數學傳播　31卷1期, pp. 68-82

第 46 屆國際數學奧林匹亞試題三的證明、加強與推廣

蔣明斌

1. 引言

2005年7月在墨西哥梅裏達 (MERIDA) 舉行的第46屆國際數學奧林匹亞 (IMO 2005) 第一天的試題三爲: 設 x, y, z 爲正數且 $xyz\geq 1$。求證:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\geq 0 \tag{1}$$

這道由韓國提供的不等式試題成爲本屆 IMO 中得分率最低的一題, 所有參賽選手的平均得分僅爲0.92分, 得滿分者只有55位 (佔10.87%), 得零分的高達417位 (佔82.41%), 足見此題的難度。莫爾多瓦 (Moldova) 選手 Boreico Iurie 因此題的解法獲得了組委會授予的特別獎。

本文擬給出此題的證明、加強與推廣。

2. 證明與加強

證明本題的關鍵是構造“零件不等式”, 將“零件不等式”組裝即得所證不等式。若不然, 而通過“去分母化爲整式不等式”的方法來證明, 可能要困難得多。

對於幾項和的對稱分式不等式來講, 所謂構造“零件不等式”, 實際上就是將和式中的每一項放縮成分母相同、分子可輪換的式子。具體如何放縮往往需要經過猜測、直覺、推理等。

此外, 在證明不等式 (1) 時還需要注意到條件 $xyz\geq 1$ 可變形爲 $\dfrac{1}{x}\leq yz$ 或 $x\geq\dfrac{1}{yz}$ 而達到換元或消元的目的。

證明1: 首先證明“零件不等式”:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} \tag{2}$$

因爲 $x^3(x^3-1)(x^2+y^2+z^2)-(x^3-1)(x^5+y^2+z^2)=(x^3-1)^2(y^2+z^2) \geq 0$, 所以

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2} \tag{3}$$

又由 $xyz \geq 1$, 有 $\frac{1}{x} \leq yz \leq \frac{y^2+z^2}{2}$, 那麼 $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$, 即不等式 (2) 成立。同理, 有

$$\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2} \geq \frac{y^2-\frac{1}{2}(z^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} \geq \frac{z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2},$$

三式相加, 有

$$\begin{aligned}&\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5}\\ \geq\ &\frac{x^2-\frac{1}{2}(y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2-\frac{1}{2}(z^2+x^2)}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}=0,\end{aligned}$$

故不等式 (1) 成立。

註記: 前面提到的莫爾多瓦 (Moldova) 選手 Boreico Iurie 獲特別獎的解法其基本思路與證明1相同, 他先證明的 (3) 式。

證明2: 由 $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=1-\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$, 知不等式 (1) 等價於

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^5+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^5} \leq \frac{3}{x^2+y^2+z^2} \tag{4}$$

注意到 $yz \geq \frac{1}{x}$, 並應用柯西不等式, 有

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) \geq (x^5+y^2+z^2)(\frac{1}{x}+y^2+z^2) \geq (x^2+y^2+z^2)^2,$$

所以 $\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \leq \frac{\frac{y^2+z^2}{2}+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, 即

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}. \tag{5}$$

同理, 有 $\dfrac{1}{x^2+y^5+z^2} \le \dfrac{3}{2}\dfrac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^5} \le \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, 三式相加, 有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^5+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^5}\\ \le&\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{3}{2}\frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{3}{2}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{3}{x^2+y^2+z^2},\end{aligned}$$

即不等式 (4) 成立, 故不等式 (1) 成立。

註記: 本題的命題者韓國的 Hojoo Lee 先生提供的解答其基本思路與上述證明2類似, 他先將 (1) 化爲等價的

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5} \le 3 \tag{6}$$

然後用柯西不等式得到 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \le \dfrac{yz+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}$, 同理得出另兩式, 三式相加得 $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^5+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^5} \le 2+\dfrac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2} \le 3$, 即 (6) 成立。

證明3: 由證明2知, 要證明不等式 (1), 只需證明不等式 (5), 注意到 $x \ge \dfrac{1}{yz}$, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^5+y^2+z^2}&=\frac{1}{x\cdot x^4+y^2+z^2}\le\frac{1}{\dfrac{x^4}{yz}+y^2+z^2}\le\frac{1}{\dfrac{2x^4}{y^2+z^2}+y^2+z^2}\\ &=\frac{y^2+z^2}{2x^4+(y^2+z^2)^2}=\frac{y^2+z^2}{\dfrac{2}{3}(x^2+y^2+z^2)^2+\dfrac{1}{3}(2x^2-y^2-z^2)^2}\le\frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\end{aligned}$$

即 $\dfrac{1}{x^5+y^2+z^2} \le \dfrac{3}{2}\dfrac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, 以下同證明2。

證明4: 注意到不等式 (1) 等價於

$$\begin{aligned}&\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}\\ \ge&\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\end{aligned} \tag{7}$$

我們證明更強的

$$\begin{aligned}&\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5}{x^2+y^2+z^5}\\ \ge 1 \ge&\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^5}\end{aligned} \tag{8}$$

爲證 (8) 左邊的不等式, 先證“零件不等式”:

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} \geq \frac{x^4}{x^4+y^4+z^4} \tag{9}$$

由 $\displaystyle \frac{x^5}{x^5+y^2+z^2} - \frac{x^4}{x^4+y^4+z^4} = x^5 \cdot \frac{y^4+z^4-\frac{1}{x}(y^2+z^2)}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)}$

$$\geq x^5 \cdot \frac{y^4+z^4-yz(y^2+z^2)}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)} \geq x^5 \cdot \frac{y^4+z^4-\frac{1}{2}(y^2+z^2)^2}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)}$$

$$= \frac{x^5}{2} \cdot \frac{(y^2-z^2)^2}{(x^5+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)} \geq 0,$$ 知不等式(9) 成立,

同理, 有 $\displaystyle \frac{y^5}{x^2+y^5+z^2} \geq \frac{y^4}{x^4+y^4+z^4}$, $\displaystyle \frac{z^5}{x^2+y^2+z^5} \geq \frac{z^4}{x^4+y^4+z^4}$ 三式相加即得式 (8) 左邊的不等式。

應用前面已證的不等式 (5), 有

$$\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{3}{2}\frac{x^2y^2+z^2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \tag{10}$$

同理有 $\displaystyle \frac{y^2}{x^2+y^5+z^2} \leq \frac{3}{2}\frac{y^2z^2+x^2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\displaystyle \frac{z^2}{x^2+y^2+z^5} \leq \frac{3}{2}\frac{z^2x^2+y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, 三式相加得

$$\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^5+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^5} \leq \frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = 1$$

即式 (8) 右邊的不等式成立, 因而不等式 (8) 成立, 故不等式 (1) 成立。

註記: 前面我們證明不等式 (1)、(4)、(8), 是通過分別構造了“零件不等式”(2)、(5)、(9)、(10) 來實現的, 這使我們回想起2001年在美國華盛頓舉行的第42屆國際數學奧林匹亞 (IMO42) 中, 也是由韓國 Hojoo Lee 先生提供的那道膾炙人口的不等式題試題 (即 IMO42-2):

設 $a, b, c > 0$, 求證

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1 \tag{11}$$

此題的命題者提供的證法同樣是先證“零件不等式”: $\displaystyle \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{3}{4}}}$, 同理得出另兩式, 相加即得 (11)。

由此可以看出, IMO46-3與 IMO42-2表面上似乎不同, 其證法何其相似, 從這個意義上講這兩道試題同出一源。只是 IMO46-3的命題者在證明 (1) 時, 先對 (1) 作代數變形化成等價不等式 (6) 後再巧妙應用柯西不等式得出"零件不等式": $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\le\dfrac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$。

另外 IMO42-2用常規方法 (即去分母去根號的方法) 容易證出, 而 IMO46-3用常規方法 (即去分母的方法) 就困難得多, 這也就是 IMO46-3得分率低, 而 IMO42-2得分率並不低的原因所在。

當然用去分母的方法證明此題並不是不可行, 只是運算量較大, 且需要較強的代數變形能力, 本次競賽中獲得金牌的臺灣選手王琨傑同學就是用此法證出了本題:

證明5: 記 $\sum x^my^n=x^my^n+y^mz^n+z^mx^n$, $\sum x^my^nz^k=x^my^nz^k+y^mz^nx^k+z^mx^ny^k$, $\sum x^m=x^m+y^m+z^m$, 將 (1) 左邊通分展開並化簡可得, 所證明不等式等價於

$$\begin{aligned}&3x^5y^5z^5+2\sum x^7y^5+2\sum x^5y^7+\sum x^9+\sum x^5y^2z^2\\ \ge&\sum x^5y^5z^2+\sum x^5y^4+\sum x^4y^5+\sum x^6+\sum x^4y^2+\sum x^2y^4+3x^2y^2z^2\end{aligned}\tag{12}$$

由算幾不等式有 $\frac{1}{4}(x^5y^5z^5+x^5y^5z^5+x^7y^5+x^5y^7)\ge\sqrt[4]{x^{22}y^{22}z^{10}}=x^5y^5z^2\sqrt{xyz}\ge x^5y^5z^2$, 對 x,y,z 輪換求和得

$$\frac{3}{2}x^5y^5z^5+\frac{1}{4}\sum x^7y^5+\frac{1}{4}\sum x^5y^7\ge\sum x^5y^5z^2\tag{12.1}$$

由算幾不等式有 $\frac{1}{3}(x^7y^5+x^5y^7+x^5y^2z^2)\ge\sqrt[3]{x^{17}y^{14}z^2}=x^5y^4\sqrt[3]{(xyz)^2}\ge x^5y^4$, 交換 x,y 得 $\frac{1}{3}(x^5y^7+x^7y^5+y^5x^2z^2)\ge x^4y^5$, 兩式相加得 $\frac{2}{3}x^7y^5+\frac{2}{3}x^5y^7+\frac{1}{3}x^5y^2z^2+\frac{1}{3}y^5x^2z^2\ge x^5y^4+x^4y^5$, 對 x,y,z 輪換求和得

$$\frac{2}{3}\sum x^7y^5+\frac{2}{3}\sum x^5y^7+\frac{2}{3}\sum x^5y^2z^2\ge\sum x^5y^4+\sum x^4y^5\tag{12.2}$$

由算幾不等式有 $\frac{1}{3}(x^9+x^9+x^2y^2z^2)\ge\sqrt[3]{x^{20}y^2z^2}=x^6\sqrt[3]{(xyz)^2}\ge x^6$, 對 x,y,z 輪換求和得

$$\frac{2}{3}\sum x^9+x^2y^2z^2\ge\sum x^6\tag{12.3}$$

由算幾不等式有 $\frac{1}{6}(x^7y^5+x^5y^7+x^9+x^5y^2z^2+2x^2y^2z^2)\ge\sqrt[6]{x^{30}y^{18}z^6}=x^4y^2xyz\ge x^4y^2$, 交換 x,y 得 $\frac{1}{6}(x^5y^7+x^7y^5+y^9+x^2y^5z^2+2x^2y^2z^2)\ge x^2y^4$, 兩式相加得

$$\frac{1}{3}x^7y^5+\frac{1}{3}x^5y^7+\frac{1}{6}(x^9+y^9)+\frac{1}{6}(x^5y^2z^2+x^2y^5z^2)+\frac{2}{3}x^2y^2z^2\ge x^4y^2+x^2y^4$$

對 x, y, z 輪換求和得

$$\frac{1}{3}\sum x^7y^5+\frac{1}{3}\sum x^5y^7+\frac{1}{3}\sum x^9+\frac{1}{3}\sum x^5y^2z^2+2x^2y^2z^2\ge\sum x^4y^2+\sum x^2y^4 \tag{12.4}$$

又,

$$\frac{3}{4}(\sum x^7y^5+\sum x^5y^7)\ge\frac{3}{4}\cdot 6\cdot\sqrt[6]{x^{24}y^{24}z^{24}}=\frac{9}{2}x^2y^2z^2(xyz)^2\ge\frac{9}{2}x^2y^2z^2 \tag{12.5}$$

以及

$$\frac{3}{2}x^5y^5z^5\ge\frac{3}{2}x^2y^2z^2 \tag{12.6}$$

將 (12.1)、(12.2)、(12.3) 、(12.4)、(12.5)、(12.6) 相加即得 (12), 因而不等式 (1) 成立。

3. 推廣

將不等式 (1)、(8) 推廣到 n 個字母的情形, 得到

命題1: 設 $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n\ge 1$, 則

$$\text{(i)}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\ne i}^{n}x_j^{n-1}}\ge 0 \tag{13}$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\ne i}^{n}x_j^{n-1}}\ge 1\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\ne i}^{n}x_j^{n-1}} \tag{14}$$

註記1: 在命題1中取 $n=3$, 由 (13)、(14) 即得 (1)、(8)。所以命題1是不等式 (1)、(8) 的推廣。

證明: 顯然不等式 (14) 是 (13) 的加強, 故只需證明 (14)。

爲證明 (14) 左邊的不等式, 先證明:

$$\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}x_j^{n-1}}\ge\frac{(x_i^{n-1})^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2} \tag{15}$$

$$(15)\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{x}(x_i^{2n-1}+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}x_j^{n-1})\ge 0\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{x}\sum_{j=1,j\ne i}^{n}x_j^{n-1}\ge 0 \tag{16}$$

因爲 $\frac{1}{x_i}\le\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\le\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}$, 又由柯西不等式有 $(n-1)\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2\ge(\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})^2$, 所以 $\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{x}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}\ge\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2-\frac{1}{n-1}(\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})^2$ $=\frac{1}{n-1}[(n-1)\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(x_j^{n-1})^2-(\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})^2]\ge 0$ 。即不等式 (16) 成立, 因而不等式 (15) 成立。於是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\ge\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{n-1})^2}{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2}=1$, 即式 (14) 左邊的不等式成立。又由 $x_1x_2\cdots x_n\ge 1$, 有 $\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\ge\frac{1}{x_i}$, 由柯西不等式有

$(x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})\ge(x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})(\frac{1}{x_i}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})$ $\ge(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2$, 所以

$$\frac{1}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\le\frac{\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}\le\frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$$
$$=\frac{n}{n-1}\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2},$$

即
$$\frac{1}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\le\frac{n}{n-1}\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}\tag{17}$$

於是, $\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\le\frac{n}{n-1}\frac{x_i^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}-x_i^{n-1})}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}=\frac{n}{n-1}\frac{x_i^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})-(x_i^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$,

對 i 求和得 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\le\sum_{i-1}^{n}\frac{n}{n-1}\frac{x_i^{n-1}(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})-(x_i^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$

$\displaystyle=\frac{n}{n-1}\frac{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2-\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2}{(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2}$, 要證式 (14) 右邊的不等式, 只需證明

$$n(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2-n(\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2\le(n-1)(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2\Leftrightarrow n\sum_{j=1}^{n}(x_j^{n-1})^2\ge(\sum_{j=1}^{n}x_j^{n-1})^2,$$

由柯西不等式知後一不等式成立, 所以 (14) 右邊的不等式成立。故不等式 (14) 成立。

註記2: 不等式 (13) 的一種直接證明:

因為 $\displaystyle\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}-\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=\frac{x_i^{n-1}(x_i^{n-1}-1)^2\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{(x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1})(x_i^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1})}\ge 0,$

由此並注意到 $\displaystyle\frac{1}{x_i}\le\prod_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\le\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}$, 則

$$\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\ge\frac{x_i^{n-1}-\frac{1}{x_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}\ge\frac{x_i^{n-1}-\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}},$$

所以 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{2n-1}-x_i^{n-1}}{x_i^{2n-1}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{n-1}-\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^{n-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}$

$$=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{n-1}-\dfrac{1}{n-1}(n-1)\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^{n-1}}=0,$$

即不等式 (13) 成立。

註記3: 不等式 (13) 等價於

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{2n-1} + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j^{n-1}} \leq \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{n-1}} \tag{18}$$

這可由前面已證得的 (17) 對 i 求和即得。

4. 進一步的推廣

作替換 $x_i^{n-1} \to x_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 則 (13)、(14)、(18) 分別等價於

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{(2n-1)/(n-1)} - x_i}{x_i^{(2n-1)(n-1)} + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \geq 0 \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{(2n-1)/(n-1)}}{x_i^{(2n-1)/(n-1)} + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \geq 1 \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^{(2n-1)/(n-1)} + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{(2n-1)/(n-1)} + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \leq \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} \tag{21}$$

其中 $x_i > 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n \geq 1$ 。

下面考慮 (19)、(20)、(21) 的進一步推廣, 首先推廣 (19)、(21) 得到

命題2: 設 $x_i > 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n \geq 1$, $p \geq 1$, 則

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p - x_i}{x_i^p + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \geq 0 \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^p + \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} x_j} \leq \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j} \tag{23}$$

註記: 在命題2中取 $p = \dfrac{2n-1}{n-1} = 2 + \dfrac{1}{n-1}$, 由 (22)、(23) 即得 (19)、(21); 又取 $n=3$, $p=\dfrac{5}{2}$, $x_1 = x^2$, $x_2 = y^2$, $x_3 = z^2$, 由 (22) 即得 (1)。可見命題2是 (19)、(21) 的推廣, 當然也是 (1) 的推廣。

證明: 顯然 (22) 與 (23) 等價, 因此只需證明 (22), 下面證明中 $p=2+\dfrac{1}{n-1}$ 成爲兩種情形的分界處。

(I) 當 $1\le p\le 2+\dfrac{1}{n-1}$ 時, 首先證明:

$$\frac{x_i^p-x_i}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\ne i}^{n}x_j}\ge\frac{x_i-x_i^{2-p}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\text{因爲(24)}\ &\Leftrightarrow(\sum_{j=1}^{n}x_j)x_i(x_i^{p-1}-1)\ge(x_i^p+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}x_j)x_i^{2-p}(x_i^{p-1}-1)\\&\Leftrightarrow(x_i^{p-1}-1)\Big[(\sum_{j=1}^{n}x_j)x_i^{p-1}-(x_i^p+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}x_j)\Big]\ge 0\\&\Leftrightarrow(x_i^{p-1}-1)^2\sum_{j=1,j\ne i}^{n}x_j\ge 0,\end{aligned}$$

後一式顯然成立, 所以 (24) 成立。

對 (24) 兩邊求和, 有 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p-x_i}{x_i^p+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}x_j}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_i^{2-p}}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j}(\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i^{2-p})$。

因此, 要證 (22) 只需證明

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\ge\sum_{i=1}^{n}x_i^{2-p}\tag{25}$$

爲證 (25), 先證如下

引理: 設 $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n\ge 1$, $0\le t\le 1$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\ge\sum_{i=1}^{n}x_i^t.\tag{26}$$

證: 當 $t=0$ 時, 由 $x_1x_2\cdots x_n\ge 1$, 知 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\ge n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ge n=\sum_{i=1}^{n}x_i^t$,

即 (26) 成立;

當 $1\ge t>0$, 由冪平均不等式, 有 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\ge\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^t\ge\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^t}{n}$,

又 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \ge 1$, $0 \le t \le 1$, 所以 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n} \ge \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n}\right)^t$,

因此 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i}{n} \ge \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^t}{n}$, 即 (26) 成立。

現回到 (25) 的證明:

(i) 當 $1 \le p \le 2$ 時, 有 $0 \le 2-p \le 1$, 由引理, 有 $\sum\limits_{i=1}^n x_i \ge \sum\limits_{i=1}^n x_i^{2-p}$, 即 (25) 成立。

(ii) 當 $2 \le p \le 2+\dfrac{1}{n-1}$ 時, 因 $p-2 \ge 0$, 及由 $x_1x_2\cdots x_n \ge 1$ 有 $\dfrac{1}{x_i} \le \prod\limits_{j=1,j\ne i}^n x_j$,

$$所以\quad x_i^{2-p} = \frac{1}{x_i^{p-2}} \le (\prod_{j=1,j\ne i}^n x_j)^{p-2} = \prod_{j=1,j\ne i}^n x_j^{p-2} \le \frac{\sum\limits_{j=1,j\ne i}^n x_j^{(n-1)(p-2)}}{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^{2-p} \le \sum_{i=1}^n \frac{\sum\limits_{j=1,j\ne i}^n x_j^{(n-1)(p-2)}}{n-1} = \sum_{i=1}^n x_i^{(n-1)(p-2)},$$

因為 $2 \le p \le 2+\dfrac{1}{n-1}$, 所以 $0 \le (n-1)(p-2) \le 1$, 由引理有 $\sum\limits_{i=1}^n x_i \ge \sum\limits_{i=1}^n x_i^{(n-1)(p-2)}$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^n x_i \ge \sum\limits_{i=1}^n x_i^{(n-1)(p-2)} \ge \sum\limits_{i=1}^n x_i^{2-p}$, 即 (25) 成立。

綜上可知, 當 $1 \le p \le 2+\dfrac{1}{n-1}$ 時, 不等式 (22) 成立。

(II) 當 $p \ge 2+\dfrac{1}{n-1}$ 時, 設 k 為待定常數, 使

$$\frac{x_i^p - x_i}{x_i^p + \sum\limits_{j=1,j\ne i}^n x_j} \ge \frac{x_i^k - \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\ne i}^n x_j^k}{\sum\limits_{j=1}^n x_j^k} \tag{27}$$

$$(27)\Leftrightarrow(n-1)(x_i^p-x_i)\sum_{j=1}^n x_j^k\geq(n-1)x_i^k(x_i^p+\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j)-(x_i^p+\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j)\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^k$$

$$\Leftrightarrow (n-1)x_i^px_i^k-(n-1)x_ix_i^k+(n-1)(x_i^p-x_i)\sum_{j=1,j\neq i}^n x_i^k$$

$$\geq (n-1)x_i^kx_i^p+(n-1)x_i^k\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j-(x_i^p-x_i)\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^k-(\sum_{j=1}^n x_j)\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^k$$

$$\Leftrightarrow n(x_i^p-x_i)\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^k\geq[(n-1)x_i^k-\sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^k]\sum_{j=1}^n x_j$$

$$\frac{nx_i}{\sum\limits_{j=1}^n x_j}(x_i^{p-1}-1)\geq\frac{(n-1)x_i^k}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n x_j^k}-1 \tag{28}$$

因為 $\prod\limits_{i=1}^n x_i\geq 1$, $p\geq 2$, 所以 $(\prod\limits_{i=1}^n x_i)^{\frac{p-1}{n}}\geq 1$, 要使 (28) 成立, 只需

$$\frac{nx_i}{\sum\limits_{j=1}^n x_j}\left(\frac{x_i^{p-1}}{\left(\prod\limits_{j=1}^n x_j\right)^{\frac{p-1}{n}}}-1\right)\geq\frac{(n-1)x_i^k}{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n x_j^k}-1 \tag{29}$$

令 $a_j=\dfrac{x_j}{x_i}$ $(j=1,2,\ldots,n)$, 顯然 $a_i=1$, (29) 等價於

$$\frac{n}{1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j}\left(\frac{1}{\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j\right)^{\frac{p-1}{n}}}-1\right)\geq\frac{1}{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j^k}-1 \tag{30}$$

令 $A=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j^k$, $B=\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j\right)^{\frac{p-1}{n}}$, 則 (30) 等價於

$$\frac{n}{1+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j}\left(\frac{1}{B}-1\right)\geq\frac{1}{A}-1 \tag{31}$$

由算幾不等式, 有 $A=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j^k\geq\left(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^n a_j\right)^{\frac{k}{n-1}}$, 為使 $A\geq B$, 可取 $\dfrac{k}{n-1}=\dfrac{p-1}{n}$, 即 $k=\dfrac{(n-1)(p-1)}{n}$, 這時 $A\geq B>0\Rightarrow\dfrac{1}{B}-1\geq\dfrac{1}{A}-1$。

(i) 當 $\prod_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \geq 1$ 時, 則 $B=\Big(\prod_{j=1,j\neq i}^{n} a_j\Big)^{\frac{p-1}{n}} \geq 1 \Rightarrow 0 \geq \dfrac{1}{B}-1 \geq \dfrac{1}{A}-1$, 要證 (31), 只需證 $\dfrac{n}{1+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j} \leq 1$, 即 $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \geq n-1$,

這由 $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \geq (n-1)\Big(\prod_{j=1,j\neq i}^{n} a_j\Big)^{\frac{1}{n-1}} \geq n-1$ 知顯然成立, 因而 (31) 成立。

(ii) 當 $\prod_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \leq 1$ 時, 則 $B \leq 1$, 若 $A \geq 1$, 則 (31) 顯然成立; 若 $0 < A \leq 1$, 則 $\dfrac{1}{B}-1 \geq \dfrac{1}{A}-1 \geq 0$, 要證 (31) 只需證

$$\frac{n}{1+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j} \geq 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \leq n-1 \tag{32}$$

因爲 $p \geq 2+\dfrac{1}{n-1}$, 則 $k=\dfrac{(n-1)(p-1)}{n} \geq 1$, 由冪平均不等式有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j^k\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j\\ \Leftrightarrow &\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j\right)^{k} \leq \frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j^k = A \leq 1,\end{aligned}$$

所以, $\Big(\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j\Big)^k \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_j \leq n-1$,

即 (32) 成立。因此, 當 $p \geq 2+\dfrac{1}{n-1}$ 時, 取 $k=\dfrac{(n-1)(p-1)}{n}$,

有 $\dfrac{x_i^p-x_i}{x_i^p+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \geq \dfrac{x_i^k-\frac{1}{n-1}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k}{\sum_{j=1}^{n} x_j^k}$, 對 i 求和, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p-x_i}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k-\frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j^k}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^k}$$
$$=\frac{1}{(n-1)\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^k}\sum_{i=1}^{n}(nx_i^k-\sum_{j=1}^{n}x_j^k)=0,$$

即不等式 (22) 成立。證畢。

註記: 上述證明中, 第一種情形構造的“零件不等式”(24) 受啓發於前面證明1中“零件不等式”(3) (也就 Boreico Iurie 獲特別獎的證法中首先證明的); 第二種情形構造的“零件不等式”(27) 受啓發於前面證明1中“零件不等式”(2)。

再來推廣 (20) 左邊的不等式, 得到

命題3: 設 $x_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, $x_1x_2\cdots x_n\geq 1$, $p\geq 1$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^p}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geq 1. \tag{33}$$

證明: 由 $x_1x_2\cdots x_n\geq 1$, $p\geq 1$, 有 $(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{p-1}{n}}\geq 1$, 因此

$$\frac{x_i^p}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}\geq\frac{x_i^p}{x_i^p+(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{p-1}{n}}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}=\frac{x_i^k}{x_i^k+\Big(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\Big)^{\frac{p-1}{n}}\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j},$$

其中 $k=\dfrac{(n-1)p+1}{n}\geq 1$,

由算幾不等式及冪平均不等式有

$$\Big(\prod_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\Big)^{\frac{p-1}{n}}\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\leq\left(\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}x_j}{n-1}\right)^{\frac{(n-1)(p-1)}{n}}\cdot\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j$$
$$=\Big(\frac{1}{n-1}\Big)^{\frac{(n-1)(p-1)}{n}}\cdot\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}x_j\Big)^{\frac{(n-1)(p-1)}{n}+1}$$

$$= (n-1)\left(\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j}{n-1}\right)^k \le (n-1)\frac{\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k}{n-1} = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k$$

即 $\Big(\prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j\Big)^{\frac{p-1}{n}} \cdot \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j \le \sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k$, 所以 $\dfrac{x_i^p}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \ge \dfrac{x_i^k}{x_i^k+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^k} = \dfrac{x_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^k}$,

於是, $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^p}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \ge \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^k}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^k} = 1$, 即不等式 (33) 成立。

我們猜測, (20) 右邊不等式也可作類似的推廣, 即有

猜想: 設 $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $x_1x_2\cdots x_n \ge 1$, $p \ge 1$, 則

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^p+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n} x_j} \le 1. \tag{34}$$

—本文作者任教於中國四川省蓬安縣蓬安中學—