差夫築堤: 設"築堤日" $m = n+1$, "每日 (第 k 天) 差夫數" $a_k = a + (k-1)d$ (首項 $a = 64$, 公差 $d = 7$), 差夫"共人數" $A = \sum a_k = 1864$。朱世傑"術曰"列出方程: $1800 = 67.5n + 3.5n^2$。解之, $n = 15$, $m = 16$。式中 $1800 = A - a$。

又, "逆列築堤日"(第 k 天招夫日工數) $b_k = (n+1) - k + 1$; 築堤共用人日數 $C = \sum a_k b_k$, "每人日支米3升", 共支米 $S = 3C = 3\sum a_k b_k = 40392$升。朱世傑"米求日術"列出方程: $80400 = 590n + 213n^2 + 7n^3$。解之, $n = 15$, $m = 16$。式中 $80400 = 2(S-3a) = 6(C-a)$。

注意到, 朱氏稱 n 爲"茭草底子"、"三角底子", 他的立術顯然應用了三角垛系列的性質。由羅士琳解析立術過程, 本文理所當然要用組合符號表示其結果。

據本題"草"(並"依注還原草"中"求夫者"和數表上行"差夫數"), 羅氏給出

$$A = (n+1)a + \frac{(n+1)n}{2}d = \binom{n+1}{1}a + \binom{n+1}{2}d \tag{16}$$

因 $A = \sum a_k = \sum[a + (k-1)d]$, 即可用兩種演算法得出同一 A, 事實上獲得了恒等式

$$\sum_{k=1}^{m}[a + (k-1)d] = \binom{m}{1}a + \binom{m}{2}d \tag{17}$$

這是用三角垛 (組合) 表示的一階等差數列求和公式, 爲數學史首見。

又據“米求日草”(並“依注還原草”中“求支米者”和題末數表三行), 關鍵爲

$$C=\frac{3(n+2)(n+1)}{6}a+\frac{(n+2)(n+1)n}{6}d=\binom{n+2}{2}a+\binom{n+2}{3}d \tag{18}$$

因同時又有 $C=\sum a_kb_k$, 事實上獲了恒等式

$$\sum_{k=1}^{m}[a+(k-1)d](m-k+1)=\binom{m+1}{2}a+\binom{m+1}{3}d. \tag{19}$$

將式 (17)(19) 左右展開, 經變換, 可分別得到朱世傑的上述兩方程。羅氏以招差術語稱 a 爲“上差”, d 爲“下差”, 因此用有限差分法亦可記爲 $a=\Delta^0 a$, $d=\Delta^1 a$。

招2. 依平方招兵: 設招兵日 $m=n+2$, 第 k 天招兵“平方積” $a=a_1=4^2$, $a_2=6^2$, $a_k=(4+2k-2)^2=4(k+1)^2$,“招兵數” $A=\sum a_k=4956$。朱世傑“術曰”列出方程: $7356=73n+21n^2+2n^3$。解之, $n=12$, $m=14$。式中 $7356=6(A-a-a_2)/4$。

又, “逆列招來日”(第 k 天所招兵入伍天數) $b_k=(n+2)-k+1$; 招兵共有人日數 $C=\sum a_kb_k$, “每人日給銀一兩二錢”, “共銀數” $S=1.2C=1.2\sum a_kb_k=26040$兩。朱氏“銀求日術”列出三次方程, 解之, $n=12$, $m=14$。不詳論。朱氏稱 n爲“三角底子”、“三角落一底子”, 他的立術應用了三角垛系列的性質。據“草”(及“依注還原草”中“求兵者”和題末數表上行“平方積”), 關鍵步驟爲

$$\begin{aligned}A&=\frac{6(n+2)}{6}\Delta^0a_1+\frac{3(n+2)(n+1)}{6}\Delta^1a_1+\frac{(n+2)(n+1)n}{6}\Delta^2a_1\\&=16\binom{n+2}{1}+20\binom{n+2}{2}+8\binom{n+2}{3}\end{aligned} \tag{20}$$

式中的三個差分羅士琳依次稱爲“上差”、“中差”、“下差”, 他並給出正確的演算法: $\Delta^0a_1=a=4^2$, $\Delta^1a_1=\Delta^0a_2-\Delta^0a_1=6^2-4^2=20$, $\Delta^2a_1=a_3-2a_2+a_1=8^2-2\cdot6^2+4^2=8$ 因 $A=\sum a_k=\sum 4(k+1)^2$, 即可用兩種演算法得出同一 A, 事實上獲得了恒等式 (已約去因數4):

$$\sum_{k=1}^{m}(k+1)^2=4\binom{m+1}{1}+5\binom{m+1}{2}+2\binom{m+1}{3} \tag{21}$$

將自然數平方和分解成若干三角垛之和, 作者還沒有在史料或數學詞典中見過。

又據“銀求日草”(及“還原草” “求支銀者”和題末數表中行“乘得數”), 關鍵爲

$$\begin{aligned}C&=\frac{6(n+3)(n+2)}{12}\Delta^0a_1+\frac{2(n+3)(n+2)(n+1)}{12}\Delta^1a_1+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{12\cdot2}\Delta^2a_1\\&=16\binom{n+3}{2}+20\binom{n+3}{3}+8\binom{n+3}{4}\end{aligned} \tag{22}$$

因 $C=\sum a_kb_k$, 即可獲得恒等式 (原著未約去等式兩邊的因數4):

$$\sum_{k=1}^{m}(k+1)^2(m-k+1)=4\binom{m+1}{2}+5\binom{m+1}{3}+2\binom{m+1}{4}. \tag{23}$$

招3. 依圓箭束招兵: 設招來日 $m=n+2$, $b_k=(n+2)-k+1=m-k+1$。

“箭積交參”式 (14) 已知 a_k 的通項, 本題首項非7, 而是19, 故 k 應換爲 $k+1$, 這時應有“圓 (箭束) 積” $a_k=a_{k-1}+6(k+1)$, 而“圓 (箭外) 周” $k=6(k+1)$。本題提出圓箭束 (招兵數) a_k 是二階等差數列 (見下右表), 構造爲: “初束”中心1箭, 周圍6支, 外周12支, 即首項 $a=7+12=19=\Delta^0a$, 爲“上差”; “次束外周轉多六支”, 即 a_k 的一階差分首項 $12+6=18=\Delta^1a$, 爲“中差”; 二階差分各項 $\Delta^2a\equiv 6$, 爲 “下差”。於是

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccl}
19 & & 37 & & 61 & & 91 & & 127 & & \cdots & & & & 631 & & 721 & & 817 & \text{(圓箭束積)}\\
& 18 & & 24 & & 30 & & 36 & & \cdots & & \cdots & & 90 & & 96 & & & & \text{(外周)}\\
& & 6 & & 6 & & 6 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & 6 & & & & & \text{(圓率)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{初束} & a=a_1=7+12=19, & a_1=\Delta^0a\\
\text{次束} & a_2=a_1+(12+6)=37, & a_2=\Delta^0a+\Delta^1a\\
\text{三束} & a_3=a_2+(12+2\times 6)=61, & a_3=\Delta^0a+2\Delta^1a+\Delta^2a\\
\text{四束} & a_4=a_3+(12+3\times 6)=91, & a_4=\Delta^0a+3\Delta^1a+3\Delta^2a\\
 & \qquad\vdots & \qquad\vdots
\end{array}$$

$$a_k=a_{k-1}+[12+(k-1)\times 6],\quad a_k=\sum_{r=0}^{2}\binom{k-1}{r}\Delta^ra \tag{24}$$

這是式 (5) $h=2$ 的情況。羅氏闡明“圓箭束積”共有4種等價定義 (現代形式):

$$\begin{aligned}
a_k=a_{k-1}+[12+6(k-1)]&=\sum_{r=0}^{2}\binom{k-1}{r}\Delta^ra\\
&=19\binom{k-1}{0}+18\binom{k-1}{1}+6\binom{k-1}{2}=3k^2+9k+7
\end{aligned} \tag{25}$$

換言之, (25) 獲得的就是它的遞推式、差分式、組合式、通項式。再求 $A=\sum a_k$:

$$\sum_{k=1}^{m}(3k^2+9k+7)=19\binom{m}{1}+18\binom{m}{2}+6\binom{m}{3} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}C=&\frac{4(n+4)(n+3)(n+2)}{24}\Delta^0a_1+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{24}\Delta^1a_1\\&+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{12\cdot 2}\Delta^2a_1\\=&16\binom{n+3}{2}+20\binom{n+3}{3}+8\binom{n+3}{4}\end{aligned}\tag{27}$$

據"米求日草"和文末的數據表

$$\sum_{k=1}^{m}(3k^2+9k+7)(m-k+1)=19\binom{m+1}{2}+18\binom{m+1}{3}+6\binom{m+1}{4}\tag{28}$$

用原著的術語: 圓箭束乘反錐差求和, 仍得若干圓箭束之和。差分係數與組合形式保持不變。

招4. 依平方招兵: 設招來日 $m=n+2$, $b_k=(n+2)-k+1=m-k+1$。

"箭積交參"的方箭束式 (15) 與此題對應, a_k 的通項已知, 本題首項非 2^2, 而是 5^2, 故 k 應換爲 $k+4$, 這時應有 (第 k 日)"招兵數" $a_k=(k+4)^2$。朱世傑"術曰"列出方程: $14274=253n+39n^2+2n^3$。解之, $n=13$, $m=15$。朱世傑"米求日術"列出方程: $53674920=73386n+36735n^2+7950n^3+705n^4+25n^5$。解之, $n=13$, $m=15$。

羅氏"草曰"計算共招兵 $A=\sum a_k=2440$, 列出

$$A=25\frac{6(n+2)}{6}+11\frac{3(n+2)(n+1)}{6}+2\frac{(n+2)(n+1)n}{6}=\sum_{r=1}^{3}\binom{n+2}{r}\Delta^{r-1}a$$

$$\sum_{k=1}^{n+2}(k+4)^2=25\binom{n+2}{1}+11\binom{n+2}{2}+2\binom{n+2}{3}\tag{29}$$

原題中 $h^2=25$, $2h+1=11$ 與2是差分值, 朱取 $h=5$, 式中 $n=13$。羅士琳附記仿照此題設例, 改變了 h,n 的值。該式當然可以改變初始條件, 本文經4步改寫 (①將 $n+2$ 換寫爲 n, ②$k=1$ 換爲 $k=5$, ③令 $5=h$, ④令$h=1$), 不失本意 (將平方和表成組合之和) 簡化該式, 得:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}\tag{29$'$}$$

對比式 (21), 立意相同。它們可稱作"朱世傑平方和公式", 爲自然數冪和公式之嚆矢, 在數學史上具有創新價值。另外, 在"平方招兵給米"問題中提出了"梯田積"的概念, 即

$$b_k=\binom{n+3}{2}-\binom{k}{2},\qquad n=13,\qquad b_k=120-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}\tag{30}$$

原題的 b_k 數列爲: 120, 119, 117, 114, 99, ..., 29, 15。於是“米求日草”中有公式:

$$\sum_{k=1}^{n+2}(k+4)^2\left[\binom{n+3}{2}-\binom{k}{2}\right]=25\binom{n+3}{2}+72\binom{n+3}{3}+39\binom{n+3}{4}+8\binom{n+3}{5} \tag{31}$$

$$\Delta^0 a=h^2=25,\quad \Delta^1 a=2(h+1)^2=72,\quad \Delta^2 a=3(2h+3)=39,\quad \Delta^3 a=8$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\left[\binom{n+1}{2}-\binom{k}{2}\right]=\sum_{r=1}^{4}\Delta^{r-1}a\binom{n+1}{r+1}=\binom{n+1}{2}+8\binom{n+1}{3}+15\binom{n+1}{4}+8\binom{n+1}{5} \tag{31$'$}$$

式 (31) 改寫簡化, 取 $h=1$, 得到 (31′)。表明: 平方乘梯田積求和可分解爲若干垛積。

招5. 依立方招兵: 原題“順列立方積於上方”即 $a_k=(k+2)^3$, “共兵數” $A=\sum a_k$ 即

$$\sum_{k=1}^{n+3}(k+2)^3=\sum_{r=1}^{4}\binom{n+3}{r}\Delta^{r-1}a=27\binom{n+3}{1}+37\binom{n+3}{2}+24\binom{n+3}{3}+6\binom{n+3}{4} \tag{32}$$

$$\Delta^0 a=h^3=27,\quad \Delta^1 a=3h^2+3h+1=37,\quad \Delta^2 a=6(h+1)=24,\quad \Delta^3 a=6$$

式 (32) 改寫簡化, 取 $h=1$, 得到 (32′)。將立方和表成垛積之和, 這是朱世傑本意所在:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\binom{n}{1}+7\binom{n}{2}+12\binom{n}{3}+6\binom{n}{4} \tag{32$'$}$$

式 (32)(32′) 可稱作“朱世傑立方和公式”, 爲自然數冪和公式的又一重要進展。

原題“逆列招來日於下方”即 $b_k=n+4-k$ (在“茭2”中叫“反錐差”), 求 $C=\sum a_kb_k$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+3}(k+2)^3(n+4-k)&=\sum_{r=1}^{4}\binom{n+4}{r+1}\Delta^{r-1}a\\&=27\binom{n+4}{2}+37\binom{n+4}{3}+24\binom{n+4}{4}+6\binom{n+4}{5}\end{aligned} \tag{33}$$

式 (33) 改寫簡化, 取 $h=1$, 得到 (33′)。表明立方乘反錐差求和亦可分解爲若干垛積:

$$\sum_{k=1}^{n}k^3(n+1-k)=\binom{n+1}{2}+7\binom{n+1}{3}+12\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{5}. \tag{33$'$}$$

4. 果垛疊藏

果1. 三角積 $a_k=k(k+1)/2$, “拋差” $b_k=k+1$, 有 $C=\sum a_kb_k$, 得到式 (4) $p=2$的特例:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}(k+1)=\frac{3n+5}{4}\binom{n+2}{3}. \tag{34}$$

果2. 平方積 $a_k=k^2$, "抛差" $b_k=2(n-k)+1$, 有 $C=\sum a_kb_k$:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2[2(n-k)+1]=\frac{n^2+n+1}{3}\binom{n+1}{2}. \tag{35}$$

果3. 三角積 $a_k=k(k+1)/2$, 乘數 $b_k=2k+1$, "上下相乘如三而一, 得四角積積數於中央, 並中央所得爲共積", 即四角積 $c_k=a_kb_k/3$, 以今日之演算法, "共積"可表示爲

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}(2k+1)=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}k+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}\\&=\frac{3n+1}{6}\binom{n+2}{3}+\frac{1}{3}\binom{n+2}{3}=\frac{n+1}{2}\binom{n+2}{3}=\frac{n}{12}(n+1)^2(n+2)\end{aligned} \tag{36}$$

給出了"四角落一形"求和的結果, 這是平方和再求和的演算法 (原術思路待考):

$$\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}k^2=\frac{n}{12}(n+1)^2(n+2). \tag{37}$$

果4. 三角積積數 $a_k=k(k+1)(k+2)/6$, 錐差 $b_k=k$, 求 $C=\sum a_kb_k$, 得到式 (4) $p=3$的情況:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}k=\frac{4n+1}{5}\binom{n+3}{4}. \tag{38}$$

果5. 四角積積數 $a_k=\sum r^2$, 錐差 $b_k=k$, 求 $C=\sum a_kb_k$, 得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\Big(k\sum_{r=1}^{k}r^2\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k^4}{3}+\frac{k^3}{2}+\frac{k^2}{6}\Big)\\&=\frac{1}{10}\Big[\Big(4n+\frac{3}{2}\Big)n+\Big(4n+\frac{1}{2}\Big)\Big]\binom{n+2}{3}=\frac{8n^2+11n+1}{20}\binom{n+2}{3}\end{aligned} \tag{39}$$

第二個等號後的結果由原題給出, 不明立術之原, 作爲遺留問題。

果6. 三角積積數 $a_k=(k+2)(k+1)k/6$, "逆列三角積" $b_k=(n+2-k)(n+1-k)/2$, 求 C, 得

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+2}{3}\binom{n+2-k}{2}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+4}{5}=\binom{n+5}{6} \tag{40}$$

朱世傑明確指出本題是"三角撒星更落一形果子積", 即式 (1) $p=6$ 的情況。推廣後有

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+p-1}{p}\binom{n+q-k}{q}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+p+q-1}{p+q}=\binom{n+p+q}{p+q+1} \tag{41}$$

當 $p=3$, $q=2$ 時便是式 (40)。杜石然[8] 認爲原著並無此式, 批評喬治·薩頓[12]、李約瑟[13]等引用了1923年錢寶琮給出的相當於式 (41) 的公式。但筆者以爲它並非空穴來風, 如果說僅有式 (40) 尚不足以推廣, 則還可再舉式 (10), 那是 $p=2$, $q=2$ 時的情況, 推廣它的思路較爲清晰。上文所舉不少組合求和公式也可作爲佐證, 表明朱世傑掌握這類公式是題中應有之義。建議將式 (10)、(40)、(41) 稱爲"朱世傑組合卷積公式"。揣測它的立術之原, 朱世傑可能是從大量操演垛積模型獲得了其間的數量關係。

果7. "圓錐垛"當層數爲奇時 $a_{2k-1}=2k-1$, 三角積 $b_{2k-1}=k(k-1)/2$, $c_{2k-1}=3k(k-1)+1$

$$\sum_{k=1}^{(n+1)/2}\left[6\binom{k}{2}+1\right]=\sum_{k=1}^{(n+1)/2}(3k^2-3k+1)=\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{8}(n+1)^3 \quad (42)$$

朱世傑只研究了上式, 當層數爲偶時 $a_{2k}=2k$, 乘數 $b_{2k}=3k/2$, $c_{2k}=3k^2$, 由羅士琳給出 $\sum c_{2k}$:

$$\sum_{k=1}^{(n-1)/2}3k^2=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{8}(n^3-n). \quad (43)$$

果8. 由 n 層的"三角尖積" $(n+2)(n+1)n/6$ 水準截去上面 m 層的"虛尖" $(m+2)(m+1)m/6$ 而成"三角台垛" $(1\le m<n)$, m 爲"虛底", $a_k=k+m$, $b_k=(k+m+1)/2$, 求 $C=\sum a_kb_k$, 得到:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-m}(k+m)(k+m+1)/2=\sum_{k=1}^{n-m}\binom{k+m+1}{2}\\&=\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}-\sum_{k=1}^{m}\binom{k+1}{2}=\binom{n+2}{3}-\binom{m+2}{3}\end{aligned} \quad (44)$$

式中第二步推演包含尚不瞭解的算法, 猜測是利用垛積模型在多次分合操演實驗中發現的。

果9~20內容相對平凡, 本文從略。

離散數學的和分 (垛積) 與差分 (招差) 對應著連續數學的積分與微分, 在數學研究對象爲有限、常量爲主的時代, 具有基本重要性, 顯示了中國傳統數學的算法傾向。以前認爲垛積招差術研究的僅爲"高階等差級數求和"; 今天看來, 垛積術是在完整意義上的組合算法; 招差術是垛積術的逆運算, 按現代組合數學一種觀點, 有限差分法 (limited deference method) 屬於組合計數, 得到的結果往往可以用組合符號表達。所以, 相關研究可以而且應當使用求和符號 $\sum$ 和組合符號, 使公式簡明, 便於對比和交流。

朱世傑的垛積招差術實際上研究有限物體按照一定約束條件進行排列、組合、配置的問題, 他利用垛積作爲數學模型, 14世紀初得到的一批結果可以用今天的組合恒等式準確表示, 在中世紀世界數學史中堪稱獨步, 彌足珍貴, 是組合計數前期的傑作。

参考文獻

1. (元) 朱世傑,「四元玉鑒」卷下, 任繼愈主編,「中國科學技術典籍通匯 · 數學卷一」, 茭草形段7題, 1241-1242, 如象招數5題, 1249-1251, 果垛疊藏20題, 1251-1255, 河南教育出版社, 1993, 據光緒二年 (1876) 丁取忠校刊本。
2. (清) 沈欽裴,「四元玉鑒細草」, 任繼愈主編,「中國科學技術典籍通匯 · 數學卷五」, 1993, 據北圖館藏六册抄本, 有沈氏道光九年 (1829) 自序。
3. (清) 羅士琳,「四元玉鑒細草」, 鴻寶齋書局石印, 光緒丙申季 (1896) 春月; 另見道光十五年 (1835) 揚州李棠寫本; 又見萬有文庫本上中下三册, 商務印書館, 1937。羅士琳的細草對朱世傑每道題目增添了三行數表及詳解的"術"和"草"。
4. 錢寶琮, 朱世傑垛積術廣義,「學藝」第4卷第7號, 1923。
5. 錢寶琮,「古算探源」, 1930;「中國算學史」上編, 1932, p.134。
6. 湯天棟, 茭草形段羅草補注,「科學」第11卷, 1926, 1535-1558。
7. 方淑姝, 朱世傑垛積術廣義,「數學雜誌」第1卷第3期, 1939, 94-101。
8. 杜石然, 朱世傑研究, 見錢寶琮等著「宋元數學史論文集」, 科學出版社, 1966, p.191。
9. Henry W. Gould, *Combinatorial Identities*, A standardized set of tables listing 500 binomial coefficient summations, Morgantown, W. Va., 1972.
10. 邵嘉裕,「組合數學」, 同濟大學出版社, 1991, p.14。
11. 李儼,「中算史論叢」第一集, 科學出版社, 1955, 336-337。
12. G. Sarton, *Introduction to the History of Science*, Vol.3, p.701.
13. J. Needham and Wang Ling, *Science and Civilization in China*, Vol. 3, Mathematics, (10) Series and Progressions, Cambridge at the University Press, 1959, 138-139.

—本文作者任教於內蒙古師範大學科學史研究所—