數學傳播 31卷2期, pp. 38-61

不等式之基本解題方法

張福春 · 李姿霖

摘要: 在數學中經常要比較有興趣的各種量之大小, 因此就需要藉助不等式的運算。證明不等式的技巧多樣化, 且方法不一。本篇論文主要介紹數學競賽中常見的基本不等式, 與探討證明不等式時經常使用的解題方法。

關鍵詞: 不等式、公理、三一律、遞移律、加法律、乘法律、解題方法、算幾不等式、柯西不等式、排序不等式、柴比雪夫不等式、布奴利不等式、三角不等式、詹森不等式、變數代換法、數學歸納法、放縮法、因式分解法、配方法、比較法、反證法、變形法、幾何法。

美國數學會2000年分類索引: 主要26D。

一. 前言

數學是以公理和定義爲基礎, 經過證明而得到定理。而不等式的基本公理 (axiom) 只有下面四個: 假設 a, b, c 皆爲實數。

公理1 (三一律, trichotomy axiom): 則 a, b 只可能有下面關係之一種: $a > b$, $a < b$ 或 $a = b$。

公理2 (遞移律, transitive axiom): 若$a > b$ 且 $b > c$, 則 $a > c$。

公理3 (加法律, additive axiom): 若 $a > b$, 則 $a + c > b + c$。

公理4 (乘法律, multiplicative axiom): 若 $a > b$ 且 $c > (<) 0$, 則 $ac > (<) bc$。

由上面的公理及其他的數學性質, 我們可以推演出所有不等式的定理。

不等式與各個數學分支都有密切的關係, 其理論很早就被大數學家 Gauss, Cauchy 等人著重研究, 而 Hardy, Littlewood and Pólya (1988) 及 Marshall and Olkin (1979) 等名數學家也相繼投入探討。我們可以說數學分析, 不論是純理論或應用方面, 都需要不等式的運算。

而不等式的證明之所以有趣, 主要是因爲其證明技巧靈活多樣, 且證法常因題而異, 沒有固定的程序, 尤其是各類數學競賽中不等式的問題。

嚴鎮軍 (2002) 利用50講來討論高中數學的範疇, 每一講皆是獨立的主題, 且皆舉出與主題有關的例子講解概念, 其中介紹了證明不等式的基本方法和技巧與常用著名的不等式與例子。但其證明不等式的例子大多技巧性非常強, 初學者讀來可能有些困難。而嚴鎮軍 (1993) 討論初中的數學問題, 分成代數、幾何與解題方法, 其中證明不等式的例子較簡單一些。Rusczyk 在 Art of Problem Solving 網頁中, 收錄了許多的數學問題, 包括代數學、組合學、幾何學、不等式、數論等, 有些不等式的題目已解決有答案了, 而有些還在待解中, 其中不乏有國際奧林匹克數學競賽 (International Mathematics Olympic 簡稱 IMO) 的題目, 與世界各國數學競賽的試題。但若要搜尋世界各國的競賽試題, 則可連結到 Scholes 的 Maths problems 網頁, 這個網頁以各國家舉辦的數學競賽試題作分類, 蒐集了約 4100 題奧林匹克題目與1700題其他的問題。

本篇論文探討常用不等式的證明方法, 從簡單的例子循序漸進, 瞭解基本概念後, 再綜合應用到較艱澀的例子。在第二節先介紹一些數學競賽中常用著名的基本不等式, 而其證明請參見附錄 A。第三節列舉出基本的解題方法與例子。因爲很多不等式的證明不只會用到一個基本不等式或一種解題方法, 因此第四節我們將舉出一些例子, 這些例子會多次應用到第二節提到的基本不等式與第三節的解題方法做綜合應用。

二. 常用基本不等式

首先介紹不等式常出現的兩種形式: 對稱不等式與齊次函數。當不等式有對稱或齊次的性質時, 可假設一限制條件, 這對解題會有很大的幫助, 這樣的技巧經常使用。

定義 2.1 (對稱不等式): 考慮一包含 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的不等式, 若將任兩個變數 a_i 與 a_j $(i \neq j)$ 位置交換, 都不會改變此不等式, 則稱不等式有對稱性。

由於對稱不等式中, 各變數的地位相同, 因此可將變數排序。例如假設$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。常用於排序不等式的問題。

定義 2.2 (齊次函數): 設 $k \in \mathbb{N}$ 爲變數個數, 對一固定的實數 n, $t \in \mathbb{R}$, 若滿足 $f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_k) = t^n f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, 則函數 f 稱爲 n 次齊次函數。

當 $n = 0$ 時, 稱 f 爲零次齊次函數, 且對任意實數 t, 皆有 $f(ta_1, ta_2, \ldots, ta_k) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$。因此若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \neq 1$, 令其和爲 $s \neq 0$, 即 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = s$, 則$\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s} + \cdots + \frac{a_k}{s} = 1$。且滿足

$$f\left(\frac{a_1}{s}, \frac{a_2}{s}, \ldots, \frac{a_k}{s}\right) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

所以當 f 爲零次齊次函數時, 可假設 $a_1+a_2+\cdots+a_k=1$。

接下來介紹一些常用著名的基本不等式: 算幾不等式、柯西不等式、排序不等式、柴比雪夫不等式、布奴利不等式、三角不等式、詹森不等式。

2.1. 算術、幾何與調和平均不等式 (arithmetic-geometric-harmonic inequality)

定理 2.1 (算術、幾何與調和平均不等式): 設 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 爲 n 個正實數, 則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

等號成立若且唯若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

若假設

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ ,\quad G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ ,\quad H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}}.$$

則 A,G,H 分別稱爲算術平均、幾何平均與調和平均。最常用的是算術平均 $\geq$ 幾何平均, 簡稱算幾不等式。算幾不等式與接下來要介紹的柯西不等式, 在證明不等式的題目中經常使用, 是非常重要的不等式。

例 2.1: 設 a,b,c 爲三個正數, 且 $a+2b+3c=6$, 求證

$$ab^2c^3\leq 1.$$

證明: 因爲

$$\frac{a+2b+3c}{6}=\frac{a+b+b+c+c+c}{6}.$$

利用算幾不等式, 有

$$\frac{a+b+b+c+c+c}{6}\geq\sqrt[6]{ab^2c^3}.$$

又已知 $a+2b+3c=6$, 故 $1\geq\sqrt[6]{ab^2c^3}$, 即 $ab^2c^3\leq 1$。

2.2. 柯西不等式 (Cauchy inequality)

定理 2.2 (柯西不等式): 設 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 爲兩組實數數列, 則

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2,$$

等號成立若且唯若 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$。

柯西不等式實際上是 Hölder 不等式的特例, 在此我們就不特別介紹 Hölder 不等式, 有興趣可參考 Hardy et al. (1988)。而柯西不等式可由 Lagrange 恆等式得到, Lagrange 恆等式如下

$$\begin{aligned}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) &= (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\\ &\quad+\sum_{1\le i<j\le n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.\end{aligned}$$

展開化簡即得上式的證明。因爲等式右邊第二項≥ 0, 故可得柯西不等式。

例 2.2: 設 $a-b+c=6$, 求證

$$a^2+b^2+c^2\geq 12.$$

證明: 利用柯西不等式

$$(1^2+(-1)^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(1\cdot a+(-1)b+1\cdot c)^2=36$$

將上式兩邊同除以 3 得

$$a^2+b^2+c^2\geq\frac{36}{3}=12.$$

2.3. 排序不等式 (arrangement inequality)

定理 2.3 (排序不等式): 設有兩組實數有序數列 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ 及 $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$, 則

$$\begin{aligned} & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n && \text{(順序和)}\\ \geq\ & a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n} && \text{(亂序和)}\\ \geq\ & a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 && \text{(逆序和)}\end{aligned}$$

其中 $j_1,j_2,\ldots,j_n$ 是 $1,2,\ldots,n$ 的任一排序。等號成立若且唯若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$。

排序不等式可推導出許多不等式, 例如算幾不等式、柯西不等式及接下來要介紹的柴比雪夫不等式。

例 2.3: 設 a,b,c 爲正實數, 求證

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

證明: 因爲此不等式是對稱的, 不妨假設 $a\le b\le c$, 則有 $\frac{1}{b+c}\le\frac{1}{c+a}\le\frac{1}{a+b}$。利用排序不等式有

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$

將上面二式相加得

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\ge\frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}=3.$$

故

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}.$$

2.4. 柴比雪夫不等式 (Chebyshev inequality)

定理 2.4 (柴比雪夫不等式): 設 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$, $b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$爲兩遞增實數列, 則

$$\sum_{j=1}^{n}a_jb_{n+1-j}\le\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\le\sum_{j=1}^{n}a_jb_j,$$

等號成立若且唯若 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$。

柴比雪夫不等式可視爲排序不等式的推廣, 因爲它是由排序不等式的 n 個式子相加得到, 其證明詳見附錄 A。

例 2.4: 若 n 個正數 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 滿足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, 求證

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\ge n^2.$$

證明: 此爲對稱不等式, 不妨假設 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n$, 則有 $\frac{1}{x_n}\le\cdots\le\frac{1}{x_2}\le\frac{1}{x_1}$, 利用柴比雪夫不等式, 我們有

$$x_1\cdot\frac{1}{x_1}+x_2\cdot\frac{1}{x_2}+\cdots+x_n\cdot\frac{1}{x_n}\le\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\tag{2.1}$$

在 (2.1) 中, 因爲左式和爲n, 且已知$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$, 故得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\ge n^2.$$

此例亦可利用算術平均、調和平均不等式或柯西不等式證明之。

2.5. 布奴利不等式 (Bernoulli inequality)

定理 2.5 (布奴利不等式): 設$a > -1$, 且 $r \geq 1$ 或 $r \leq 0$, 則

$$(1+a)^r \geq 1+ar,$$

等號成立若且唯若 $r=0$ 或 $r=1$。

在上述布奴利不等式中, 若r的範圍爲$0<r<1$, 則有 $(1+a)^r < 1+ar$ 的結果。此不等式的證明亦可利用泰勒展開式的餘項證之。

例 2.5: 設 n 爲正整數, 求證

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

證明: 利用布奴利不等式, 因爲 $1/n > 0$, 且 n 爲正整數, 所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}\cdot n = 2.$$

2.6. 三角不等式 (triangle inequality)

定理 2.6 (三角不等式): 設 $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 和 $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 爲兩個向量, 則

$$|\vec{a}|-|\vec{b}| \leq |\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|,$$

第一個等號成立若且唯若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 爲反向的向量, 第二個等號成立若且唯若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 爲同向的向量。

從幾何角度來看, 上式右邊不等式即三角形中任兩邊長的和大於第三邊長, 左邊不等式即三角形中任兩邊長的差小於第三邊長。

例 2.6: 對任意四邊形 $ABCD$, 求證

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD} > \overline{AD}.$$

證明: 這裡只證明當 $ABCD$ 爲一凸四邊形時, 凹四邊形的證明相同, 故省略。畫一補助凸四邊形 $ABCD$ 如圖 2.1

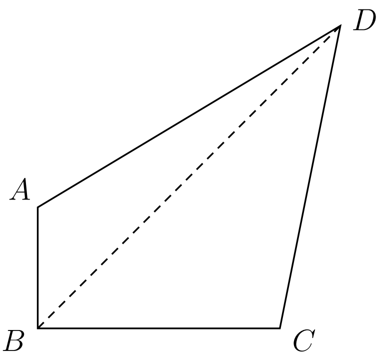

圖 2.1. 凸四邊形

若做B、D補助線, 則四邊形$ABCD$可分成兩個三角形ΔABD與ΔBCD, 利用三角不等式

$$\overline{AB}+\overline{BD}>\overline{AD} \tag{2.2}$$

$$\overline{BC}+\overline{CD}>\overline{BD} \tag{2.3}$$

將 (2.3) 左右加上$\overline{AB}$, 則有

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}>\overline{AB}+\overline{BD} \tag{2.4}$$

又由 (2.2) 與 (2.4), 得證

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}>\overline{AD}.$$

2.7. 詹森不等式 (Jensen inequality)

在介紹詹森不等式之前, 先定義何謂 (嚴格) 凸函數 (convex function)。一函數 f 稱爲在區間 $I\subseteq\mathbb{R}$ 上的 (嚴格) 凸函數, 若滿足 $a_1,a_2\in I$ 皆爲實數, $0<\lambda<1$ 且

$$f[\lambda a_1+(1-\lambda)a_2](<)\leq\lambda f(a_1)+(1-\lambda)f(a_2). \tag{2.5}$$

若將 (2.5) 不等號變號, 則 $f(x)$ 即爲 (嚴格) 凹函數 (concave function)。如何判斷一函數是 (嚴格) 凸函數? 若 x 在 I 區間上滿足 $f''(x)(>)\geq 0$, 則 $f(x)$ 在 I 上爲一 (嚴格) 凸函數。反之, 若 x 在 I 區間上滿足 $f''(x)(<)\leq 0$, 則 $f(x)$ 在 I 上爲一 (嚴格) 凹函數。

定理 2.7: (詹森不等式) 設 f在區間 I 中爲一凸函數, $a_1,a_2,\ldots,a_n\in I$ 且 $0<t_1,t_2,\ldots,t_n<1$, 滿足 $t_1+t_2+\cdots+t_n=1$, 則

$$f(t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n)\leq t_1f(a_1)+t_2f(a_2)+\cdots+t_nf(a_n), \tag{2.6}$$

如果 f 爲一嚴格凸函數, 則 (2.6) 等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

若 $f(x)$ 爲凹函數, 則會滿足 (2.6) 中將不等號變號之不等式。最常見的詹森不等式是, 若 $f(x)$ 爲凸函數且 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1/n$, 有

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) \le \frac{f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_n)}{n}, \tag{2.7}$$

同理, 若 $f(x)$ 爲凹函數, 則滿足 (2.7) 中將不等號變號之不等式。

例 2.7: 對一三角形ABC中, 求證

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

證明: 令 $f(x) = \sin x$, 則 $f''(x) = -\sin x$, 且當 $0 < x < \pi$ 時, $f''(x) < 0$, 故 $f(x)$ 爲凹函數。利用詹森不等式

$$\begin{aligned}
\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} &= \frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \\
&\le f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \\
&= \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

將上式結果同乘以 3 得

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

上述的基本不等式中, 除了布奴利不等式與詹森不等式外, 其餘皆爲齊次不等式。

三. 基本解題方法

證明不等式的途徑是先觀察不等式的形式, 如有需要, 再對原不等式作代數變形。證明不等式沒有固定的程序, 證法因題而異, 而且靈活多樣, 技巧性強。一個不等式的證法常不只一種, 一種證法中也可能要用到多種基本的不等式, 因此這一節我們將介紹一些常用的方法: 變數代換法、數學歸納法、放縮法、因式分解法、配方法、比較法、反證法、變形法、幾何法。在每個解題方法中, 我們都用一個例子做爲說明。

3.1. 變數代換法 (method of substitution)

變數代換是數學中應用相當廣泛的解題方法。引進適當的變數作代換, 不僅能使不等式的證明簡化, 而且也比較容易找到證題的思路, 不過具體使用何種代換, 因題而異。常使用三角函數作代換。變數代換的目的是要用新的變數, 代替原式的一個部分或改造原來的式子, 使問題容易解決。

例 3.1: 設 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x^2+y^2 \le 1$, 求證

$$|x^2+2xy-y^2| \le \sqrt{2}.$$

證明: 假設 $x^2+y^2=r^2$, 則 $0 \le r \le 1$。利用變數代換, 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 且 $0 \le \theta \le 2\pi$, 則

$$\begin{aligned}
|x^2+2xy-y^2| &= |\ r^2(\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)| &(3.1)\\
&= r^2|\cos 2\theta+\sin 2\theta| &(3.2)\\
&= r^2\left|\sqrt{2}\left(\cos 2\theta\sin\frac{\pi}{4}+\sin 2\theta\cos\frac{\pi}{4}\right)\right| &(3.3)\\
&= \sqrt{2}r^2\left|\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right| &(3.4)\\
&\le \sqrt{2}. &(3.5)
\end{aligned}$$

(3.1) 由變數代換的假設可得, (3.2) 利用二倍角公式: $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, 與$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, (3.3) 由輔助角公式可得, 而 (3.4) 利用和差公式, (3.5) 因爲$r^2 \le 1$, 且 $|\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})| \le 1$, 因此$\sqrt{2}r^2\left|\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$。

3.2. 數學歸納法 (method of induction)

一些與正整數或非負整數n有關的命題, 往往可以採用數學歸納法來證明。數學歸納法的證明方法就如同推骨牌一樣, 若我們能使第一張牌在推倒後也能推倒第二張牌, 則不難想像第三張牌、第四張牌$\cdots$都應該會被推倒。故若要確定排在某處的一張牌是否會被推倒的話, 只要知道在此牌前的那一張牌是否會被推倒即可, 若能確定每張牌之前的那張牌會被推倒, 則我們可說所有的牌都會被推倒。

在此所說的推倒第一張牌即爲數學歸納法中的第一步: 檢驗當$n=n_0$時, 不等式會成立, 其中n_0爲起點, 通常n_0爲1。而確定排在某處的一張牌是否會被推倒的話, 只要知道在此張牌前的那一張牌是否會被推倒, 因此第二步爲: 假設$n=k$時, 不等式成立。最後證明當$n=k+1$時, 不等式亦成立。

例 3.2: 設 $n \in \mathbb{N}$, 且 $n \geq 3$, 求證

$$2^n > 2n + 1.$$

證明: 當 $n = 3$ 時, $8 = 2^3 > 2 \times 3 + 1 = 7$, 因此不等式成立。假設當 $n = k$ 時, 不等式亦成立, 即

$$2^k > 2k + 1.$$

考慮當$n = k + 1$時, 則 $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k$。因爲當 $k > 1$ 時, $2^k > 2$, 因此

$$2^{k+1} = 2^k + 2^k > (2k + 1) + 2 = 2(k + 1) + 1.$$

故對所有 $n \geq 3$, 得知 $2^n > 2n + 1$。

3.3. 放縮法 (method of stretching)

證明不等式時, 放大或縮小一些項的方法稱爲放縮法。例如, 若要證 $A \leq B$, 一種方式是: 借助於一個或多個中間量 C 來比較。換句話說, 若有某種方法能斷定 $A \leq C$, 就可以試著去證明 $C \leq B$。則由不等式的遞移律即得 $A \leq B$。這是一種把 A 放大的方法, 不過可能由於放大得太多, 以致 $C \leq B$ 不成立, 那就只有另行設法。當然也可以採用把 B 縮小的辦法。其過程可用圖 3.1 表示

$$\overset{\text{目的}}{\overrightarrow{A \ \leq \underbrace{C_1 \ \leq C_2 \ \leq \ \cdots}_{\text{中間量}} \ \leq \ B}}$$

圖 3.1. 放縮法

而另一種方式是將A分解爲多項的和 (或乘積), 即$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ (或 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$), $A_1 \geq 0, A_2 \geq 0, \ldots, A_n \geq 0$, 若我們可以證明$A_1 \leq B_1, A_2 \leq B_2, \ldots, A_n \leq B_n$, 則逐項相加 (或相乘), 可得$A = \Sigma_{i=1}^n A_i \leq \Sigma_{i=1}^n B_i$(或$A = \Pi_{i=1}^n A_i \leq \Pi_{i=1}^n B_i$), 再利用上述的方式, 試著證明$\Sigma_{i=1}^n B_i$(或$\Pi_{i=1}^n B_i$)$\leq B$, 即得$A \leq B$。其過程可用下圖表示

$$\begin{array}{c} A \leq \sum_{i=1}^n A_i, \quad \sum_{i=1}^n B_i \leq B \\ \text{或} \\ A \leq \prod_{i=1}^n A_i, \quad \prod_{i=1}^n B_i \leq B \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} A_1 \leq B_1 \\ \vdots \\ A_n \leq B_n \end{array} \right. \longrightarrow A \leq B.$$

例 3.3: 設 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 個互不相同的正整數, 且 $n > 1$, 求證

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} < 2.$$

證明: 此不等式有對稱性, 又因爲$a_1, a_2, \ldots, a_n$爲互不相同的正整數, 不妨假設$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 因此$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \ldots, a_n \geq n$, 則我們有

$$\begin{aligned} a_1^2 \geq 1^2 &\Rightarrow \frac{1}{a_1^2} \leq \frac{1}{1^2}, \\ a_2^2 \geq 2^2 &\Rightarrow \frac{1}{a_2^2} \leq \frac{1}{2^2}, \\ &\vdots \\ a_n^2 \geq n^2 &\Rightarrow \frac{1}{a_n^2} \leq \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

將上面n個不等式相加得

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2} &\leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \\ &< 2. \end{aligned}$$

此題證法是將每一項$1/a_i^2$分別放大, 再利用加法的保序性得證。

3.4. 因式分解法 (method of factorization)

因式分解就是將一個多項式化成因式乘積的形式, 常用的技巧有拆項與添項。拆項是將某項拆成兩項或更多項的和; 而添項是將原式添上兩個符號相反的項。在拆項或添項後, 我們常會在各項之間造出公因式, 來達到因式分解的目的。熟知的十字交乘法其實是拆項的一種, 而配方法則是一種特殊的添項法, 如何拆項或添項, 基本上要依賴於對題目特性的觀察與分析。

例 3.4: 設 a, b, c 皆爲實數, 且滿足 $|a| > 1$, $|b| > 1$, $|c| > 1$, 求證

$$a^2 + b^2 + c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 + a^2b^2c^2 - 1 > 0.$$

證明: 將原不等式重新排序, 得

$$\begin{aligned}
&(a^2 - a^2b^2 - c^2a^2 + a^2b^2c^2) + (b^2 + c^2 - b^2c^2 - 1) \\
=& a^2(1 - b^2 - c^2 + b^2c^2) - (1 - b^2 - c^2 + b^2c^2) \\
=& (a^2 - 1)(1 - b^2 - c^2 + b^2c^2) \\
=& (a^2 - 1)(b^2(c^2 - 1) - (c^2 - 1)) \\
=& (a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \\
>& 0 \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

(3.6) 由於$|a| > 1, |b| > 1, |c| > 1$, 因此$a^2 > 1, b^2 > 1, c^2 > 1$。

3.5. 配方法 (method of completing square)

配方就是把某些項配成一個或幾個多項式正整數次冪的和之形式。通過配方解決數學問題的方法就叫配方法, 其中最常用的是配成完全平方式。而在不等式的證明中, 常會利用到“平方數非負”的性質。

例 3.5: 設 a, b 皆為實數, 求證

$$a^2 - 3ab + 3b^2 \geq 0.$$

證明: 將不等式左式配成一完全平方式, 得

$$\begin{aligned}
a^2 - 3ab + 3b^2 &= a^2 - 3ab + \frac{9}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 \\
&= \left(a - \frac{3}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

3.6. 比較法 (method of comparison)

比較法通常有兩種形式

1. 差值比較法: 欲證 $A > B$, 只需證 $A - B > 0$。
2. 商值比較法: 由乘法保序性, 若 $B > 0$, 欲證 $A > B$, 只需證 $\dfrac{A}{B} > 1$。

例 3.6: 設 a, b, c 皆為不小於 1 的實數, 求證

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 2(1 + a + b + c).$$

證明:

$$\begin{aligned}
\text{左式} - \text{右式} &= (1+a)(1+b)(1+c) - 2(1+a+b+c) \\
&= 1+a+b+c+ab+bc+ac+abc-2(1+a+b+c) \\
&= (ab-a)+(bc-c)+(ac-1)+(abc-b) && (3.7)\\
&= a(b-1)+c(b-1)+(ac-1)+b(ac-1) && (3.8)\\
&= (a+c)(b-1)+(b+1)(ac-1) && (3.9)\\
&\geq 0 && (3.10)
\end{aligned}$$

展開合併同類項得 (3.7), 再將每個括號提出公因式得 (3.8), 而因式分解得 (3.9), 又因 a, b, c 皆爲不小於1的實數, 因此 $b-1 \geq 0$ 且 $ac-1 \geq 0$, 所以 (3.10) 成立。

3.7. 反證法 (method of contradiction)

反證法是一種間接證法, 它先假設結論不眞, 於是提出一個與命題的結論相反之假設, 從這個假設出發, 經過正確的推理, 導致矛盾, 從而否定相反的假設, 達到肯定原命題爲眞的一種方法。導出矛盾的過程沒有固定的模式, 但必須從反設出發, 而種類有以下幾種: 與已知條件矛盾; 與已知的公理、定義矛盾; 與反設矛盾; 自相矛盾$\cdots$等。

例 3.7: 設 a, b 皆爲正實數, 且滿足 $a^3+b^3=2$, 求證

$$a+b \leq 2.$$

證明: 反設 $a+b>2$, 因此 $a>2-b$。我們想要得到與 $a^3+b^3=2$ 矛盾, 所以從反設出發, 其過程如下

$$\begin{aligned}
a^3+b^3 &> (2-b)^3+b^3 && (3.11)\\
&= 8-b^3+6b^2-12b+b^3 \\
&= 6b^2-12b+8 \\
&= 6(b-1)^2+2 && (3.12)\\
&\geq 2.
\end{aligned}$$

(3.11) 由反設條件 $a>2-b$ 可得, 再將 (3.11) 展開配方得 (3.12)。因此 $a^3+b^3>2$, 與題意矛盾。即反設 $a+b>2$ 不成立, 因此我們有 $a+b \leq 2$。

3.8. 變形法 (method of deformation)

此種方法不是直接對問題進攻, 而是採取迂迴策略。當所求問題無法直接求得, 或是太過於複雜時, 則需要對問題由未知向已知進行變形。將原始問題Q, 變形爲問題Q^*, 其過程可由圖 3.2 表示

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{問題}Q} \arrow[r, "\text{變形}"] \arrow[d, dashed] & \boxed{\text{問題}Q^*} \arrow[d] \\ \boxed{\text{解答}A} & \boxed{\text{解答}A^*} \arrow[l, "\text{組合}"'] \end{tikzcd}$$

圖 3.2. 變形法

例 3.8: 設 a, b, c 皆爲實數, 且滿足 $a+b+c=0$ 與 $abc=8$, 求證

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<0.$$

證明: 將原不等式做變形, 通分得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{ab+bc+ca}{8}. \tag{3.13}$$

因爲 $abc=8$, 所以 (3.13) 第二個等式成立。因此要證明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<0$, 相當於要證明 $ab+bc+ca<0$。因$a+b+c=0$, 所以

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0.$$

移項得

$$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)<0. \tag{3.14}$$

在 (3.14) 中, 因爲$abc=8$, 可知a, b, c不全爲0, 因此有$a^2+b^2+c^2>0$。

3.9. 幾何法 (geometric method)

幾何法是一種輔助方法, 將原來的不等式透過適當的圖形及幾何的性質來幫助解題。

例 3.9: 設 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 求證

$$\sin x<x<\tan x.$$

證明: 如圖 3.3 所示, 做一個半徑爲1, 圓心角爲 x 的扇形 OBD

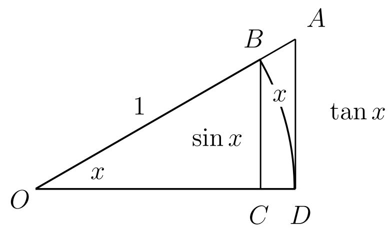

圖 3.3. $\sin x < x < \tan x$

因爲 $\overline{OB}=\overline{OD}=1$, 所以 $\overline{BC}=\sin x$, $\overline{AD}=\tan x$, 而 $\overparen{BD}=x$。因兩點間以直線爲最短距離, 且三角形BCD中, 斜邊$\overline{BD}$大於股長$\overline{BC}$, 得知 $\overparen{BD}>\overline{BD}>\overline{BC}$, 所以 $x>\sin x$。又因爲扇形 OBD面積$=\pi\times\frac{x}{2\pi}=\frac{x}{2}$, 且三角形 OAD面積$=\frac{\tan x}{2}$, 由圖形得知

$$\frac{\tan x}{2}=\text{三角形 } OAD \text{ 面積} > \text{扇形 } OBD\text{面積}=\frac{x}{2}.$$

因此$\tan x>x$, 故

$$\sin x<x<\tan x.$$

四. 綜合應用

在本節中我們舉出四個比較複雜的例子, 這些例子的解法會應用到第二節的基本不等式, 與第三節的基本解題方法, 這說明了一個不等式的證法, 常必須藉助一個或多個基本不等式與多種解題方法來完成。

例 4.1(IMO 2001 #2): 設 a,b,c 爲正實數, 求證

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

證明: 此不等式左式爲零次齊次函數, 可令 $a+b+c=1$。考慮函數 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 則 $f(x)$ 在 $x>0$ 上連續可微, 則

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-3/2},$$
$$f''(x)=\frac{3}{4}x^{-5/2}.$$

當$x>0$時, $f''(x)>0$, 所以$f(x)$爲凸函數。假設$x_1=a^2+8bc, x_2=b^2+8ca, x_3=c^2+8ab$, 根據詹森不等式得

$$af(x_1)+bf(x_2)+cf(x_3)\geq f(ax_1+bx_2+cx_3).$$

因此

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

利用放縮法, 若可證明

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}\geq 1. \tag{4.1}$$

即可證明原不等式。因爲$a+b+c=1$, 所以

$$1=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+6abc. \tag{4.2}$$

利用算幾不等式

$$\begin{aligned}&\frac{a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b}{6}\geq\sqrt[6]{a^6b^6c^6}\\ &\Rightarrow a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\geq 6abc\end{aligned} \tag{4.3}$$

由 (4.2) 與 (4.3), 可得

$$1\geq a^3+b^3+c^3+24abc. \tag{4.4}$$

將 (4.4) 開根號再取倒數, 即得 (4.1)。故

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}}\geq 1.$$

註: 本題利用零次齊次函數性質、廣義詹森不等式、放縮法、算幾不等式完成證明。

例 4.2 (1st Balkan 1984): 設 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 皆爲正數, $n\geq 1$, 且滿足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$, 求證

$$\frac{x_1}{2-x_1}+\frac{x_2}{2-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{2-x_n}\geq\frac{n}{2n-1}.$$

證明: 此爲對稱不等式, 不妨假設$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$, 則有$\frac{1}{2-x_1}\leq\frac{1}{2-x_2}\leq\cdots\leq\frac{1}{2-x_n}$。利用柴比雪夫不等式, 我們有

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{2-x_1}+\frac{x_2}{2-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{2-x_n}\\ &\geq\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\cdots+\frac{1}{2-x_n}\right)\\ &=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\cdots+\frac{1}{2-x_n}\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

利用放縮法, 從 (4.5) 若可證明

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\cdots+\frac{1}{2-x_n}\right)\geq\frac{n}{2n-1}.$$

即可證明原不等式。由算幾不等式知

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2-x_1}+\frac{1}{2-x_2}+\cdots+\frac{1}{2-x_n}\right)&\geq\sqrt[n]{\frac{1}{2-x_1}\times\frac{1}{2-x_2}\times\cdots\times\frac{1}{2-x_n}}\\&\geq\frac{n}{(2-x_1)+(2-x_2)+\cdots+(2-x_n)}\qquad(4.6)\\&=\frac{n}{2n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}\qquad(4.7)\\&=\frac{n}{2n-1}.\end{aligned}$$

利用幾何與調和平均不等式可得 (4.6), 而 (4.7) 再次利用到已知條件$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$。

註: 本題利用對稱性、柴比雪夫不等式、放縮法、算幾不等式、幾何與調和平均不等式完成證明。

例 4.3: 設 x,y 皆為正實數, 求證

$$x^y+y^x>1.$$

證明: 討論 x 的範圍, 當然也可以討論 y 的範圍, 因為此不等式對 x 與 y 而言是對稱的。因為 $x,y>0$, 假設 $x\geq 1$, 則 $x^y\geq 1$, 且 $y^x>0$, 所以 $x^y+y^x>1$。若 $0<x<1$, 則有 $1/x>1$。因為 $1/x>1>0$, 且 $x/y>0>-1$, 利用布奴利不等式, 我們有

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)^{1/x}\geq 1+\frac{x}{y}\times\frac{1}{x}=1+\frac{1}{y}.$$

因此

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{1/x}&\geq 1+\frac{1}{y}\\\left(1+\frac{x}{y}\right)^{1/x}&>\frac{1}{y}\\1+\frac{x}{y}&>\left(\frac{1}{y}\right)^x\\\frac{x+y}{y}&>\left(\frac{1}{y}\right)^x\qquad(4.8)\end{aligned}$$

將 (4.8) 取倒數, 則有

$$\frac{y}{x+y}<y^x.\qquad(4.9)$$

利用對稱性, 同理可得

$$\frac{x}{x+y} < x^y. \tag{4.10}$$

將 (4.9) 與 (4.10) 相加, 即可得$x^y + y^x > 1$。

註: 本題利用布奴利不等式、放縮法完成證明。

例 4.4: 設三角形三邊長分別爲 a, b, c, 其對應角爲 α, β, γ, 求證

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \leq \frac{\pi}{2}.$$

證明: 此爲對稱不等式, 不妨假設 $a \geq b \geq c$, 根據大邊對大角得知 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, 則 $a\alpha + b\beta + c\gamma$ 爲順序和。先證明 $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}$, 利用排序不等式, 我們有

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq a\alpha + b\beta + c\gamma \tag{4.11}$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq a\beta + b\gamma + c\alpha \tag{4.12}$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq a\gamma + b\alpha + c\beta \tag{4.13}$$

將 (4.11)、(4.12)、(4.13) 相加且移項整理得

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a+b+c)(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \geq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

因爲α, β, γ爲三角形三內角和, 所以$\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 故得

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}. \tag{4.14}$$

接下來證明 $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$, 利用三角不等式, 兩邊和大於第三邊, 有 $b+c-a > 0$, $c+a-b > 0$, $a+b-c > 0$, 因此

$$\alpha(b+c-a) > 0 \Rightarrow \alpha(a+b+c) > 2a\alpha \tag{4.15}$$

$$\beta(c+a-b) > 0 \Rightarrow \beta(a+b+c) > 2b\beta \tag{4.16}$$

$$\gamma(a+b-c) > 0 \Rightarrow \gamma(a+b+c) > 2c\gamma \tag{4.17}$$

將 (4.15)、(4.16)、(4.17) 相加且移項整理得

$$(a+b+c)(\alpha + \beta + \gamma) > 2(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$
$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

一樣$\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 所以

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}. \tag{4.18}$$

由 (4.14) 與 (4.18) 得證。

註: 本題利用對稱性、排序不等式、放縮法、三角不等式完成證明。

附錄 A: 常用基本不等式之證明

A.1. 算術、幾何與調和平均不等式之證明

證明: 先利用數學歸納法證明算幾不等式。首先證明當 $n=2$ 時, 算幾不等式會成立。由於 $\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\ge 0\Rightarrow \frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2}$。且等式成立

$$\frac{a_1+a_2}{2}=\sqrt{a_1a_2}\Leftrightarrow(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2=0\Leftrightarrow a_1=a_2.$$

假設當 $n=2^r$, 而 r 是正整數時, 算幾不等式成立。即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^r}}{2^r}\ge\sqrt[2^r]{a_1a_2\cdots a_{2^r}} \tag{A.1}$$

等式成立若且唯若 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^r}$。考慮當$n=2^{r+1}$時,

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^r}+\cdots+a_{2^{r+1}}}{2^{r+1}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^r}}{2^r}+\frac{a_{2^r+1}+a_{2^r+2}+\cdots+a_{2^{r+1}}}{2^r}\right)\\
&\ge\frac{1}{2}\left(\sqrt[2^r]{a_1a_2\cdots a_{2^r}}+\sqrt[2^r]{a_{2^r+1}\,a_{2^r+2}\cdots a_{2^{r+1}}}\right) &\text{(A.2)}\\
&\ge\sqrt{\sqrt[2^r]{a_1a_2\cdots a_{2^r}}\sqrt[2^r]{a_{2^r+1}\,a_{2^r+2}\cdots a_{2^{r+1}}}} &\text{(A.3)}\\
&=\sqrt[2^{r+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^r}a_{2^r+1}\cdots a_{2^{r+1}}}. &\text{(A.4)}
\end{aligned}$$

(A.2) 由假設 (A.1) 可得, (A.3) 再利用當 $n=2$ 時, 算幾不等式會成立的事實, 將 (A.3) 的雙重根號整理可得 (A.4)。而等式成立若且唯若

$$\begin{cases}a_1=a_2=\cdots=a_{2^r}\text{及 }a_{2^r+1}=a_{2^r+2}=\cdots=a_{2^{r+1}}\\ a_1a_2\cdots a_{2^r}=a_{2^r+1}a_{2^r+2}\cdots a_{2^{r+1}}\end{cases}$$

即 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^r}=a_{2^r+1}=a_{2^r+2}=\cdots=a_{2^{r+1}}$。所以當 r 是正整數且 $n=2^{r+1}$ 時, 算幾不等式成立。

若 n 不是 2 的正整數次方, 即欲證當 $2^{r-1} < n < 2^r$ 時, 算幾不等式會成立。假設 $n = 2^r - s$, 則 $0 < s < 2^{r-1}$。考慮 $n+s$ 個正數 $a_1, a_2, \ldots, a_n, k, k, \ldots, k$ (s 個 k), 而 $k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。因爲當 $2^r = n+s$ 時, 算幾不等式成立, 所以

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+sk}{n+s} \geq \sqrt[n+s]{a_1a_2\cdots a_nk^s} \tag{A.5}$$

$$\left(\frac{nk+sk}{n+s}\right)^{n+s} \geq a_1a_2\cdots a_nk^s \tag{A.6}$$

$$k^{n+s} \geq a_1a_2\cdots a_nk^s \tag{A.7}$$

$$k^n \geq a_1a_2\cdots a_n \tag{A.8}$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \tag{A.9}$$

由於 $k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 故 $a_1+a_2+\cdots+a_n = nk$, 再將 (A.5) 左右取 $n+s$ 次方, 可得 (A.6)。又因爲 $k^s > 0$, 因此將 (A.7) 左右同除以 k^s 得 (A.8), 最後把 $k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 代入 (A.8), 左右開 n 次方, 即得 (A.9), 而等式成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

接著利用算幾不等式證明幾何與調和平均不等式。因爲 $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ 皆爲正實數, 利用算幾不等式有

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}}.$$

將上式取倒數可得

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

等號成立若且唯若$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

A.2. 柯西不等式之證明

證明: 如果 a_i's 全爲 0, 很顯然不等式恆成立, 因此僅需證明 a_i's 不全爲 0 的情形。考慮二次函數 $f(x) = (a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$, 其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$。將右式展開得

$$f(x) = (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x + (b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

因爲平方和≥ 0, 即對於所有的$x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$的判別式$D \leq 0$。因此

$$D = 4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 - 4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \leq 0$$

將上式皆除以4再移項得

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

等號成立$\Leftrightarrow a_1x-b_1=a_2x-b_2=\cdots=a_nx-b_n\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$。

A.3. 排序不等式之證明

先證明順序和 $\ge$ 亂序和, 不妨假設在亂序和 S 中, $j_n\neq n$ (若 $j_n=n$, 則考慮 j_{n-1}), 且在和 S 中含有項 $a_kb_n(k\neq n)$。因爲

$$(a_n-a_k)(b_n-b_{j_n})\ge 0,$$

展開上式得

$$a_kb_{jn}+a_nb_n\ge a_kb_n+a_nb_{j_n} \tag{A.10}$$

由不等式 (A.10) 知, 在 $S=a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$ 中, 調換 b_n 與 b_{j_n} 的位置 (其餘不動), 所得新和 $S_1\ge S$。調整好 a_n 與 b_n 後, 接著仿上調整 a_{n-1} 與 b_{n-1}, 又得新和 $S_2\ge S_1$, 如此至多經 $n-1$ 次調整得順序和

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\ge a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n} \tag{A.11}$$

顯然, 當 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 時, (A.11) 等號成立。再證明亂序和 $\ge$ 逆序和, 考慮兩組數 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$ 及 $-b_n\le -b_{n-1}\le\cdots\le -b_1$, 應用已證得的不等式 (A.11) 得

$$-a_1b_n-a_2b_{n-2}-\cdots-a_nb_1\ge -a_1b_{j_1}-a_2b_{j_2}-\cdots-a_nb_{j_n}.$$

即

$$a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}\ge a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1.$$

A.4. 柴比雪夫不等式之證明

證明: 令 A 及 B 分別爲逆序和及順序和, 由排序不等式, 得

$$\begin{aligned}
A\le\ & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}+a_nb_n\le B\\
A\le\ & a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1\le B\\
&\vdots\\
A\le\ & a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_{n-1}b_{n-2}+a_nb_{n-1}\le B
\end{aligned}$$

將以上 n 個式子相加, 再除以 n, 即得柴比雪夫不等式, 且當 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 時, 等號成立。

A.5. 布奴利不等式之證明

證明: 令 $f(a) = (1+a)^r - 1 - ar$, 欲證 $f(a) \geq 0$。$f(a)$ 是連續且可微分函數, 所以

$$f'(a) = r(1+a)^{r-1} - r.$$

且極值發生在 $f'(a) = 0$ 的點上, 解 $r(1+a)^{r-1} - r = 0$, 得 $a = 0$。再對 $f(a)$ 作二次微分, 判斷極值爲極大值或極小值。

$$f''(a) = r(r-1)(1+a)^{r-2}.$$

當 $r \geq 1$ 或 $r \leq 0$, 則對於所有的 $a > -1$, 皆有 $f''(a) \geq 0$, 即 $f(a)$ 爲凸函數。故當 $a = 0$ 時有極小值 $f(0) = 0$, 也就是說 $f(a) \geq 0$。

A.6. 三角不等式之證明

證明: 記 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的內積, 先證明 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 因爲

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}, \text{ 且}$$
$$(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|$$

利用柯西不等式, 有

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)} = |\vec{a}||\vec{b}|.$$

所以 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$, 將前式兩邊開根號, 即得 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$。

接下來證明 $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$。令 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{d}$, 利用上述證明的結果, 有

$$|\vec{c} + \vec{d}| \leq |\vec{c}| + |\vec{d}| \tag{A.12}$$
$$|\vec{a}| \leq |\vec{a} - \vec{d}| + |\vec{d}| \tag{A.13}$$
$$|\vec{a}| - |\vec{d}| \leq |\vec{a} - \vec{d}| \tag{A.14}$$

將 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{d}$ 帶入 (A.12) 可得 (A.13), 而移項後可得 (A.14)。再令 $\vec{b} = -\vec{d}$, 則 $|\vec{b}| = |\vec{d}|$, 因此由 (A.14) 可得 $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} + \vec{b}|$。

A.7. 詹森不等式之證明

證明: 利用數學歸納法。當 $n=2$ 時, 詹森不等式爲

$$f(t_1a_1+t_2a_2)\le t_1f(a_1)+t_2f(a_2). \tag{A.15}$$

由凸函數定義知 (A.15) 成立。假設當 $n=k$ 時, 詹森不等式亦成立, 即有

$$f(t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_ka_k)\le t_1f(a_1)+t_2f(a_2)+\cdots+t_kf(a_k). \tag{A.16}$$

考慮當 $n=k+1$ 時, 欲證 $f(t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_{k+1}a_{k+1})\le t_1f(a_1)+t_2f(a_2)+\cdots+t_{k+1}f(a_{k+1})$, 而

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{k+1}t_ia_i\right)&=f\left((1-t_{k+1})\left(\frac{1}{1-t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}t_ia_i\right)+t_{k+1}a_{k+1}\right) && \text{(A.17)}\\
&\le(1-t_{k+1})f\left(\frac{1}{1-t_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}t_ia_i\right)+t_{k+1}f(a_{k+1}) && \text{(A.18)}\\
&=(1-t_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{1-t_{k+1}}a_i\right)+t_{k+1}f(a_{k+1})\\
&\le(1-t_{k+1})\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{t_i}{1-t_{k+1}}f(a_i)\right)+t_{k+1}f(a_{k+1}) && \text{(A.19)}\\
&=\sum_{i=1}^{k}t_if(a_i)+t_{k+1}f(a_{k+1})\\
&=\sum_{i=1}^{k+1}t_if(a_i)
\end{aligned}$$

(A.17) 將前 k 項同除以 $1-t_{k+1}$, 利用 $n=2$ 的結果可得 (A.18), 而 (A.19) 可從我們的假設 (A.16) 得到。故當 $n=k+1$ 時, 詹森不等式成立。

最後證明若 f 爲嚴格凸函數則等號成立的條件。利用反證法, 反設 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 不全相等, 令

$$T=\left\{j:a_j\ne\max_{1\le i\le n}a_i\right\}.$$

則 T 爲 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的子集合, 再假設

$$p=\sum_{j\in T}t_j,\quad x=\sum_{j\in T}\frac{t_j}{p}a_j,\quad 且\ y=\sum_{j\notin T}\frac{t_j}{1-p}a_j.$$

因爲f爲嚴格凸函數, 所以

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) = f(px+(1-p)y) < pf(x)+(1-p)f(y). \tag{A.20}$$

利用詹森不等式得

$$pf(x)+(1-p)f(y) \le p\sum_{j\in T}\frac{t_j}{p}f(a_j)+(1-p)\sum_{j\notin T}\frac{t_j}{1-p}f(a_j) = \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j). \tag{A.21}$$

由 (A.20) 與 (A.21) 得

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) < \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j). \tag{A.22}$$

(A.22) 與 $f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j a_j\right) = \sum_{j=1}^{n} t_j f(a_j)$矛盾, 因此等號成立若且唯若$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

參考文獻

1. 余紅兵、嚴鎭軍 (1999), 構造法解題。台北: 九章。
2. 杜錫錄、嚴鎭軍、余紅兵 (1995), 初中數學競賽教程。新竹: 凡異。
3. 胡炳生等 (2000), 國際奧林匹克數學競試第一～三十一屆解題。台北: 九章。
4. 徐道寧 (1986), 數學歸納法。新竹: 凡異。
5. 楊重駿、楊照崑 (1982), 不等式。台北: 東華書局。
6. 嚴鎭軍主編 (1993), 初中數學競賽教程。台北: 九章。
7. 嚴鎭軍主編 (2002), 高中數學競賽教程。台北: 九章。
8. Beckenbach, E. and Bellman, R. (1992), 不等式入門, 文麗譯。新竹: 凡異。
9. Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Pólya, G. (1988). *Inequalities.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.
10. International Mathematical Olympiad (IMO). http://imo.math.ca/
11. Korovkin, P. P. (1999), 不等式, 王萬良譯。台北: 九章。
12. Larson, L. C. (1998) , 通過問題學解題, 陶懋頎等譯。台北: 九章。
13. Li, K. Y. (2000). Jensen inequality. *Mathematical Excalibur*, **5**(4). http://www.math.ust.hk/excalibur/v5_n4.pdf
14. Nick, H., "Nick's Mathematical Miscellany." http://www.qbyte.org/puzzles/p044s.html
15. Marshall, A.W. and Olkin, I. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications.* Academic Press, New York.
16. Rusczyk, R. et al., "Art of Problem Solving." From AoPS Incorporated. http://www.artofproblemsolving.com/
17. Scholes, J., "Maths problems." http://www.kalva.demon.co.uk/

—本文作者任教於國立中山大學應用數學系—