數學傳播 31卷2期, pp. 62-75

Kronecker 極限公式的應用[1,2]

王友仁

微積分教本談論“級數”常只能檢驗它是“收斂”或“發散”而已, 很少能求出其解, 本文運用 Hurwitz Zeta function 的 limit formula 來計算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}$, 其中 $p(x)=\prod_{i=1}^{k}(x+\delta_i)$, $k\geq 2$, 且 $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_k$ 爲相異正有理數, 個人覺得相當有趣願與大家分享。

專有名詞介紹: C (複數), $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n)=\gamma$ (Euler 常數), $S=\sigma+i\tau$, $\sigma=\mathrm{Re}S$ (實部 S), $\tau=\mathrm{Im}S$ 虛部 S, $n!$ (n 階乘), $\prod$ (諸數的連乘積), $O(S)$ (大 $O(S)$ 符號), π (圓周率), $p(x)=\prod_{i=1}^{k}(x+\delta_i)$ ($k\geq 2$ 的多項式), $\zeta(S)$ (Riemann Zeta 函數), $\Gamma(S)$ (Gamma 函數), $\zeta(s,\delta)$ (Hurwitz Zeta 函數), B_n ($n=0,1,2,\ldots$) (Bernoulli numbers 柏努利數)。

1. 介紹

Kronecker 極限公式

$$\lim_{s\to 1}(\zeta(s)-\frac{1}{s-1})=\gamma \quad \text{(Euler 常數)} \tag{1}$$

這兒 Riemann Zeta 函數 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, Hurwitz Zeta 函數 $\zeta(s,\delta)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\delta)^{-s}$, 當 $\delta=1$ 時, $\zeta(s,1)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\zeta(s)$。

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n),\quad \gamma=0.57721\cdots \text{ (也是 Euler 常數)} \tag{2}$$

這裡 (1), (2) 如何證明其等值, 請看預備定理1, 便知曉。我們將擴大 Kronecker 極限公式到

[1]由衷地感謝恩師余文卿指導教授的辛苦指導, 諄諄善誘, 此篇方能付梓, 再三感謝。

[2]本文適合大四以上程度閱讀研習, 也歡迎各校列爲教材研究。

Hurwitz Zeta 函數, 以得到結果

$$\lim_{s\to 1}(\zeta(s,\delta)-\frac{1}{s-1})=-\frac{\Gamma'(\delta)}{\Gamma(\delta)}$$

從而計算一些無限收斂級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)^{-1}$ 的值, 在這裡 $p(x)=\displaystyle\prod_{i=1}^{k}(x+\delta_i)$, $k\geq 2$ 的 k 次多項式。

2. 重要結果

以下先討論一些重要性質, 諸如 Gamma 函數, Riemann Zeta 函數及柏努利數。

$$\begin{aligned}
\text{Gamma 函數: }\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt,\ \text{Re } s>1,\ \ \text{其中 } s=\sigma+i\tau,\ \sigma \text{ 及 } \tau \text{ 皆實數},\\
&= \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt+\int_1^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt\\
&= \int_0^1 t^{s-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!}\Big)dt+\int_1^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{n+s}+\int_1^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt,\quad \forall\ s\in C
\end{aligned}$$

在右邊的第二項是一個解析函數, 因其廣義積分 (improper integral) 是絕對收斂。而右邊第一項是 s 的有理型函數 (meromorphic function)。

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt,\ \text{Re } s>1\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{n+s}+\int_1^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt,\quad \forall\ s\in C
\end{aligned}\tag{3}$$

是解析連續 (analytic continuation)。

另方面, 利用部份積分法, 可獲得

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\tag{4}$$

證明: 令 $\mu=t^s$, $d\nu=e^{-t}dt$,

$$\int_{\varepsilon}^{R} t^s e^{-t}dt=-t^s e^{-t}\Big|_{\varepsilon}^{R}+s\int_{\varepsilon}^{R} t^{s-1}e^{-t}dt,\quad s>0,$$

這 $0<\varepsilon\le R<\infty$。令 $\varepsilon\to 0^+$ 且 $R\to\infty$ 時,

$$\Gamma(s+1)=-\lim_{R\to\infty}R^se^{-R}+s\Gamma(s)\quad \text{用 L'Hospitals rule}$$
$$\therefore\quad \lim_{R\to\infty}R^se^{-R}=0$$
$$\text{得}\qquad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

如果重複使用上式, $\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1,\cdots,$

$$\Gamma(s+m+1)=(s+m)\Gamma(s+m)=\cdots=s(s+1)\cdots(s+m)\Gamma(s),$$

因而有

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+m+1)}{s(s+1)\cdots(s+m)},\ \ \mathrm{Re}\,s>-m,\ \ m\in Z^+ \tag{5}$$

就 (5) 式中, $\Gamma(s)$ 在 $s=0,-1,-2,\ldots,-m$, 我們可算出其留數 (Residue)。

在 $s=-m$ 時的留數

$$\lim_{s\to -m}(s+m)\Gamma(s)=\lim_{s\to -m}\frac{\Gamma(s+m+1)}{s(s+1)\cdots(s+m-1)}=\frac{(-1)^m}{m!} \tag{6}$$

3. Riemann Zeta 函數及 Hurwitz Zeta 函數

Riemann Zeta 函數 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}$, Re $s>1$, 它的每一項受限 (dominated) 在 $n^{-\sigma}$, $\sigma=$Re s, 另方面 Hurwitz Zeta 函數, $\zeta(s,\delta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\delta)^{-s}$, $\forall\quad\delta>0$, 而當 $\delta=1$ 時, $\zeta(s,1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-s}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\zeta(s)$ 關係一致。

4. Bernoulli numbers (柏努利數) 及 Bernoulli Polynomials (柏努利多項式)

$$\forall\quad |t|<2\pi,\qquad \frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nt^n}{n!}, \tag{7}$$

展開式中的 B_n $(n=0,1,2,\ldots)$ 叫 Bernoulli number。因 $e^t-1=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}$, 從而化作

$$t=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nt^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\Big) \tag{8}$$

比較 (8) 中左, 右兩邊 t 的係數, 獲遞推公式 (recursive formula) 如下:

$$\binom{n}{0}B_0+\binom{n}{1}B_1+\cdots+\binom{n}{n-1}B_{n-1}=0$$

例如 $B_0=1$, $B_1=-\dfrac{1}{2}$, $B_2=\dfrac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\dfrac{1}{30}$, $\cdots$。

因函數 $F(t)=\dfrac{t}{e^t-1}+\dfrac{t}{2}$ 是 t 的一個偶函數 (even function), 故 $B_{2k+1}=0$, $\forall\quad k\geq 1$。考慮

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)\cdot t^n}{n!}$$

展開式中的 $B_0(x),B_1(x),\ldots,B_n(x)$ 叫柏努利多項式 (Bernoulli polynomials)。

由上可知

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

5. Riemann Zeta 函數的解析連續 (analytic continuation)

令 $t=nx$, 重寫 $\Gamma(s)=n^s\displaystyle\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-nx}dx$, Re $s>1$,

$$\Gamma(s)n^{-s}=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-nx}dx$$

當 Re $s>1$, 這兒 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$ 是絕對收斂。

利用 Lebesque dominated Convergence Theorem 得

$$\Gamma(s)\zeta(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}dx=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx,\ \text{Re } s>1. \tag{9}$$

故有

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s)&=\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx=\int_0^{1}x^{s-2}\Big(\frac{x}{e^x-1}\Big)dx+\int_1^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\\&=\int_0^{1}x^{s-2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nx^n}{n!}\Big)dx+\int_1^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{1}{n+s-1}+\int_1^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx,\quad\forall\quad s\in C\end{aligned} \tag{10}$$

右邊第二項是廣義積分型, 它是絕對收斂。而右邊第一項 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{1}{n+s-1}$ 是 s 一個有理型函數 (meromorphic function)。從

$$\zeta(s)\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}\cdot\frac{1}{n+s-1}+\int_1^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx \tag{11}$$

可以知道 $\zeta(s)\Gamma(s)$ 在整個複數平面上是解析連續 (analytic continuation), 其單極 (simple poles) 存在於 $s=1,0,-1,-2,\ldots$

但由 (3)

$$\Gamma(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{n+s}+\int_1^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$$

知單極 (simple poles) 存在於 $s=0,-1,-2,\ldots$。其相互間必有差異, 故知 $\zeta(s)$ 有單極在 $s=1$, 留數 (residue) 也是1。

從而獲知 $\lim\limits_{s\to 1}(\zeta(s)-\frac{1}{s-1})$ 存在, 接下來吾人將求其值。

預備定理1: Kyonecker 極限公式 $\lim\limits_{s\to 1}(\zeta(s)-\frac{1}{s-1})=\gamma$, Euler 常數。

證明: 利用部份積分法

$$\int_0^1 f'(x)B_1(x)dx=\frac{1}{2}[f(1)+f(0)],$$

這裡 $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$, 對任何連續可微函數 f

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}f'(x+k)B_1(x)dx&=\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}f'(x+k)(x-\frac{1}{2})dx\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 f'(x+k)(x-\frac{1}{2})dx\\&=\sum_{k=1}^{n-1}[f(x+k)(x-\frac{1}{2})\Big|_0^1]-\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 f(x+k)dx\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\{\frac{1}{2}[f(k)+f(k+1)]\}-\int_1^n f(x)dx\\&=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx-\frac{1}{2}[f(1)+f(n)]\end{aligned}$$

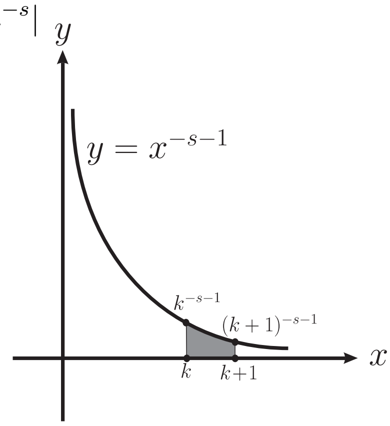
接著 $\displaystyle\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}f'(x+k)(x-\frac{1}{2})dx+\frac{1}{2}[f(1)+f(n)]=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$

令 $f(x)=x^{-s}$, Re $s>1$,

$$-s\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(x+k)^{-s-1}(x-\frac{1}{2})dx+\frac{1}{2}(1+n^{-s})=\sum_{k=1}^{n}k^{-s}-\frac{1-n^{1-s}}{s-1}$$

假設 $\phi_n(s)=-s\int_0^1\sum_{k=1}^{n-1}(x+k)^{-s-1}(x-\frac{1}{2})dx+\frac{1}{2}(1+n^{-s})$, 因此

$$\begin{aligned}|\phi_n(s)|&\le|s|\sum_{k=1}^{x-1}\int_0^1|(x+k)^{-s-1}|\Big|x-\frac{1}{2}\Big|dx+\frac{1}{2}|1+n^{-s}|\\&\le\frac{1}{2}|s|\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}|x^{-s-1}|dx+\frac{1}{2}|1+n^{-s}|\\&\le\frac{1}{2}|s|\sum_{k=1}^{n-1}k^{-s-1}+\frac{1}{2}|1+n^{-s}|\end{aligned}$$



當 Re $s=\sigma>1$ 且 $n\to+\infty$ 時, 右邊是絕對收斂。獲結論: 當 $\sigma=1$ 時且 $n\to+\infty$ 時, $\phi_n(s)$ 是均勻收斂 (uniformly convergent), 如圖

因此重要結論: $\lim\limits_{s\to1}\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(s)=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{s\to1}\phi_n(s)$ 成立。今

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1}\lim_{n\to+\infty}\phi_n(s)&=\lim_{s\to1}\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\Big)\\&=\lim_{s\to1}\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^{-s}-\frac{1-n^{1-s}}{s-1}\Big)\\&=\lim_{s\to1}\Big(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\Big)\end{aligned}$$

另方面

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\lim_{s\to1}\phi_n(s)&=\lim_{n\to+\infty}\lim_{s\to1}\Big(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\Big)\\&=\lim_{n\to+\infty}\lim_{s\to1}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^{-s}-\int_1^n x^{-s}dx\Big)\\&=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\Big)\\&=\gamma\ \ \text{(Euler 常數)}\ \doteqdot 0.57721\cdots\cdots\end{aligned}$$

綜上討論

$$\lim_{s\to 1}\Big(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\Big)=\gamma=\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\Big).$$

擴大上述討論到 Hurwitz Zeta 函數

預備定理2: $\forall\ |Z|<1,\ \log\ \Gamma(1+Z)=-\gamma Z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}(-Z)^k\zeta(k).$

證明: 利用函數方程 $\Gamma(1+Z)=Z\Gamma(Z)$ 與乘積公式

$$\frac{1}{\Gamma(Z)}=Ze^{\gamma Z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big\{\Big(1+\frac{Z}{n}\Big)e^{-\frac{Z}{n}}\Big\} \tag{12}$$

取對數 $-\log\Gamma(1+Z)=\gamma Z+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(-\frac{Z}{n}\Big)+\log\Big(1+\frac{Z}{n}\Big)\Big]$

$$\begin{aligned}\log\Gamma(1+Z)&=-\gamma Z-\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\Big(-\frac{Z}{n}\Big)+\Big(\frac{Z}{n}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{Z}{n}\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(\frac{Z}{n}\Big)^3\cdots\cdots\Big]\\&=-\gamma Z+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{Z}{n}\Big)^2-\frac{1}{3}\Big(\frac{Z}{n}\Big)^3\cdots\cdots\Big]\\&=-\gamma Z+\sum_{k=2}^{\infty}\Big[\frac{1}{k}(-Z)^k\zeta(k)\Big]\end{aligned} \tag{13}$$

由 $\log\Gamma(1+Z)=\log Z+\log\Gamma(Z)$ ($\because\ \Gamma(1+Z)=Z\Gamma(Z)$) 微分 $\frac{\Gamma'(1+Z)}{\Gamma(1+Z)}=\frac{1}{Z}+\frac{\Gamma'(Z)}{\Gamma(Z)}$ 且

$$\frac{\Gamma'(1+Z)}{\Gamma(1+Z)}=-\gamma+\sum_{k=2}^{\infty}(-Z)^{k-1}\cdot(-1)\cdot\zeta(k) \tag{14}$$

當 $Z=0$ 時, $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=-\gamma$。

預備定理3: 在 $s=1$ 時, Hurwitz Zeta 函數 $\zeta(s,\delta)$ 展開式

$$\zeta(s,\delta)=\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(\delta)}{\Gamma(\delta)}+O(s-1)$$

證明: $\forall\ \mathrm{Re}\, s > 1$

$$\begin{aligned}
\zeta(s,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\delta)^{-s} &= \delta^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+\delta)^{-s}, \qquad 0<\delta\le 1\\
&= \delta^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Big(1+\frac{\delta}{n}\Big)^{-s}\\
&= \delta^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Big[1+\binom{-s}{1}(\frac{\delta}{n}) + \binom{-s}{2}(\frac{\delta}{n})^2+\cdots\Big]\\
&= \delta^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Big[1+(-s)(\frac{\delta}{n}) + \frac{(-s)(-s-1)}{1\times 2}(\frac{\delta}{n})^2+\cdots\Big]
\end{aligned}$$

其中 $-s = \dfrac{\Gamma(s+1)}{-\Gamma(s)}, \dfrac{(-s)(-s-1)}{1\times 2} = \dfrac{\Gamma(s+2)\cdot(-1)^2}{\Gamma(s)\cdot 2!}, \cdots$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \zeta(s,\delta) &= \delta^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\Big[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(s+k)\cdot(-1)^k}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)}\Big(\frac{\delta}{n}\Big)^k\Big]\\
&= \delta^{-s} + \zeta(s) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\delta)^k\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)\Gamma(k+1)}\times\zeta(s+k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \lim_{s\to 1}(\zeta(s,\delta)-\frac{1}{s-1}) &= \lim_{s\to 1}(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}) + \frac{1}{\delta} + \sum_{k=1}^{\infty}(-\delta)^k\zeta(k+1)\\
&= \gamma + \frac{1}{\delta} + \sum_{k=1}^{\infty}(-\delta)^k\zeta(k+1) \quad \text{利用(14)}\\
&= \frac{1}{\delta} - \frac{\Gamma'(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta)}
\end{aligned}$$

利用 $\dfrac{\Gamma'(1+Z)}{\Gamma(1+Z)} = \dfrac{1}{Z} + \dfrac{\Gamma'(Z)}{\Gamma(Z)}$ 上式 $\lim_{s\to 1}(\zeta(s,\delta)-\frac{1}{s-1}) = -\frac{\Gamma'(\delta)}{\Gamma(\delta)}$, 結論

$$\zeta(s,\delta) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(\delta)}{\Gamma(\delta)} + O(s-1).$$

6. 應用

令 $p(x) = \prod_{j=1}^{k}(x+\delta_j)$, $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 相異正有理數, $k\ge 2$ 的 k 次多項式。

利用 Kornecker 極限公式, 由 Hurwitz Zeta 函數得到 $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)^{-1}$ 的收斂值。

預備定理4: 假若 $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 是相異正有理數, 則 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p'(-\delta_j)}\cdot\frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)}$

特別地, 若 $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 是異正整數, 則 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p'(-\delta_j)}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\delta_j})$。

證明: 當 $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 是相異正整數時, 因 $p(x)=\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(x+\delta_j)$, $k\geq 2$。

$$\therefore\ \frac{1}{p(x)}=\frac{A_1}{x+\delta_1}+\frac{A_2}{x+\delta_2}+\cdots+\frac{A_j}{x+\delta_j}+\cdots+\frac{A_k}{x+\delta_k},$$

那 $A_1,A_2,\ldots,A_j,\ldots,A_k$ 皆待定有理數, 去分母

$$1=\Big(\frac{A_1}{x+\delta_1}+\cdots+\frac{A_j}{x+\delta_j}+\cdots+\frac{A_k}{x+\delta_k}\Big)p(x)$$

$$1=\Big(\lim_{x\to-\delta_j}\frac{p(x)}{x+\delta_j}\Big)\cdot A_j=A_jp'(-\delta_j),\quad 1\leq j\leq k$$

$$(*)\qquad \therefore A_j=\frac{1}{p'(-\delta_j)},\quad \forall\quad 1\leq j\leq k$$

另去分母 $1=\Big(\dfrac{A_1}{x+\delta_1}+\cdots+\dfrac{A_j}{x+\delta_j}+\cdots+\dfrac{A_k}{x+\delta_k}\Big)\Big(\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(x+\delta_j)\Big)$ 化成多項式, 並加以整理之, 得 $1=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}A_j\cdot x^{k-1}+Q(x)$, ($Q(x)$ 代表最高次數爲 $k-2$ 次多項式)。比較左, 右兩邊 x^{k-1} 項的係數, 得

$$(**)\qquad \sum_{j=1}^{k}A_j=0.$$

如今 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)^{-1}$ 皆可分解成一次式分式的無限級數, 應用預備定理3的 $\lim_{s\to1}$ 型式求諸無限級數的值。

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{A_j}{n+\delta_j}=\lim_{s\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{A_j}{(n+\delta_j)^s}\\&=\lim_{s\to1}\sum_{j=1}^{k}A_j\cdot\zeta(s,1+\delta_j)\\&=\lim_{s\to1}\sum_{j=1}^{k}A_j\Big[\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)}+O(s-1)\Big]\end{aligned}$$

而 $\dfrac{1}{s-1}$ 與 $O(s-1)$ 皆因 $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} A_j = 0$ 而消失掉, 僅剩下含 $\dfrac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)}$ 項。

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)} = -\sum_{j=1}^{k} A_j\cdot\frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)},\ A_j \leftrightarrow \delta_j,\ \forall\ 1\le j\le k,\ \text{方才存在。}$$

接著, 當 $\delta_1,\ldots,\delta_j,\ldots,\delta_k$ 皆相異正整數, 利用 $\dfrac{\Gamma'(1+Z)}{\Gamma(1+Z)} = \dfrac{1}{Z} + \dfrac{\Gamma'(Z)}{\Gamma(Z)}$ 的式子,

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{\Gamma'(1+\delta_j)}{\Gamma(1+\delta_j)} &= \frac{1}{\delta_j} + \frac{\Gamma'(\delta_j)}{\Gamma(\delta_j)} = \cdots = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\delta_j}+\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} \quad \text{但} \quad \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \\ &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\delta_j}-\gamma, \quad \gamma\text{為 Euler 常數}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)} &= -\sum_{j=1}^{k} A_j\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\delta_j}-\gamma\Big),\ \begin{matrix} A_1, & \ldots, & A_j, & \ldots, & A_k \\ \updownarrow, & \ldots, & \updownarrow, & \ldots, & \updownarrow \\ \delta_1, & \ldots, & \delta_j, & \ldots, & \delta_k \end{matrix}\ \text{相互對應而存在。} \\ &= -\sum_{j=1}^{k} A_j\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\delta_j}\Big), \quad \gamma\ \text{常數, 因}\ \sum_{j=1}^{k} A_j = 0\ \text{而消失。}\end{aligned}$$

由 $(*)$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)} = -\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p'(-\delta_j)}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\delta_j}\Big)$$

舉一般的例子, 說明產生的過程。

例1: 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+5)}$ 的值?

解: 令 $p(x) = (x+2)(x+3)(x+5)$ 皆是一次式的相乘積,

$\therefore\ \dfrac{1}{p(x)} = \dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{6}\ \dfrac{1}{x+5}$ 利用預備定理3,

因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(x)} = \lim_{s\to 1}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\ \frac{1}{(n+2)^s} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\ \frac{1}{(n+3)^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\ \frac{1}{(n+5)^s}\Big],$

$$\begin{aligned}\text{令}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^s} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^s} = \zeta(s,3) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)^s} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+4)^s} = \zeta(s,4) \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)^s} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+6)^s} = \zeta(s,6)\end{aligned}$$

再利用預備定理4

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(x)}=-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})-\frac{1}{6}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+5)}=\frac{13}{360}.$$

仿在例1中, $p(x)=\prod_{i=1}^{3}(x+\delta_i)$, $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 爲相異正整數, 利用預備定理4,

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}$ 的值爲正有理數值。

這裡, 給更多個例子

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+5)(n+7)}=\frac{317}{7350}$, (類似例1)
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+5)(2n+9)}=\frac{11}{1260}$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}>0$, 値含有 π, $\sqrt{3}$ 無理數。
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}=-\frac{1}{24}+\frac{\pi}{30}\cot\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{10}\cot\frac{2\pi}{5}$

摘要: $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}$。

先取對數 $\log\Gamma(s)+\log\Gamma(1-s)=\log\pi-\log\sin\pi s$

再微分 $\dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}-\dfrac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)}=-\pi\cdot\dfrac{\cos\pi s}{\sin\pi s}=-\pi\cot\pi s$

上述3、4兩題, 使用到 Gamma 函數, 帶有 π, cot 或 $\sqrt{\ }$ 式的值。

問題3: 令 $p(n)=(3n+1)(3n+2)$ 由預備定理3, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}=\frac{1}{3}\lim_{s\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{(n+\frac{4}{3})^s}-\frac{1}{(n+\frac{5}{3})^s}\Big]=\frac{1}{3}\Big\{-\frac{\Gamma'(\frac{4}{3})}{\Gamma(\frac{4}{3})}+\frac{\Gamma'(\frac{5}{3})}{\Gamma(\frac{5}{3})}\Big\}\ \text{利用預備定理4}$$
$$=\frac{1}{3}\Big\{-\frac{3}{2}-\frac{\Gamma'(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}+\frac{\Gamma'(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\Big\}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}>0.$$

已知: $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, Zeta 函數常帶有 π 的值。

7. 推廣到含有重根情況

若 $p(x)=\prod_{j=1}^{k}(x+\delta_j)$, $1\le j\le k$, 其中 δ_j 有相同的值時, 修飾一下。

理論上: 選擇 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$ 使 $p_\varepsilon(x)=\prod_{j=1}^{k}(x+\delta_j+\varepsilon_j)$ 具有相異的一次式相乘積, 借由預備定理3, 4也能如上述求解。

如: 二重根 $x+\delta_j$, $\forall\ 1\le j\le k$, 則

$$\frac{1}{p(x)}=\frac{A_1}{x+\delta_1}+\cdots+\Big(\frac{A_{j_1}}{x+\delta_j}+\frac{A_{j_2}}{x+\delta_j+\varepsilon_j}\Big)+\cdots+\frac{A_k}{x+\delta_k},$$

實際上 $\frac{A_j}{x+\delta_j}+\frac{A_{j_1}}{x+\delta_j+\varepsilon_j}$, $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,\ldots,\varepsilon_k)\to 0$ 會回復成 $\frac{A_{j_2}}{(x+\delta_j)^2}$ 型式, 但無損於吾人利用預備定理3, 4, 於是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(x)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_\varepsilon(x)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p'(-\delta_j-\varepsilon_j)}\cdot\frac{\Gamma'(1+\delta_j+\varepsilon_j)}{\Gamma(1+\delta_j+\varepsilon_j)},\quad \varepsilon\to 0$$

例2: 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+3)}$ 的值?

解: 令 $p(x)=(x+1)^2(x+3)$, $\frac{1}{p(x)}=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{x+3}$

$$\begin{aligned}\text{於是}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{4}\lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+3)^s}\Big]\\&=\frac{1}{2}(\zeta(2)-1)+\frac{1}{4}\Big[1-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\Big]\end{aligned}$$

$$\because \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+3)}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{17}{24}$本例因 $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$ 故含有 π 值。

相同方法, 我們獲致下列結果

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{3}-3$ 因 $\zeta(2)$ 關係含有 π 值。
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2(2n+5)^2}=-\frac{34}{225}+\frac{\pi^2}{64}$。
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3(n+2)}=\zeta(3)-\frac{\pi^2}{6}+\frac{1}{2}$。
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2(3n+2)^2}=\frac{7}{4}-2\pi\cot\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi^2}{27}=\frac{7}{4}-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+\frac{4\pi^2}{27}$

摘要

問題2: 令 $p(n)=(2n+1)^2(2n+5)^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}&=\frac{1}{64}\lim_{s\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\left(n+\frac{7}{2}\right)^s}-\frac{1}{\left(n+\frac{3}{2}\right)^s}\Big]+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+5)^2}\Big]\\&=-\frac{34}{225}+\frac{3}{32}\zeta(2)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2(2n+5)^2}=-\frac{34}{225}+\frac{\pi^2}{64}$$

問題4: 令 $p(x)=(3n+1)^2(3n+2)^2$,

因 $\displaystyle\frac{1}{p(x)}=\frac{-2}{3x+1}+\frac{1}{(3x+1)^2}+\frac{2}{3x+2}+\frac{1}{(3x+2)^2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}&=2\lim_{s\to 1}\Big[\zeta(s,\frac{5}{3})-\zeta(s,\frac{4}{3})\Big]+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{(3n+1)^2}+\frac{1}{(3n+2)^2}\Big]\\&=3-2\pi\cot\frac{\pi}{3}+\Big[\frac{8}{9}\zeta(2)-\frac{5}{4}\Big]\end{aligned}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2(3n+2)^2}=+\frac{7}{4}-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+\frac{4\pi^2}{27}$$

摘要總彙

若 $p(x)=\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(x+\delta_j)$, $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 相異正有理數, $k\geq 2$ 的多項式

① 若 $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 是正整數, $k\geq 2$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}$ 的無限級數是正有理數值 (如例1)。

② 若 $\delta_1,\ldots,\delta_k$ 是正有理數, $k\geq 2$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}$ 的無限級數值中, 含有 Gamma 函數帶出的 π, cot 或 $\sqrt{}$ 式值 (如問3, 4)。

③ 若 $\delta_1,\ldots,\delta_k$, $k\geq 2$ 含有重根在內 (二重、三重、四重、...)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}$ 值中, 含有 $\zeta(2),\zeta(3),\zeta(4),\ldots$ 或 Gamma 函數的 π, cot 或 $\sqrt{}$ 式值。

總之, 上述情況僅 ① 的 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p(n)}$ 是正有理數值。其餘情況, 或許含有 $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, $\zeta(4)$, ... 兼具 Gamma 函數值的 π, cot, $\sqrt{}$ 式值。

参考文獻

1. Tom, M, Apostol, *Mathematical Analysis*.
2. Tom, M, Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*.
3. C. L. Siegel, *Advanced Analytic Number Theory*, Tata Institute of Frondamental Research, Bombay 1980.
4. Leopold Flatto, *Advanced Calculus*.

—本文作者爲退休教師—