數學傳播 31卷1期, pp. 30-40

微積分學中的間接思維

蘇化明 · 潘 杰

間接思維是相對於習慣性思維的另一種思維形式。它的基本特點是: 從已有思路的相反方向、對立方向或其他方向去思考問題。例如: 解某些問題時順推不行, 可考慮逆推; 某些問題直接去解有困難, 可考慮用間接方法解; 研究正命題後可考慮研究逆命題; 探討某些問題的可能性困難時, 可考慮問題的不可能性等。間接思維有利於克服思維定勢的保守性, 常常可幫助人們尋求新的思路、新的方法, 開拓新的知識領域。在微積分學的教學中, 不少內容都可以用來培養學生的間接思維能力, 作者在微積分學教學實踐中曾對這一問題作過探討, 以下我們將從幾個主要方面來說明這一問題。

一. 利用定義的可逆性

數學定義蘊含的條件均爲充分必要條件, 其必要性部分往往可爲解某些問題帶來方便。

1. 利用導數定義、定積分定義求極限

由於導數及定積分均由極限所定義, 故可利用它們的定義來求極限。

例1: 設 $0<p<1$, 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^p-n^p]=0$。

證: 設函數 $f(x)=x^p$, 則 $f(x)$ 在 $x=1$ 處可微分, 且 $f'(1)=p$, 於是由導數定義及 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{p-1}=0$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[(n+1)^p-n^p]&=\lim_{n\to\infty}n^p[(1+n^{-1})^p-1]=\lim_{n\to\infty}n^{p-1}\cdot\frac{(1+n^{-1})^p-1}{n^{-1}}\\&=\lim_{n\to\infty}n^{p-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^{-1})^p-1}{n^{-1}}=0\cdot p=0.\end{aligned}$$

例2: 設$f(x)$在$[0,1]$上連續且$f(x)>0$, 求極限: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\Big[f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)\Big]^{\frac{1}{n}}$。(上海科技大學, 1980)

註: 本例爲上海科技大學1980年碩士研究生入學試題, 下同。

解: 因爲 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上連續且 $f(x)>0$, 所以 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可積。利用定積分的定義

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[f\Big(\frac{1}{n}\Big)f\Big(\frac{2}{n}\Big)\cdots f\Big(\frac{n-1}{n}\Big)f(1)\right]^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\Big(\frac{i}{n}\Big)=\int_0^1\ln f(x)dx,$$

故 $l=e^{\int_0^1\ln f(x)dx}$。

2. 利用積分的幾何意義求積分

定積分、二重積分等積分均有其幾何意義, 對某些特殊的積分, 從其幾何意義可直接計算積分。

例3: 計算: $I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$。 (全國, 2000)

解: 原積分即爲 $\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx$。由於 $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ $(0\le x\le 1)$ 表示圓心爲 $(1,0)$, 半徑爲 1 的 $\frac{1}{4}$圓周, 故由定積分的幾何意義知 $I=\frac{\pi}{4}$。

例4: 計算: $I=\iint_D(a-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$。

解: 由二重積分的幾何意義知, I 表示高爲 a, 底面半徑也爲 a 的圓錐體體積, 故 $I=\frac{\pi}{3}a^3$。

二. 定理、公式的逆用

定理、公式的逆用是間接思維的常見形式之一, 這種思維幾乎伴隨著每一個定理、公式而存在, 這種方法在解題時可能會有意想不到的效果。

1. 利用級數收斂的必要條件求數列極限

我們知道, 當級數 $\sum_{n=1}^\infty u_n$ 收斂時, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。對於數列 $\{u_n\}$, 可構造級數 $\sum_{n=1}^\infty u_n$, 則當此級數收斂時, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

例5: 求極限: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$。 (昆明工學院, 1982)

解: 構造正項級數: $\sum_{n=1}^\infty u_n=\sum_{n=1}^\infty\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$。

因爲

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1,\end{aligned}$$

由正項級數的比值判別法知級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂, 故由級數收斂的必要條件知 $l=0$。

例6: 設數列 $\{x_n\}$ 滿足 $|x_{n+1}-x_n|\le 2^{-n}$ $(n=1,2,\ldots)$, 證明: 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。(南京郵電學院, 1985)

證: 構造正項級數 $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$。

由於 $|v_n|\le 2^{-n}$ $(n=1,2,\ldots)$, 而等比級數 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ 收斂, 由正項級數的比較判別法知級數 $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|$ 收斂, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 絕對收斂, 從而級數 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收斂。

因爲 $x_n=x_1+\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)$, 故數列 $\{x_n\}$ 與級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 有相同的斂散性, 於是由級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收斂知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在。

2. 利用函數冪級數展開式求函數的導數

當函數 $f(x)$ 在包含 x_0 某鄰域內可以展開成冪級數而此冪級數又可用間接方法獲得時, 則可用其展開式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 反過來求 $f^{(n)}(x_0)\quad(n=0,1,2,\ldots)$。

例7: 求 $f(x)=\tan^{-1}x$ 的各階導數在 $x=0$ 處的值。 (東北工學院, 1981)

解: 因爲 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 而 $\frac{1}{1+x^2}$ 是等比級數 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(|x|<1)$ 的和函數, 即

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(|x|<1)$$

所以可將上式從 0 到 x 逐項積分, 從而

$$f(x)=\tan^{-1}x=\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\Big]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(|x|\le 1).$$

又 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$, 故

$$f^{(2n)}(0)=0,\quad f^{(2n+1)}(0)=(2n+1)!\frac{(-1)^n}{2n+1}=(-1)^n(2n)!\quad(n=0,1,2,\ldots).$$

3. 利用質心座標公式求積分

我們知道, 物體的質心座標一般是用積分表示的, 但由於對某些具有規則形狀且有均勻密度的物體, 其質心即爲其幾何中心, 故可反過來利用質心 (即幾何中心) 座標公式求某些積分。

例8: 計算二重積分 $I=\iint_D(x+y)dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x+y+1\}$。(全國, 1994)

解: 由 $x^2+y^2\le x+y+1$ 得 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}$, 故 D 是以 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 爲圓心, $\sqrt{\frac{3}{2}}$爲半徑的圓域, 其面積爲 $\frac{3}{2}\pi$, 質心爲 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。由平面圖形的質心公式知

$$\overline{x}=\frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy},\qquad \text{即 } \frac{1}{2}=\frac{\iint_D xdxdy}{\frac{3}{2}\pi},$$

故 $\iint_D xdxdy=\frac{3}{4}\pi$。

同理知 $\iint_D ydxdy=\frac{3}{4}\pi$, 於是所求積分 $I=\frac{3}{2}\pi$。

例9: 計算曲面積分: $I=\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外側。 (哈爾濱工業大學, 1983)

解: 由 Gauss 公式知 $I=2\iiint_\Omega(x+y+z)dxdydz$, 其中

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2\}.$$

由空間立體的質心公式 (密度 $\rho=1$) 並注意到 Ω 的質心爲 (a,b,c), 則有

$$\iiint_\Omega xdxdydz=a\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,\quad \iiint_\Omega ydxdydz=b\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,\quad \iiint_\Omega zdxdydz=c\cdot\frac{4}{3}\pi r^3,$$

因此 $I=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$。

三. 對常規解法或論證方法進行反方面思考

1. 不等式證明中的積分方法

單變數函數中不等式的證明大都利用微分方法, 但其中有不少問題的證明也可利用積分方法。

例10: 設 $f''(x)<0$, $f(0)=0$, 證明: 對任何 $x_1>0$, $x_2>0$, 有: $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$。 (全國, 1992)

證: 由 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$ 爲單調遞減函數, 故對 $t>0$, $x_1>0$, $f'(x_1+t)<f'(t)$, 不等式兩邊對 t 從 0 到 x_2 積分:

$$\int_0^{x_2}f'(x_1+t)dt<\int_0^{x_2}f'(t)dt,$$

即 $f(x_1+x_2)-f(x_1)<f(x_2)-f(0)$,
故 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$。

例11: 設 $x>-1$, 證明: 若 $0<\alpha<1$, 則

$$(1+x)^{\alpha}\leq 1+\alpha x; \tag{1}$$

若 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$, 則

$$(1+x)^{\alpha}\geq 1+\alpha x. \tag{2}$$

兩式中等號當且僅當 $x=0$ 時成立。 (南京工學院, 1982)

證: 若 $0\geq x>-1$, 即 $1\geq 1+x>0$, 則當 $0<\alpha<1$ 時, $(1+x)^{\alpha-1}\geq 1$, 其中等號當且僅當 $x=0$ 時成立。由此不等式可得

$$\int_x^0(1+t)^{\alpha-1}dt\geq\int_x^0 dt,$$

即 $(1+x)^{\alpha}\leq 1+\alpha x,$ (A)

其中等號當且僅當 $x=0$ 時成立。

若 $x>0$, 則 $1+x>1$, 因而當 $0<\alpha<1$ 時, $(1+x)^{\alpha-1}<1$, 從而有

$$\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}dt<\int_0^x dt,$$

即 $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x.$ (B)

綜合 (A), (B) 知, 當 $x>-1$ 且 $0<\alpha<1$ 時, 不等式 (1) 成立, 且其中等號當且僅當 $x=0$ 時成立。

用類似的步驟可證不等式 (2)。

2. 利用二重積分解定積分問題

衆所周知, 著名的概率積分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 就是借助於二重積分求解的, 這種思想也可以用來解另一些定積分問題。

例12: 求積分 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$。 (全國, 1990)

解: $I=\int_0^1\left(\frac{1}{(2-x)^2}\int_0^x\frac{dt}{1+t}\right)dx$, 因爲 $\frac{1}{(2-x)^2}$ 在 $[0,1]$ 上爲連續函數, $\frac{1}{1+t}$ 在 $[0,x]$ $(0\leq x\leq 1)$上也爲連續函數, 所以 $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)^2}\int_0^x\frac{dt}{1+t}$ 可交換積分順序, 從而由富比尼定理

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}\int_t^1\frac{dx}{(2-x)^2}\right)dt=\int_0^1\frac{1-t}{(1+t)(2-t)}dt\\&=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{t-2}=\frac{1}{3}\ln 2.\end{aligned}$$

例13: 設 $f(x)$ 是定義在 $[0,1]$ 上的一個正值單調遞減函數, 求證:

$$\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} \geq \frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}.$$

(第17屆美國大學生數學競賽題, 1957)

證: 要證的不等式等價於

$$\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 xf(x)dx \geq \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 xf^2(x)dx,$$

或者

$$\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 yf(y)dx - \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 yf^2(y)dy \geq 0,$$

即 $\int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y[f(x)-f(y)]dxdy \geq 0$。

$$\begin{aligned}
\text{令} \quad I &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)y[f(x)-f(y)]dxdy,\\
\text{則} \quad I &= \int_0^1 \int_0^1 f(y)f(x)x[f(y)-f(x)]dxdy,\\
\text{於是} \quad 2I &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)]dxdy。
\end{aligned}$$

由於 f 單調遞減, 故對於 $[0,1]$ 上的任意 x, y, 必有 $(y-x)[f(x)-f(y)] \geq 0$, 從而 $2I \geq 0$, 因而要證的不等式成立。

3. 積分問題的導數解法

很多定積分問題, 例如有關定積分的等式或不等式的證明都可以利用函數思想借助於微分學方法來解。

例14: 設 $f(x)$ 是連續函數, 證明:

$$\int_0^x \Big[\int_0^u f(t)dt\Big]du = \int_0^x (x-u)f(u)du.$$

(哈爾濱工業大學, 1981)

證: 令 $\varphi(x) = \int_0^x \Big[\int_0^u f(t)dt\Big]du - \int_0^x (x-u)f(u)du \quad (x \geq 0)$,
則 $\varphi'(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_0^x f(u)du - xf(x) + xf(x) = 0$,
故 $\varphi(x) \equiv C$ (常數)。

又 $\varphi(0)=0$, 所以 $\varphi(x)\equiv 0$, 從而原等式成立。

例15: 設 $f(x)$ 在閉區間 $[0,1]$ 上連續, 在開區間 $(0,1)$內可微分, 且 $f(0)=0$, $0<f'(x)\leq 1$, 證明:

$$\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2\geq\int_0^1 f^3(x)dx.$$

(第34屆美國大學生數學競賽題, 1973)

證: 令 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\quad(0\leq x\leq 1)$, 則有 $G(0)=0$, 且

$$G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)].$$

由於 $0<f'(x)\leq 1$, $f(0)=0$, 故當 $0\leq x\leq 1$ 時, $f(x)\geq 0$, $G'(x)\geq 0$, 從而 $G(x)\geq 0$。

再令 $F(x)=\Big[\int_0^x f(t)dt\Big]^2-\int_0^x f^3(t)dt\quad(0\leq x\leq 1)$, 則有

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)\Big[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\Big]=f(x)\cdot G(x),$$

由前所證, 故 $F'(x)\geq 0$, 從而 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上單調遞增。又 $F(0)=0$, 所以 $F(x)\geq 0$, 特別有 $F(1)\geq 0$, 即有

$$\Big[\int_0^1 f(x)dx\Big]^2\geq\int_0^1 f^3(x)dx.$$

4. 用多變數函數求導法解單變數函數求導問題

某些較複雜的單變數函數的導數也可以用多變數函數的合成函數微分法去解。

例16: 設 $y=\dfrac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$。

解: 令 $y=\frac{vw}{u}$, 其中 $u=\sin x+\cos x$, $v=1+x^2$, $w=\ln x$, 則有

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx}\\&=\frac{-vw}{u^2}\cdot(\cos x-\sin x)+\frac{w}{u}\cdot 2x+\frac{v}{u}\cdot\frac{1}{x}\\&=\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\Big[(\sin x+\cos x)\Big(2x\ln x+\frac{1+x^2}{x}\Big)-(\cos x-\sin x)(1+x^2)\ln x\Big].\end{aligned}$$

5. 常係數非齊次線型微分方程特別解的升階解法

考慮二階常係數線型微分方程:

$$y''+py'+qy=f(x)\quad(p,q\text{爲常數})。\tag{3}$$

我們知道, (3) 的通解爲其對應齊次方程的通解與其自身的特別解之和。對於 $f(x)$ 的不同類型, (3) 的特別解的求法也有多種, 例如: 參數變易法, Laplace 變換法, 算子法, 待定係數法, 降階法等。我們下面介紹的是升階法。限於篇幅, 這裡只給出實例, 一般性的討論可參閱 [5]。

例17: 求微分方程 $2y''+5y'=5x^2-2x-1$ 的一個特別解。

解: 方程兩邊對 x 求導數, 直到右邊爲常數, 得

$$\begin{aligned}&2y'''+5y''=10x-2,\\&2y^{(4)}+5y'''=10,\end{aligned}$$

比較方程兩邊, 可取 $y'''=2$, 再由 $2y'''+5y''=10x-2$, $y''=2x-\frac{6}{5}$, 代入原方程, 知 $y'=x^2-\frac{6}{5}x+\frac{7}{25}$, 所以 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x$ 爲所求的一個特別解。

例18: 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的一個特別解。

解: 令 $y=u(x)e^{2x}$, 則 $y'=e^{2x}(u'+2u)$, $y''=e^{2x}(u''+4u'+4u)$, 代入原方程並整理, 得

$$u''-u'=x.$$

兩邊對 x 求導數: $u'''-u''=1$,
故可取 $u''=-1$。再由 $u''-u'=x$, 於是 $u'=-x-1$, 從而可取 $u=-\frac{x^2}{2}-x$。因此 $y=-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{2x}$ 爲所求方程的一個特別解。

四. 利用解題的可逆性原則

如果解題時正面受阻, 可逆向思考。利用定義證明數列或函數的極限爲某值時, 常用這種方法。又如, 在證明一類與微分均值定理有關的命題時, 關於如何構造輔助函數, 也常用這種思路。

例19: 設函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續, 在 (a,b) 內可微分, 證明: 在 (a,b) 內至少存在一點 ξ, 使得 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$。　(上海財經學院, 1985; 全國, 1994)

證: 易知 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=[xf(x)]'|_{x=\xi}$, 因而可設輔助函數爲 $F(x)=xf(x)$。

由於 $F(x)=xf(x)$ 在 $[a,b]$ 上滿足 Lagrange 均值定理條件, 故在 (a,b) 內至少存在一點 ξ, 使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi),$$

此即 $\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$。

例20: 設函數 $f(x)$ 在區間 $[0,1]$ 上連續, 在 $(0,1)$ 內可微分, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f(\frac{1}{2})=1$, 試證:

(i) 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $f(\eta)=\eta$。

(ii) 對任意實數 λ, 必存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

(全國, 1999)

證: (i) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$, 則 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上連續, 又 $\varphi(1)=-1<0$, $\varphi(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}>0$, 故由閉區間上連續函數的中間值定理知, 存在 $\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0$, 即 $f(\eta)=\eta$。

(ii) 若對任意實數 λ, 存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使得

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1,$$

則 ξ 應滿足一階線型微分方程 $f'(x)-\lambda[f(x)-x]=1$, 或 $f'(x)-\lambda f(x)=1-\lambda x$。解此微分方程得 $f(x)=x+Ce^{\lambda x}$, 從而

$$C=e^{-\lambda x}[f(x)-x]\quad (C\text{ 爲任意常數}),$$

故可設輔助函數 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$ $(0\le x\le\eta)$。由於 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上連續, 在 $(0,\eta)$ 內可微分, 且 $F(0)=F(\eta)=0$, 對 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上運用 Rolle 定理, 從而存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使 $F'(\xi)=0$, 即

$$e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)-1]=0,$$

或

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

五. 反問題

數學的結論一般都以定理或命題的形式出現, 當我們研究正命題後往往還要考慮其逆命題是否成立。例如: 證明了收斂數列必定有界後, 可以考慮有界數列是否必定收斂? 無界數列是否必定發散? 發散數列是否必定無界? 又如: 函數 $f(x)=ax$ $(a\neq 0)$ 滿足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 反之, 滿足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的函數是否一定是 $f(x)=ax$? 微積分中存在大量類似可以從反面提出的問題, 我們不妨稱之爲“反問題”。提出反問題並解決反問題

對我們如何全面考慮問題以及提出新問題、新見解是有幫助的。限於篇幅, 我們僅以兩道數學競賽題予以說明。

例21: 設函數 $f(x)$ 對於任意的 x 及 a 滿足

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = f(x) \quad (a \neq 0),$$

證明 $f(x)$ 是線型函數。 (第七屆北京市大學生 (非數學專業) 數學競賽題, 1995)

證: 由

$$f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt \quad (a \neq 0) \tag{4}$$

可知 $f(x)$ 是連續的, 而 $f(x)$ 作爲一個連續函數的積分, 所以原函數也必是可微分的, 且其導數 $f'(x)$ 連續。重復這個推理過程知 $f(x)$ 任意階的導函數均存在。

由 (4) 知

$$\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt = 2af(x). \tag{5}$$

因爲 (5) 對任意非零的 a 均成立, 故兩邊對 a 求導, 得

$$f(x+a) + f(x-a) = 2f(x). \tag{6}$$

(6) 式兩邊分別對 x , 對 a 求導數, 得

$$f'(x+a) + f'(x-a) = 2f'(x)$$
$$f'(x+a) - f'(x-a) = 0$$

兩式相加, 得

$$f'(x+a) = f'(x).$$

由 a 的任意性可知: $f'(x) = k$ (k 爲常數), 從而 $f(x) = kx + b$ (b 爲常數), 即 $f(x)$ 爲線型函數。

註: 若令 $x - a = t_1$, $x + a = t_2$, 則由 (5) 知

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = (t_2 - t_1)f(\frac{t_1+t_2}{2}). \tag{7}$$

衆所周知, $\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \approx (t_2 - t_1)f(\frac{t_1+t_2}{2})$ 爲積分近似計算的中矩形公式, 當 $f(t)$ 爲線型函數時, 中矩形公式精確成立, 即 (7) 式成立。而例21則證明了: 對任意實數 t_1, t_2, 當中矩形公式精確成立時的函數 $f(t)$ 必爲線型函數。對於積分近似計算中的梯形公式、Simpson 公式等也有類似結論, 請讀者自行證明。

例22: 設 $u=f(x,y,z)$, f 是可微函數, 若 $\frac{f_x}{x}=\frac{f_y}{y}=\frac{f_z}{z}$, 證明 u 僅爲 r 的函數, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。 (第十二屆北京市大學生 (非數學專業) 數學競賽題, 2000)

證: 作球座標變換, 即令

$$x=r\cos\theta\sin\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\varphi,$$

其中 $r\ge 0$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\varphi\le\pi$, 則

$$u=f(x,y,z)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi).$$

令 $\frac{f_x}{x}=\frac{f_y}{y}=\frac{f_z}{z}=t$, 則 $f_x=tx$, $f_y=ty$, $f_z=tz$, 於是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\theta}&=f_xr(-\sin\theta)\sin\varphi+f_yr\cos\theta\sin\varphi\\&=txr(-\sin\theta)\sin\varphi+tyr\cos\theta\sin\varphi\\&=t(-xy+xy)=0,\\\frac{\partial u}{\partial\varphi}&=f_xr\cos\theta\cos\varphi+f_yr\sin\theta\cos\varphi-f_zr\sin\varphi\\&=tr^2(\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi+\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\\&=tr^2(\sin\varphi\cos\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)=0.\end{aligned}$$

故由以上兩式知 u 僅是 r 的函數。

註: 若 u 僅是 r 的函數, 即 $u=f(r)$, 而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 也就是 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 則易知 $\frac{f_x}{x}=\frac{f_y}{y}=\frac{f_z}{z}$, 故由本例可知: 函數 $u=f(x,y,z)$ 僅爲 r 的函數的充分必要條件是: $\frac{f_x}{x}=\frac{f_y}{y}=\frac{f_z}{z}$, 其中 f 爲可微函數, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

參考文獻

1. 解恩澤, 徐本順, 數學思想方法, 濟南: 山東教育出版社, 1995。
2. 吉林大學高等數學教研室, 研究生入學考試數學試題精選詳解, 長春: 吉林科技出版社, 1986。
3. 龔漫奇, 用解微分方程的方法求中值定理類問題中的輔助函數, 數學通報, 1994(2)。
4. 鄒節銑, 陳強, (1978-1983) 全國招考研究生高等數學試題選解, 長沙: 湖南科技出版社, 1983。
5. 梅宏, 常係數非齊次線性微分方程特解的一種方法–升階法, 高等數學研究, 2003(2)。
6. 李心燦等, 大學生數學競賽試題、研究生入學考試難題解析選編, 北京: 機械工業出版社, 2005。

—本文作者任教於安徽省合肥工業大學數學與信息科學系—