數學傳播　31卷2期, pp. 76-80

勒貝格單調收斂定理一個有趣的應用: 證明尤拉的反正切公式

黃見利

一. 前言

尤拉 (Euler) 著名的反正切公式

$$\tan^{-1} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}, \tag{1}$$

發現在1755年, 在計算圓周率的數值上是一條非常重要而且很有效率的反正切級數。不像格雷哥里 (Gregory) 的反正切級數那樣, 它對所有的 x 值都是收斂的, 特別是較小的角度。舉個例子來說, 利用尤拉於1779年出版在 *Nova Acta Petropolitanae* 的反正切型公式

$$\frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{3}{79}\right), \tag{2}$$

配合公式 (1), 我們得到下列高收斂級數

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}=&\frac{7}{10}\Big\{1+\frac{2}{3}\Big(\frac{2}{10^2}\Big)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\Big(\frac{2}{10^2}\Big)^2+\cdots\Big\}\\&+\frac{7584}{10^5}\Big\{1+\frac{2}{3}\Big(\frac{144}{10^5}\Big)+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\Big(\frac{144}{10^5}\Big)^2+\cdots\Big\}\end{aligned}$$

利用這條級數, 尤拉在一個小時內算出了二十位圓周率的小數!

二. 舊的證明法

首先, 我們定義超幾何級數如下 [1]:

定義 I: 級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ 被稱爲超幾何級數, 假使 $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ 爲 n 的有理函數。

定義 II: $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(d+n-1) = \prod_{j=0}^{n-1} \alpha + j,\ \alpha \neq 0$。我們稱 $(\alpha)_n$ 爲波伽瑪 (Pochhammer) 符號。

特別地, $(\alpha)_0 = 1$, $(1)_n = n!$。

由於 $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ 爲 n 的有理函數, 在不失爲一口性的情況下, 可以將它寫成下列形式:

$$R(n) = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)}{(n+1)(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)}$$

因此, 我們就有了超幾何級數標準符號的定義:

定義 III: ${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(a_1)_n(a_2)_n\cdots(a_p)_n}{n!(b_1)_n(b_2)_n\cdots(b_q)_n} z^n.$

利用此符號, 我們列出一些熟悉的級數來:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = {}_0F_0\left[\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; z\right]$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = {}_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; -\frac{z^2}{4}\right]$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z_0F_1\left[\begin{matrix} - \\ \frac{3}{2} \end{matrix}; -\frac{z^2}{4}\right]$$

$$\sin^{-1} z = z_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}; z^2\right], \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = {}_1F_0\left[\begin{matrix} 1 \\ - \end{matrix}; z\right], \quad |z| < 1$$

接下來, 我們有下述定理:

定理: 超幾何級數 ${}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_p \\ b_1, b_2, \ldots, b_q \end{matrix}; z\right]$ 在

1. $p < q+1$ 時, 對所有的 z 皆爲絕對收斂。
2. $p > q+1$ 時, 對所有的 $z \neq 0$ 皆爲發散。
3. $p = q+1$ 時, 對 $|z| < 1$ 爲絕對收斂。
4. $p = q+1$ 時, 對 $|z| > 1$ 爲發散。

5. $p=q+1$ 時, 對 $|z|=1$ 爲收斂或發散則未確定。

其中, 特別著名的例子爲 ${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right]$。偉大的高斯 (Gauss) 曾對此做過廣泛的研究並在1812年發表此研究的演講。

接著, 我們先列出格雷哥里在1671年發現的反正切級數

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|\le 1. \tag{3}$$

然後, 利用波伽瑪符號 $(\alpha)_n$ 和恆等式 $\dfrac{(\frac{3}{2})_n}{(\frac{1}{2})_n}=2n+1$, 我們將公式 (3) 寫成超幾何級數的形式:

$$\tan^{-1}x=x\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}1,\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{matrix};-x^2\right].$$

現在考慮下列由高斯的博士論文指導教授普法夫 (Pfaff) 所發現的變換公式 [2]

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\ c\end{matrix};z\right]=(1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}a,c-b\\ c\end{matrix};-\frac{z}{1-z}\right],\ |z|<1 \text{ 且 } |\frac{z}{1-z}|<1.$$

設 $a=1,\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\dfrac{3}{2},\ z=-x^2$ 我們就可得到

$$\tan^{-1}x=\frac{x}{1+x^2}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}1,1\\ \frac{3}{2}\end{matrix};\frac{x^2}{1+x^2}\right]$$

由於 $(2n+1)!=(2)_{2n}=2^{2n}n!(\frac{3}{2})_{2n}$, 上述方程式就給出了

$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

三. 新的證明法

非常感□現代強而有力的數學分析工具! 下面我們將經由特殊的積分技巧, 再利用勒□格 (Lebesgue) 無窮級數單調收斂定理來證明公式 (1)。

考慮下列式子

$$\int_0^1\frac{x}{1+\phi^2x^2}d\phi=\Big[\tan^{-1}\phi x\Big]_0^1=\tan^{-1}x.$$

經由 $\phi = \cos\theta$ 的替代, 我們可以得到

$$\tan^{-1} x = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\theta}{1+x^2\cos^2\theta} d\theta.$$

現在, 我們先使用下列關鍵性的技巧:

$$1+x^2\cos^2\theta = 1+x^2(1-\sin^2\theta) = 1+x^2-x^2\sin^2\theta = (1+x^2)\Big(\frac{1+x^2-x^2\sin^2\theta}{1+x^2}\Big)$$
$$= (1+x^2)\Big(1-\frac{x^2\sin^2\theta}{1+x^2}\Big).$$

則

$$\tan^{-1} x = \int_0^{\pi/2} \frac{x\sin\theta}{1+x^2} \frac{1}{1-\dfrac{x^2\sin^2\theta}{1+x^2}} d\theta.$$

接著利用幾何級數

$$\frac{1}{1-u} = 1+u+u^2+\cdots, \quad |u|<1,$$

我們擴充積分項中第二個分式就得到了

$$\tan^{-1} x = \int_0^{\pi/2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}} \sin^{2n+1}\theta\right] d\theta. \tag{4}$$

接下來, 應該是使用現代強而有力的重型武器的時候了! 下述定理就是這項裝備。

勒貝格無窮級數單調收斂定理 [3]: 設 $c_n(x) \geq 0$, 則

$$\int_E \Big[\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\Big] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E c_n(x) dx,$$

只要等號兩邊皆爲收斂。

現在, 使用另一個關鍵性的技巧來重寫 (4), 得到

$$\tan^{-1} x = x\int_0^{\pi/2} \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}} \sin^{2n+1}\theta\Big] d\theta$$

然後我們觀察到, 在中括弧內是一個非負項的級數, 即使 x 是爲負值。而且, 我們又知道, 一個函數在有界可測度的集合 E 上是黎曼 (Riemann) 可積分的必定是在 E 上爲勒□格可積分的。因此, 將加總符號和積分符號的順序交換後, 我們得到

$$\tan^{-1} x = x\sum_{n=0}^{\infty} \Big[\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta d\theta\Big] \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}$$

此處, 我們利用到初等微積分一個很基礎卻是非常重要的結果

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta d\theta = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

我們鼓勵□者動手復習這個美麗的積分式。

參考文獻

1. http://www.math.rutgers.edu/∼asills/teach/spr05/hypergeom.pdf#search ='hypergeometric%20series'
2. G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1999)68.
3. W. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Dekker, New York(1977)66.

—本文作者現就讀於國立臺灣大學數學研究所碩士班三年級—