數學傳播 31卷1期, pp. 46-48

方程式之根的 n 次方之和的解法

張力友

在國中數學及高中數學教材中, 經常會出現這種考試題目:

二次方程式 $x^2-4x+5=0$ 之兩根爲 α 與 β。

試求 (1) $\alpha+\beta$ (2) $\alpha^2+\beta^2$ (3) $\alpha^3+\beta^3$ 之值。

幾乎所有的解法如下:

因 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 的兩根和爲 $-\dfrac{b}{a}$, 兩根積爲 $\dfrac{c}{a}$, 則

(1) $\alpha+\beta=4$ 且 $\alpha\cdot\beta=5$

(2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-10=6$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64-60=4$

今有位老師提出下列解法:

令 $f(x)=x^2-4x+5$ 則 $f'(x)=2x-4$

利用 $f'(x)\div f(x)$ 來解上例的3個問題

$$
\begin{array}{rrrcrrrrrrr}
 & & & & 2 & 4 & 6 & 4 & -14 & \cdots & \cdots \\
\cline{5-11}
1 & -4 & 5 &) & 2 & -4 & & & & & \\
 & & & & 2 & -8 & 10 & & & & \\
\cline{5-8}
 & & & & & 4 & -10 & 0 & & & \\
 & & & & & 4 & -16 & 20 & & & \\
\cline{6-9}
 & & & & & & 6 & -20 & 0 & & \\
 & & & & & & 6 & -24 & 30 & & \\
\cline{7-10}
 & & & & & & & 4 & -30 & 0 & \\
 & & & & & & & 4 & -16 & 20 & \\
\cline{8-11}
 & & & & & & & & -14 & -20 & 0 \\
 & & & & & & & & -14 & 56 & -70 \\
\cline{9-11}
 & & & & & & & & & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

從商式的第2個數字開始, 得 (1) $\alpha+\beta=4$ (2) $\alpha^2+\beta^2=6$ (3) $\alpha^3+\beta^3=4$。哇!! 好神奇! 而且此方法還可以計算出 $\alpha^4+\beta^4=-14, \cdots\cdots$ 等。趕快來驗算此預測是否正確?

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=36-50=-14 \quad \text{絲毫不差!}$$

這種特殊解法有何理論根據? 能否推廣至三次方程式或更高次方程式嗎? 當然是有的。

二次方程式的根爲 α 與 β, 不失一般性,

設此方程式爲 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

令 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x-\alpha)(x-\beta)$

且 $f'(x)=2x-(\alpha+\beta)$

則 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2x-(\alpha+\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\dfrac{1}{x-\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}$

$$\begin{aligned}
\text{因}\frac{1}{x-\alpha}&=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{\alpha}{x}}=\frac{1}{x}\times\left[1+\left(\frac{\alpha}{x}\right)+\left(\frac{\alpha}{x}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{x}\right)^3+\cdots+\left(\frac{\alpha}{x}\right)^n+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{x^3}+\frac{\alpha^3}{x^4}+\cdots+\frac{\alpha^n}{x^{n+1}}+\cdots\\
\text{且}\frac{1}{x-\beta}&=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{\beta}{x}}=\frac{1}{x}\times\left[1+\left(\frac{\beta}{x}\right)+\left(\frac{\beta}{x}\right)^2+\left(\frac{\beta}{x}\right)^3+\cdots+\left(\frac{\beta}{x}\right)^n+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{x}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\beta^2}{x^3}+\frac{\beta^3}{x^4}+\cdots+\frac{\beta^n}{x^{n+1}}+\cdots
\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k+\beta^k}{x^{k+1}}$

因此, 從一開始的例題的特殊解法

$$\frac{2x-4}{x^2-4x+5}=\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{-14}{x^5}+\cdots$$

得到 (1) $\alpha+\beta=4$ (2) $\alpha^2+\beta^2=6$ (3) $\alpha^3+\beta^3=4$ (4) $\alpha^4+\beta^4=-14, \ldots\ldots$

終於獲得完美的結局。

再來討論三次方程式的情形

若三次方程式的根爲 α, β 與 γ, 不失一般性,

設此方程式爲 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

令 $f(x)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

且 $f'(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

$$\text{則}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$
$$=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k+\beta^k+\gamma^k}{x^{k+1}}$$

同理, 若 n 次方程式的根爲 α_i, $i=1,2,\ldots,n$, 不失一般性,

設此方程式爲 $\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)=0$

令 $f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$

$$\text{且 } f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}^{n}(x-\alpha_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}{x-\alpha_i}$$

$$\text{則 } \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k}{x^{k+1}}$$

因此, 往後求 $\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ 時, 使用 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 來解題, 就不需要利用冗長的求值公式了!!