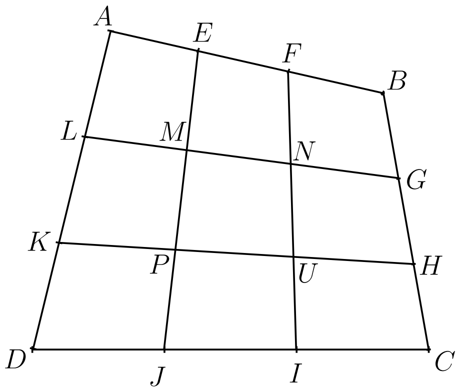
數學傳播 31卷1期, pp. 41-45

凸四邊形的三等分點問題

李彥廷

在一個偶然的機會下, 筆者得知彰化師大數學系蕭守仁教授所提出的一個幾何問題:

給定一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖一), 取 E、F 爲 $\overline{AB}$ 之三等分點, G、H 爲 $\overline{BC}$ 之三等分點, I、J 爲 $\overline{CD}$ 之三等分點, 且 K、L 爲 $\overline{DA}$ 之三等分點, 並連接 $\overline{EJ}$, $\overline{FI}$, $\overline{GL}$ 及 $\overline{HK}$。令 M, N 分別爲 $\overline{GL}$ 與 $\overline{EJ}$, $\overline{FI}$ 之交點, 而 P、U 分別爲 $\overline{HK}$ 與 $\overline{EJ}$, $\overline{FI}$ 之交點。



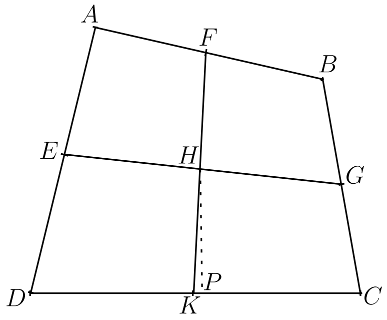
(圖一)

請問: 是否能以歐氏幾何的方法證明 $\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NG}$, $\overline{KP}=\overline{PU}=\overline{UH}$, $\overline{EM}=\overline{MP}=\overline{PJ}$ 及 $\overline{FN}=\overline{NU}=\overline{UI}$?

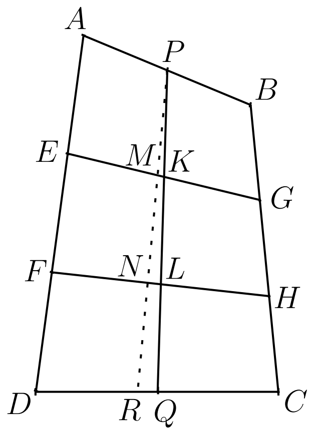
本文將證明並推廣此一結論, 並給一個有趣的應用。

在國中的歐氏幾何中, 關於任意凸四邊形的定理似乎並不太多。其中大家較熟悉的是“將凸四邊形的各邊中點依序連線所得之四邊形爲一平行四邊形”。因爲平行四邊形之對角線互相平分, 所以凸四邊形的兩組對邊中點之連線段會互相平分。有趣的是, 我們發現下列相關的結果也是成立的:

引理一: 給定一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖二)。若 E 爲 $\overline{AD}$ 之中點, F 爲 $\overline{AB}$ 之中點, G 爲 $\overline{BC}$ 之中點, 連接 $\overline{EG}$。假設 H 爲 $\overline{EG}$ 之中點, 且直線 FH 與 $\overline{CD}$ 之交點爲 K。則 K 也是 $\overline{CD}$ 之中點且 $\overline{FH}=\overline{HK}$。



(圖二)



(圖三)

證明: 取 $\overline{CD}$ 之中點 P。因爲 E、F、G、P 爲四邊形 $ABCD$ 各邊中點, 所以 $EFGP$ 爲一平行四邊形, 因此 $\overline{FP}$ 平分 $\overline{EG}$, 亦即 H 在 $\overline{FP}$ 上, 也就是說 P 是直線 FH 與 $\overline{CD}$ 之交點。但已知直線 FH 與 $\overline{CD}$ 之交點爲 K, 因此 $K=P$, 得證。

以下, 我們將"凸四邊形的兩組對邊中點之連線段會互相平分"這結果予以推廣。

引理二: 任意一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖三)。取 P 爲 $\overline{AB}$ 之中點, Q 爲 $\overline{CD}$ 之中點, E、F 爲 $\overline{AD}$ 之三等分點, G、H 爲 $\overline{BC}$ 之三等分點, 並連接 $\overline{PQ}$、$\overline{EG}$、$\overline{FH}$。令 K、L 分別爲 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 之交點。則 K 爲 $\overline{EG}$ 之中點, L 爲 $\overline{FH}$ 之中點且 K、L 爲 $\overline{PQ}$ 之三等分點 。

證明: 取 M 爲 $\overline{EG}$ 之中點, 並令直線 PM 與 $\overline{FH}$、$\overline{CD}$ 分別交於 N、R。在四邊形 $ABHF$ 中, 利用 [引理一]得知 $\overline{PM}=\overline{MN}$ 及 $\overline{FN}=\overline{NH}$。在四邊形 $EGCD$ 中, 再次利用 [引理一]可得 $\overline{MN}=\overline{NR}$ 及 $\overline{DR}=\overline{RC}$。因此 R 恰爲 $\overline{CD}$ 之中點 Q。所以線段 PQ 與線段 PR 重合且 $M=K$, $N=L$, 亦即 K 爲 $\overline{EG}$ 之中點, L 爲 $\overline{FH}$ 之中點, 且 K、L 爲 $\overline{PQ}$ 之三等分點, 得證。

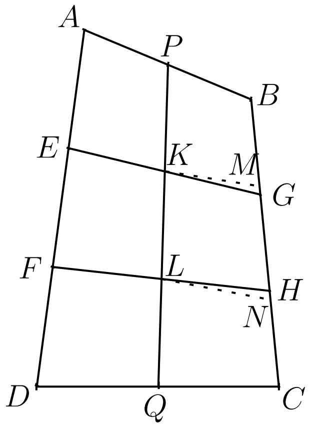
同樣地, 我們依然可以得到[引理二]的相對敘述如下,

引理三: 任意一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖四)。若 P 爲 $\overline{AB}$ 之中點, Q 爲 $\overline{CD}$ 之中點, E、F 爲 $\overline{AD}$ 之三等分點, K、L 爲 $\overline{PQ}$ 之三等分點。令 G、H 分別爲 $\overline{BC}$ 與直線 EK、直線 FL 之交點, 則 G、H 爲 $\overline{BC}$ 之三等分點, K 爲 $\overline{EG}$ 之中點, L 爲 $\overline{FH}$ 之中點。

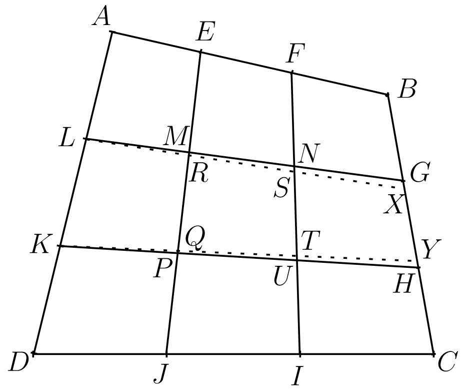
證明: 取 $\overline{BC}$ 之三等分點 M、N, 連 $\overline{KG}$、$\overline{LN}$。由 [引理二]可知 E、K、M 三點共線和 F、L、N 三點共線, K 爲 $\overline{EM}$ 之中點, L 爲 $\overline{FN}$ 之中點。但已知 G、H 分別爲 $\overline{BC}$ 與直線

EK、直線 FL 之交點, 所以點 G 和點 M 重合, 點 H 和點 N 重合, 因此點 G 和點 H 爲 $\overline{BC}$ 之三等分點, K 爲 $\overline{EG}$ 之中點, L 爲 $\overline{FH}$ 之中點, 得證。

現在我們可以來證明原本的問題了。



(圖四)



(圖五)

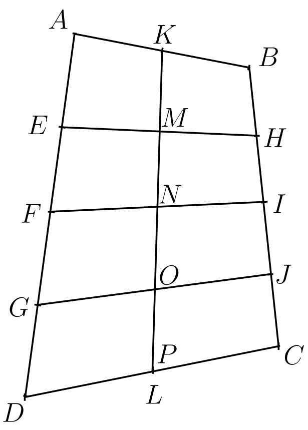
定理一: 任意一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖五), 若 E、F 爲 $\overline{AB}$ 之三等分點, G、H 爲 $\overline{BC}$ 之三等分點, I、J 爲 $\overline{CD}$ 之三等分點, 且 K、L 爲 $\overline{DA}$ 之三等分點, 連接 $\overline{EJ}$、$\overline{FI}$、$\overline{GL}$ 及 $\overline{HK}$。令 M、N 分別爲 $\overline{GL}$ 與 $\overline{EJ}$、$\overline{FI}$ 之交點, 而 P、U 分別爲 $\overline{HK}$ 與 $\overline{EJ}$、$\overline{FI}$ 之交點。則 $\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NG}$, $\overline{KP}=\overline{PU}=\overline{UH}$, $\overline{EM}=\overline{MP}=\overline{PJ}$ 及 $\overline{FN}=\overline{NU}=\overline{UI}$。

證明: 令 R、Q 爲 $\overline{EJ}$ 之三等分點, 且令直線 LR、直線 KQ 分別交 $\overline{FI}$ 於 S、T, 交 $\overline{BC}$ 於 X、Y。在四邊形 $AFID$ 中, 利用 [引理三]得知 $\overline{LR}=\overline{RS}$, $\overline{KQ}=\overline{QT}$, $\overline{FS}=\overline{ST}=\overline{TI}$。在四邊形 $EBCJ$ 中, 再利用 [引理三]得知 $\overline{RS}=\overline{SX}$、$\overline{QT}=\overline{TY}$、$\overline{BX}=\overline{XY}=\overline{YC}$。故 X、Y 即爲 $\overline{BC}$ 之三等分點 G、H, 也推得線段 LG 與線段 LX 重合, 線段 KH 與線段 KY 重合, 因而 R、S、Q、T 就是定理敍述中的 M、N、P、U, 並且已經證明 $\overline{FS}=\overline{ST}=\overline{TI}$, $\overline{LR}=\overline{RS}=\overline{SX}$, $\overline{KQ}=\overline{QT}=\overline{TY}$。所以得到 $\overline{LM}=\overline{MN}=\overline{NG}$, $\overline{KP}=\overline{PU}=\overline{UH}$, $\overline{EM}=\overline{MP}=\overline{PJ}$ 及 $\overline{FN}=\overline{NU}=\overline{UI}$, 得證。

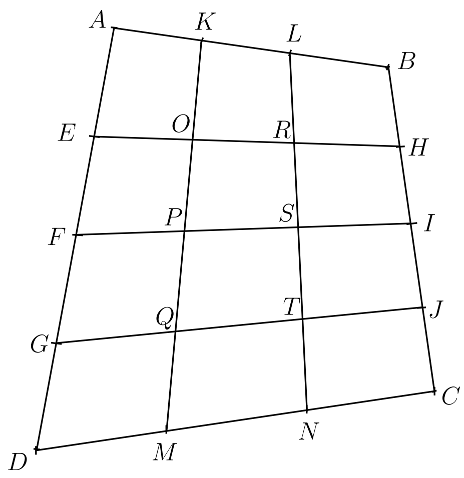
上述由 [引理一]、[引理二]、[引理三]到 [定理一]的過程, 明白地顯示如何推廣此一性質。例如, 我們可以先用 [引理一]來證明: 任給凸四邊形 $ABCD$ (見圖六), 若 K、L 分別爲 $\overline{AB}$ 及 $\overline{CD}$ 之中點, E、F、G 爲 $\overline{AD}$ 之四等分點, H、I、J 爲 $\overline{BC}$ 之四等分點, 而且 $\overline{KL}$ 與 $\overline{EH}$、$\overline{FI}$、$\overline{GJ}$ 分別交於 M、N、O, 則 M、N、O 分別爲 $\overline{EH}$、$\overline{FI}$、$\overline{GJ}$ 之中點, 且 M、N、O 也是 $\overline{KL}$ 之四等分點。然後, 我們再同樣地證明這一結果也有類似於 [引理三]的相對敍述。最後, 我們就可以證明 (圖七) 中, 任意凸四邊形 $ABCD$, 若 K、L 爲 $\overline{AB}$ 之三等分點, H、I、J 爲

$\overline{BC}$ 之四等分點, M、N 爲 $\overline{CD}$ 之三等分點, E、F、G 爲 $\overline{AD}$ 之四等分點, 而且 $\overline{KM}$ 與 $\overline{EH}$、$\overline{FI}$、$\overline{GJ}$ 分別交於 O、P、Q, $\overline{LN}$ 與 $\overline{EH}$、$\overline{FI}$、$\overline{GJ}$ 分別交於 R、S、T 則 O、P、Q 是 $\overline{KM}$ 之四等分點, R、S、T 是 $\overline{LN}$ 之四等分點, O、R 是 $\overline{EH}$ 之三等分點, P、S 是 $\overline{FI}$ 之三等分點, Q、T 是 $\overline{GJ}$ 之三等分點。特別地是, 上述結論可以簡化爲:

"若 $AK:KB=DM:MC=1:2$, $AE:ED=BH:HC=1:3$ 及 O 爲 $\overline{KM}$ 與 $\overline{EH}$ 之交點, 我們得到 $AK:KB=EO:OH$, 　　$AE:ED=KO:OM$。"



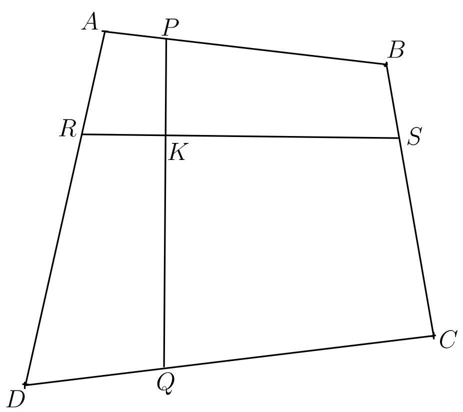
(圖六)



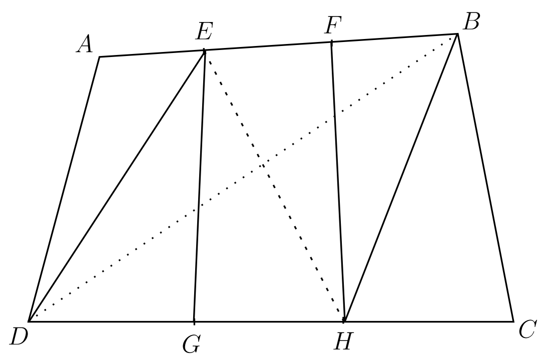
(圖七)

同理, 我們就有以下之一般結果。

定理二: 任意一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖八), 設 $P\in\overline{AB}$、$Q\in\overline{CD}$、$R\in\overline{AD}$、$S\in\overline{BC}$, 且 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{RS}$ 交於 K。如果 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{DQ}:\overline{QC}$, $\overline{AR}:\overline{RD}=\overline{BS}:\overline{SC}$, 並且這兩個比值均爲有理數時, 則 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{RK}:\overline{KS}$, $\overline{AR}:\overline{RD}=\overline{PK}:\overline{KQ}$。



(圖八)



(圖九)

定理一有一個直接而有趣的應用: (圖一) 中的四邊形 $MNUP$ 之面積恰好是四邊形 $ABCD$ 之面積的 $\dfrac{1}{9}$。這是綜合應用 [定理一]與下列引理的結果 。

引理四: 任意一個凸四邊形 $ABCD$ (如圖九), 若 E、F 爲 $\overline{AB}$ 之三等分點, G、H 爲 $\overline{CD}$ 之三等分點, 則四邊形 $EFHG$ 之面積恰好是四邊形 $ABCD$ 之面積的 $\dfrac{1}{3}$。

證明: 連接 $\overline{ED}$、$\overline{DB}$、$\overline{BH}$, 我們得到

$$\begin{aligned}
\text{四邊形 } BHDE \text{ 之面積} &= \text{三角形 } BDH \text{ 之面積} + \text{三角形 } BDE \text{ 之面積}\\
&= \frac{2}{3} \times \text{三角形 } BDC \text{ 之面積} + \frac{2}{3} \times \text{三角形 } BDA \text{ 之面積}\\
&= \frac{2}{3} \times \text{四邊形 } ABCD \text{ 之面積。}
\end{aligned}$$

再次連接 $\overline{ED}$、$\overline{EH}$、$\overline{BH}$, 我們得到

$$\begin{aligned}
\text{四邊形 } EFHG \text{ 之面積} &= \text{三角形 } EFH \text{ 之面積} + \text{三角形 } EHG \text{ 之面積}\\
&= \frac{1}{2} \times \text{三角形 } EBH \text{ 之面積} + \frac{1}{2} \times \text{三角形 } EHD \text{ 之面積}\\
&= \frac{1}{2} \times \text{四邊形 } BHDE \text{ 之面積}\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \text{四邊形 } ABCD \text{ 之面積}\\
&= \frac{1}{3} \times \text{四邊形 } ABCD \text{ 之面積, 得證。}
\end{aligned}$$

以同樣的方法, 我們可以證明 (圖七) 中, 四邊形 $EHJG$ 之面積恰好是四邊形 $ABCD$ 之面積的 $\dfrac{1}{2}$, 而且四邊形 $ORTQ$ 之面積恰好是四邊形 $ABCD$ 之面積的 $\dfrac{1}{6}$。

(作者感謝蕭守仁教授提供此一問題, 並予以文章撰寫上之建議。)

—本文作者投稿時就讀台北縣積穗國民中學三年十六班—