數學傳播 31卷1期, pp. 17-29

微積分五講——

第五講 微積分嚴格化之後

龔　昇・張德健

一. 微積分的深化與拓展

在上一講第三節中講到在1872年, 實數理論的建立正標誌著分析算術化的水到渠成, 也標誌著微積分嚴格化的大功告成。微積分現行教材就是以 Cauchy, Weierstrass, Riemann 等爲代表的數學家們經過基礎嚴格化後的形式來編寫的。雖然已經經歷了一百多年, 但大多數教材形式依舊。用上一講講到的微積分發展的第三階段所產生的外微積分形式來講微積分的教材雖然有, 但依然不多。相信隨著時間的推移, 接受外微分形式的觀點, 並以此來編寫微積分的教材會越來越多。

微積分基礎完成了嚴格化之後, 令整個數學都面目一新, 微積分更爲深入、更爲廣泛地滲透到數學的各種分支中去。原來已有的分支得到了更爲深刻的發展, 新的分支則不斷產生。但以微分與積分作爲主要對立運算的微積分自身的理論是怎樣往前發展的? 其走向何處? 以我們的淺見有以下三個方面:

第一個是微積分的深化與拓展。由於原有微積分固有的一些缺陷逐漸顯示出來, 限制了微積分的發展。爲了克服這些缺陷, 必須深化與拓展微積分的基本概念。

第二個是將實數域上討論的微積分擴充到複數域上來討論微積分。在微積分嚴格化以後發展出來的上述兩個方面, 已不屬於微積分的範疇。因此, 不能作爲微積分發展的新階段, 而應作爲獨立學科來討論。

第三方面, 用外微分形式建立起來的, 說明多元微積分中微分和積分是一組對立運算的 Stokes 公式

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

是古典微積分的終點, 且使微積分從古典走向現代。從此微積分走上了新的康莊大道, 也就是流形上的微積分。在這一講, 將就上述三個方面作十分簡略的介紹。在這一節中先講第一個方

面。微積分嚴格化之後, 雖然使數學整個的面貌起了很大的變化, 但同時卻顯現出它的一些缺陷, 主要有以下四點。

(1) 微積分基本定理說: 若函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可微, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼 (Riemann) 可積, 則

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

成立。這裡要求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可微, $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可積, 這是很強的要求。例如: 即使像 $f(x)=\sqrt{x}$ 這樣的簡單函數, 如果 $a=0$, $b=1$, $f(x)$ 在 $a=0$ 在通常意義下是不可微, 而函數 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $[0,1]$ 上, 在通常意義下不是黎曼可積, 故上述公式對這樣簡單的例子就不能適用。而且即使 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可微, 也不能保證 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可積。上述例子與對 $f(x)$ 的要求, 說明原有的微分、積分概念的局限性。要想微積分進一步發展, 必須拓展微分與積分的概念。使上述公式在更爲廣泛的意義下成立。

(2) Lebesgue 曾證明過如下重要定理: 一個在閉區間上有界的函數是黎曼可積若且唯若這個函數的間斷點集合的測度爲零。也就是說: 黎曼可積函數, 基本上是連續函數, 與之相差的不過在一個測度爲零的集合而已。這樣的函數族當然是太小了, 尤其在第四講第三節中已經知道: 存在處處不可微的連續函數, 使得人們認識到: 連續函數族與可微函數族相距甚遠! 這也告訴我們: 必須拓展原有積分的概念, 否則微積分難於前進。

(3) 在原有微積分的框架下, 很多定理都要求很強的條件。例如:(a) 若$f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, 在$[a,b]$上連續, 且一致收斂於 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

如果“一致收斂”的條件不滿足, 則存在反例說明上述結論不成立。(b) 若 D 爲矩形 $[a,b]\times[c,d]$, $f(x,y)$ 在 D 上連續, 則

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

(4) 黎曼可積函數空間是不完備的, 即不是一個巴拿赫 (S. Banach, 1892-1945) 空間。這就大大限制了積分理論的進一步發展。具體的可敍述爲: 若定義區間 $[a,b]$ 上的黎曼可積函數空間的兩個函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 距離爲 (當然還可以定義別的距離)

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

若 $|f_n|$ 是 $[a,b]$ 上的一個黎曼可積函數序列, 且

$$\lim_{m,n\to\infty} d(f_n,f_m) = 0$$

則不能保證一定存在黎曼可積函數$f(x)$, 使得$\lim_{n\to\infty} d(f_n,f)=0$。

以上四個問題, 顯示了原來微積分的缺陷與局限性, 促使人們考慮與發展更深入、更廣泛微分與積分的概念與理論, 來克服這些缺陷, 拓寬局限性。由 Cantor, Lebesgue 等 人經過艱苦的努力建立了一整套理論, 使微積分的面貌煥然一新, 其核心部分是 Lebesgue 積分理論。這整套理論現今稱爲實變函數論或實分析, 成爲現代數學中的骨幹之一, 且成爲一種重要的數學語言 (另外重要的數學語言還有: 代數語言、拓樸語言等等)。也就是說, 當人們要敍述或論證一些數學命題、定理、假設或理論時, 必須要用這些數學語言來敍述或證明。實分析在概率論、數理統計、調和分析、偏微分方程等等各種學科中的作用尤爲顯著。Cantor 有關集合論的第一篇革命性文章 [1] 發表於 1874 年; 而 Lebesgue 則在1902 年, 首先在他的博士論文 [2]裡敍述了他的新積分理論。

以下我們十分簡單地介紹一下 Lebesgue 積分。爲了建立積分, 先要定義如何來度量一個集合的“長度”, 這就是 Lebesgue 測度。設 E 爲有界區間 $[a, b]$ 的一個子集合, 集合中的點被有限個或無限個互不重疊的開區間集 $d_1, d_2, \ldots$ 所包含, 這些區間的長度分別爲 $\delta_1, \delta_2, \ldots$, 定義 $\sum_j \delta_j$ 的下界爲集合 E 的外測度 $m_e(E)$。$b-a$ 減去 E 在 $[a, b]$ 中的餘集的外測度定義爲 E 的內測度 $m_i(E)$。若 $m_e(E) = m_i(E)$, 則稱 E 可測, 記測度爲 $m(E)$。

若 $f(x)$ 是定義在 E 上的實函數, 若對任意實數 λ, 集合 $\{x \in E : f(x) > \lambda\}$ 可測, 則稱 $f(x)$ 是 E 上可測函數。

若 $f(x)$ 是可測集合 E 上有界可測函數, 且當 $x \in E$, $\alpha \le f(x) \le \beta$, 在 $[\alpha, \beta]$ 取點 $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, 使得

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

$e_r = \{X \in E \quad y_{r-1} \le f(x) \le y_{r-1}\}$, $r = 1, 2, \ldots, n$,

$$S = \sum_{r=1}^{n} y_r m(e_r), \qquad s = \sum_{r=1}^{n} y_{r-1} m(e_r)$$

若 S 的最大下界爲 J, s 的最小上界爲 I, 如果 $I = J$, 則稱 $f(x)$ 在 E 上 Lebesgue 可積, 且記

$$I = J = \int_E f(x) dx,$$

稱爲 $f(x)$ 在集合 E 上的 Lebesgue 積分。

從這個簡單的定義可以看出 Lebesgue 積分與黎曼積分有本質上的不同。其不同之處也許用 Lebesgue 自己的說法來說明是最爲恰當的了; 他說: 假如我欠了人家很多錢, 現在要還, 此時, 先按鈔票面值的大小分類, 然後計算每一類的面額 總值, 再相加, 這就是我的積分想法。如不按面值大小分類, 而是按從錢袋中摸出的先後次序來計算總數, 那就是黎曼積分的想法。由於

這套理論的建立, 使微積分能在一個更爲廣闊的天地中發揮它的作用。而對微積分本身的理解, 與原有的認識相比, 也達到了更爲深刻的地步, 這套理論將微積分推向一個更高的層次。

從上述定義中可以看出: 可測集是由區間來定義的, 且是區間的推廣; 可測函數不一定連續, 是連續函數的擴充; Lebesgue 積分是黎曼積分的推廣, 黎曼可積函數一定 Lebesgue 可積, 但反之不眞。最簡單的例子是 Dirichlet 函數 $\phi(x)$, 它定義在區間 $[0,1]$, 當 $x\in[0,1]$ 爲有理數時, $\phi(x)=1$; 當 $x\in[0,1]$, 爲無理數時, $\phi(x)=0$, 這是一個處處不連續的函數, 顯然不是黎曼可積函數, 但易見這是 Lebesgue 可積函數。且

$$\int_0^1 f(x)dx=0.$$

所以 Lebesgue 積分的確推廣了原有的黎曼積分。有了這個推廣, 上述提到原有微積分的缺陷與局限性, 尤其是前面說到的四個問題, 都得到了改善或解決。

(A) 在 Lebesgue 積分意義下, 若函數 $f(x)$ 是在區間 $[a,b]$ 上絕對連續, (見註1) 則

$$\int_a^x f'(x)dx=f(x)-f(a),\qquad x\in[a,b]$$

成立。如前面提到的例子, $f(x)=\sqrt{x}$ 是 $[0,1]$ 上絕對連續函數, 故在 Lebesgue 積分意義下, 微積分基本定理成立, 還可以得到一些使微積分基本定理成立的較爲寬鬆的條件, 如: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 處處可積, 且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可積, 則微積分基本定理成立等等。

(B) 黎曼積分意義下, 考察的函數類幾乎是連續函數族; 而在 Lebesgue 積分意義下, 考察的函數類就可以擴充爲可測函數類, 這是一個很大的擴充。

(C) 一些在原有架構下, 要求很強的定理, 在 Lebesgue 積分意義下, 可以放鬆。例如原微積分意義下的 $3(a)$ 可放鬆爲: $u_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, 是可測集合 E 上的可測函數, 且在 E 上幾乎處處收斂到 $u(x)$, 則 $u(x)$ 也是 E 上的可測函數。不但如此, 如果在 E 上還存在一個 Lebesgue 可積函數 $g(x)$, 使得對每一個 $n\geq 1$, 在 E 上有 $|u_n(x)|\leq g(x)$ 幾乎處處成立, 則

$$\lim_{n\to\infty}\int_E u_n(x)dx=\int_E\lim_{n\to\infty}u_n(x)dx=\int_E u(x)dx$$

這是著名的 Lebesgue 控制收斂定理 (Lebesgue Dominated Convergence Theorem), 比起原有的收斂定理條件要放鬆多了。同樣, 前面說到的 $(3)(b)$ 可以放鬆爲著名的 Fubini 定理: 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上是 Lebesgue 可積, $(x,y)\in\mathbb{R}^n$, 這裡 $x\in\mathbb{R}^p$, $y\in\mathbb{R}^q$, $p+q=n$, $p\geq 0$, $q\geq 0$, 則

1. 對於幾乎所有的$x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$是$\mathbb{R}^q$上的 Lebesgue 可積函數;

2. 積分$\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$是$\mathbb{R}^p$上的 Lebesgue 可積函數;
3.
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}^q} dy \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx$$

顯然 Fubini 定理的條件比原有定理的條件放鬆多了。

(D) 我們也說到黎曼可積函數空間是不完備的, 即不是 Banach 空間, 但 Lebesgue p 次可積函數空間 L^p, $(p \geq 1)$, (見註2) 卻是完備空間, 即 Banach 空間, 尤其是L^2空間是 Hilbert 空間, 具有了更多更好的性質, 這就克服了原有黎曼積分的一個重大缺陷。

前面說到過可測集合與區間、可測函數與連續函數等的關係, 1944年, J. E. Littlewood (1885-1977) 曾寫過一本叫「函數論講義」的書 [3]。在書中敍述了三個原則, 大致可表達爲: *每個 (可測) 集合幾乎是有限個區間的聯集, 每個 (可測) 函數幾乎是連續的; 每個 (可測) 函數的收斂序列幾乎是一致性收斂的*。"實變函數論"中大多數結果是這些直觀概念的應用, 而學生們掌握了這些概念, 等於掌握了大多數情況下實變數理論所要求的。若可以看到由一個原則可以"很好"地證實一個問題的正確性, 那麼自然要問所謂"幾乎"應該充分接近到怎樣的程度, 掌握了這個問題就可以確切地解決了。Littlewood的這一番話是近六十年前說的, 現在讀來依然感到很有意思, 是畫龍點睛之筆, 非常之重要。他緊緊抓住了實變函數論中三個最重要的概念: 可測集與有限個區間之聯集, 可測函數與連續函數; 可測函數序列的收斂與一致收斂之間的區別與聯繫。這不僅僅指出了解決新理論中的問題之途徑, 而且還指出了 *新的理論與原有理論儘管有本質上的不同, 但克服了原有理論中的種種缺陷, 而又有與原有的理論從某種意義上來講是相差不遠的, 十分親密的血緣關係*。在實分析中, 的確不斷出現以體現 Littlewood 三個原則形式的定理。舉下列三個例子。

例1: (體現原則1) 若 E 爲集, 且外測度 $m_e(E)$ 有限, 則 E 爲可測集若且唯若: 任給 $\varepsilon > 0$, 存在一個有限開區間之聯集 V, 使得這裡 $m_e(V \nabla E) < \varepsilon$, 這裡 $A \nabla B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, 這裡 $A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$。粗略地說: *集合 E 與有限開區間之聯集之差可以任意小*。

例2: (體現原則2) 若 $f(x)$ 是定義於 $[a,b]$ 上的可測函數, $f(x)$ 取 $\pm\infty$ 的集合的測度爲零, 則任給 $\varepsilon > 0$, 可以找到一個階梯函數 $g(x)$ 及一個連續函數 $h(x)$, 使得 $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ 及 $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$ 在一個測度小於 ε 的集合之外都成立。粗略地說: *可測函數與連續函數及階梯函數之差去掉一個任意小的集合後, 可以任意小*。

例3: (體現原則3) (Egoroff 定理) 若 $\{f_n(x)\}$ 爲具有有限測度的可測集合 E 上的可測函數序列, 幾乎處處收斂於 $f(x)$, 則任給 $\varepsilon > 0$, 有 E 的一個子集 A, $m(A) < \varepsilon$ 使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E \setminus A$ 上一致收斂於 $f(x)$。粗略地說: *在 E 上幾乎處處收斂的可測函數序列, 在 E 上去掉一個任意小的集合後, 是一致收斂的*。

當然, 有關體現 Littlewood 三個原則的定理, 我們還可以舉出很多的例子。總之, Littlewood 的三個原理充分說明實分析與原有微積分之間的區別與血緣關係。從以上的論述中, 可以看出實分析的產生, 的確是 “數學中眞正的進展”, 它是 “更有效的工具和更簡潔的方法之發現”, 並且 “有助於理解已有的理論”。即可以把原有微分和積分的一些理論取而代之, 從而將那些舊理論 “拋到一邊”。

註1: 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的實值函數, 且對任意 $\varepsilon>0$, 一定有 $\delta>0$, 使對 $[a,b]$ 中任意有限個兩兩不相交的開區間 $\{(a_k,b_k)\}_{1\le k\le n}$, 只要 $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, 就有

$$\sum_{k=1}^{n}\big|f(b_k)-f(a_k)\big|<\varepsilon$$

則稱爲 $f(x)$ 爲 $[a,b]$ 上的絕對連續函數。

註2: 設 $f(x)$ 是可測集合 E 上的可測函數, 記

$$\|f\|_p=\Big(\int_E|f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},\qquad 1\le p\le\infty$$

使$\|f\|_p<\infty$的全體可測函數記作 $L^p(E)$, 稱爲 p 次 Lebesgue 可積函數空間。若 $1\le p\le\infty$, $L^p(E)$ 爲 Banach 空間。

二. 複數域上的微積分

在實數域上建立了微積分後, 作爲微積分自身的理論, 試圖將它拓展到複數域上是理所當然的事。對複數的認識早已有之, 如對方程 $x^2+1=0$的解及對其他代數方程的解等, 但認眞去理解它, 這方面的研究是從十八世紀才開始, 而到了十九世紀, 複數域上的微積分, 複變函數論, 或複分析, 成爲近代最有影響的數學分支之一, 可以說是近代站在統治地位的數學分支之一。以至 Gauss 曾說過這樣的話: $\sqrt{-1}$ 所具有的眞正的超現實性是難以捉摸的。

複分析既然是複數域上的微積分, 那麼它的內容應有兩個部份。一部分是從實數域上的微積分直接平行推廣過來的, 這部份的建立往往無多大困難。另一部分是實數域上的微積分所沒有的, 不能直接地推廣過來的。前一部分當然重要, 但後一部分往往更爲引人注意。正如前面多次講過, 原有微積分是由三個部分組成, 即微分、積分、指出微分與積分是一組對立運算的微積分基本定理, 這些都沒有什麼困難地可以直接推廣到複數域來。値得一提的是, 微積分基本定理到了複數域上將成爲怎樣? 在複平面$\mathbb{C}$上, 這成爲了複形式的 Green 公式: 若

$$\omega=\omega_1 dz+\omega_2 d\bar{z}$$

爲區域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 的一次外微分形式, 這裡

$$\omega_1 = \omega_1(z, \bar{z}), \qquad \omega_2 = \omega_2(z, \bar{z})$$

均爲z, $\bar{z}$的可微函數, d 爲外微分算子, 即 $d = \partial + \bar{\partial}$, 而 $\partial = \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, 記 Ω 的邊界爲 $\partial\Omega$, 則

$$\int_{\partial\Omega} d\omega = \int\int_{\Omega} d\omega$$

這就是第二講第三節中 Stokes 公式在複平面上的形式。由此出發, 就可以得到著名的 Cauchy 積分公式與 Cauchy 積分定理。Cauchy 積分公式說: 若 L 是一條逐段光滑的封閉 Jordan 曲線, $f(z)$ 在曲線上及由曲線包圍的內部連續, 且在其內部解析, 則在區域內的任一點 z, 下面等式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

成立。Cauchy 積分定理說: 假設如上, 則

$$\int_L f(z)dz = 0$$

Cauchy積分定理是他在1825年證明的, 但到了1874年才發表 [4]。當然, Cauchy 原來的證明不是用外微分形式, 他還假設了$f'(z)$在L上連續。Cauchy 積分公式是他在 1831 年證明的 [5], 他還假設 $f(z)$ 在 L 上解析, 後來 Goursat 去掉了這些條件 [6], 不難證明: Cauchy 積分定理與 Cauchy 積分公式是相互等價的。

1825 年及 1831 年 Cauchy 兩個定理的建立, 標誌著複分析作爲一門獨立學科的誕生, 也標誌著複分析中三個主要內容之一, 這便是 Cauchy 理論的開始。從這兩個定理出發, 可以得到一系列重要的結束, 愈來愈顯示出複分析與原有微積分之間在本質上的不同。但另一方面, 從上面的敍述中, 我們也可以看出 Cauchy 理論與原有微積分的血緣關係。

就在 Cauchy 爲建立複分析而努力的時候, 另外還有兩位大數學家也正在從不同的角度爲建立這個數學上的新領域而付上他們的心力。

其中一位是 Weierstrass。他治學嚴謹, 邏輯嚴密, 他從冪級數出發。對一個冪級數而言, 它就有收斂圓, 在收斂圓中每一點, 再由冪級數展開, 於是又有收斂圓, 如果後一個收斂圓越出原來的收斂圓, 這就是解析延拓, 這樣步驟一直進行下去, 直到不能解析延拓爲止, 這樣他就定義了一個完全解析函數。這是他建立複分析的出發點之一。

在原有微積分的級數理論中的 Taylor 級數等都可以不很困難地推廣到複數域中。但在複數域上的微積分中, 還有 Laurent 級數, 這是原有微積分的級數理論中所沒有的。Laurent 級數來源於 1843 年 P. A. Laurent (1813-1854) 建立的定理: 圓環

$$D = \left\{0 \leq r < |z - a| < R \leq +\infty\right\}$$

內任意單值解析函數 $f(z)$ 在 D 內可由一個收斂的 Laurent 級數 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ 表示。事實上 Weierstrass 於1841年已經研究了具有正、負冪的級數, 即 Laurent 級數, 但直到1894年才刊登他的結果於 [7], 從 Laurent 級數出發建立了一整套理論, 如整函數、亞純函數、奇異點、值分佈理論等等。

而另一位數學家 Riemann, 他從幾何的觀點來考察複分析, 即將函數看作從一個區域到另一個區域的映射。爲了研究多值函數理論, 他還引入了一個全新的幾何概念, 即黎曼面。這套理論是原有微積分中所沒有的。1851年, 黎曼的博士論文是數學史上一篇重要的文獻 [8]。正如著名數學家 L. V. Ahlfors (1907-2004) 所說的, 這篇論文不僅包含了複變函數論主要部分的萌芽, 而且開啓了拓樸學的系統研究, 革新了代數幾何, 並爲黎曼自己在微分幾何上的研究鋪平了道路。在此文中, 不僅引入了黎曼面, 還證明了如下的著名的黎曼映射定理 (Riemann Mapping Theorem): 若 D 爲複平面 $\mathbb{C}$ 上的單連通區域, 其邊界點至少有兩點, 則存在 D 上的單葉全純函數, 將 D 映射爲單位圓 $\Delta=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, 取 $a\in D$, $b\in\Delta$, $0\le a\le 2\pi$, 則滿足 $f(a)=b$, $\arg(f')(a)=\alpha$ 的 $f(z)$ 是唯一的。這個定理說: 拓樸等價導出全純等價。這在數學中很少有這樣的結果, 當時黎曼是用 Dirichlet 原理來證明此定理的。但這個原理後來被看出了毛病, 以至數學家紛紛致力於尋求一個正確的證明。終於在 1870 年, 由 C. G. Neumann 與 Schwarz 找到了。

黎曼映射定理是複變數幾何函數論的出發點, 由此發展起一整套優美而重要的理論。黎曼面實際上就是一維複流形, 更是很多近代數學重要理論的出發點。

1825年、1831 年開始的 Cauchy 理論, 1841 年開始的 Weierstrass 級數理論, 1851 年開始的黎曼幾何理論及黎曼面理論, 這三套相對獨立又緊密聯繫著的理論, 構成了複數域上的微積分, 成爲複分析的主要部分。在這三套理論中, Cauchy積分理論的根是在原有的微積分中, 這點是十分清楚的 (儘管後來發展的理論已與原有微積分相距甚遠) ; 而 Weierstrass 級數理論的來源之一是微積分中的級數理論, 這點也是比較清楚的; 至於黎曼幾何理論及黎曼面理論, 則是全新的理論, 與原有的微積分沒有什麼關係。

另一方面, Cauchy 積分理論中大部分的結果, 可以推廣到高維空間, 黎曼面推廣成高維複流形, 而在 Weierstrass 級數理論中作爲出發點的 Laurent 級數及黎曼幾何理論的出發點的黎曼映射定理, 則不能推廣到高維空間。

1906年, F. M. Hartogs 證明了如下的定理 [9]: 若 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ $(n\ge 2)$ 爲域, K爲Ω中緊緻子集, 且 $\Omega\setminus K$ 連通, 若 f 在 $\Omega\setminus K$ 上全純, 則 f 可以全純開拓到 Ω。因此, 想把 $\mathbb{C}$ 中的圓環推廣成 $\mathbb{C}^n$ $(n\ge 2)$ 中的球挖去一個小球後的球殼, 將在球殼上定義的全純映射展開成具有正、負次冪級數已成爲毫無意義的事了。因之, 作爲 Weierstrass 級數理論中的作爲出發點的 Laurent 級數, 在原先的微積分中是沒有的, 在高維空間中也是沒有的, 只有複平面上才有。因此, 複分析中的 Weierstrass 理論也就成爲了十分獨特的理論了。

1907 年, Poincaré 證明了這樣的定理 [10]: 在$\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ 中的單位球 $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\}$ 與多圓柱 $P = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, |z_2| < 1, \cdots, |z_n| < 1\}$ 之間不存在全映射, 將 B 映射爲 P, 這裡 $z = (z_1, \ldots, z_n)$。也就是說, 到了高維複歐氏空間 $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, 區域之間的拓樸等價不能導出全純等價。因此, 作爲單複變函數幾何函數論的基石的黎曼映射定理, 也是前無古人, 後無來者的。可以說, 黎曼映射定理是數學中一個特別的定理, 由此而引發的幾何函數理論也是十分優美的理論。

綜上所述, 這些內容形成了複數域上的微積分, 也就是複分析, 是數學中獨有的理論, 成爲十九紀中最有影響的數學分支之一。

將實數域上的微積分拓展到複數域上, 成了內容豐富的複分析, 那麼是否可以將複數域再拓展, 成爲更爲一般的域, 在這些域上來建立微積分的理論呢?

Frobenius 證明了如下重要的定理: 實數域上所有有限維結合可除代數 (Associative division algebra) 只有三個, 即: 實數域、複數域、四元數 (Quaternion) 代數; 如果去掉結合性要求, 則實數域上還有另一個可除代數, Caylay-Dickson 代數, 即 Octonion 代數, 基在實數域上的維數爲八。當然也可在四元數代數和 Octonion 代數上建立微積分理論, 但是由於四元數代數是不可交換的, Octonion 代數是不可交換又不可結合的, 在這上面建立微積分能走多遠就可想而知, 以至直到今日其進展甚微。

如同一元微積分拓展到多元微積分那樣, 單複變數函數論可以拓展到多複變函數論。多元微積分與一元微積分的根本差別在於有外微積分形式, 從這點上來看, 這兩者有本質上的差異。同樣多複變函數論, 或多元複分析, 與單複變函數論, 或一元複分析相比有本質上的差異, 它絕不是一元複分析的平行推廣, 而是大多數的內容都是與一元複分析有本質上的不同的。如前面提到的 Hartogs 定理與 Poincaré 定理就是兩個明顯的例子。對多複變函數的詳細介紹在這短短的五次演講之中不可能做到, 有興趣的讀者可參閱有關的書籍, 例如 [11]。

三. 流形上的微積分

在上一節中十分簡單地介紹了將實數域上的微積分拓展到複數域上。也可以這樣說, 將實歐氏空間上的微積分拓展到複歐氏空間上。從幾何的角度來說, 另一個重要的拓展是將實歐氏空間拓展到微分流形上, 即建立起微分流形上的微積分, 微分流形是現代數學中最爲重要的基本概念之一。大量的現代數學都是在這上面開展的。但要嚴格地說清楚什麼是微分流形上的微積分要花很大的力氣, 也實在太費篇幅, 在這短短的五次演講之中既不可能也不必要做這件事, 只能十分粗略地、不嚴格地說個大意。

什麼是微分流形? 這是一個具有微分結構的局部歐氏空間。這裡要解釋的是: 什麼是局部歐氏空間? 什麼是微分結構?

一個 n 維的局部歐氏空間 $\mathcal{M}$ 是一個 F. Hausdorff (1868-1942) 拓樸空間, 它的任意一點具有一個鄰域同胚於 n 維歐氏空間 $\mathbb{R}^n$ 的一個開集合。什麼是拓樸空間, 大致上來講, 這是一個引入拓樸的集合 X。什麼叫引入了拓樸, 粗略地講, 就是在 X 上定義了開集合族, 它滿足了通常開集合族所要求的條件。一個拓樸空間稱爲是 Hausdorff 拓樸空間, 如果 $x,y\in X$, 且 $x\neq y$, 則有包有 x 的開集合 G, 包有 y 的開集合 H, 而 $G\cap H=\emptyset$。粗略地講, Hausdorff 拓樸空間中任意兩個不同的點是可以分開的。

若 X, Y 是兩個拓樸空間, f 是將 X 映到 Y 的連續映射, 且 $f(X)=Y$, f^{-1} 也是連續映射且 f 爲一對一映射, 則稱 f 爲同胚映射 (homeomorphism), X 與 Y 是同胚的。若 ϕ 是這樣的同胚, 將 $\mathcal{M}$ 中一個連通開集合 U 映到 $\mathbb{R}^n$ 中的一個開子集合。在 $\mathbb{R}^n$ 中, r_j 表示取 $\mathbb{R}^n$ 中一點的第 j 個坐標, 記 $x_j=r_j\circ\phi$, 稱 ϕ 爲坐標映射, x_j 爲坐標函數, $j=1,2,\ldots,n$, 稱 (U,ϕ) (或記作 $(U,x_1,\ldots,x_n)$) 爲坐標系。

在一個局部歐氏空間 $\mathcal{M}$ 上的一個 C^k, $1\leq k\leq n$, 類微分結構, 是坐標系的一個集合 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha):\alpha\in A\}=F$, 它滿足下列三個條件:

(i) $\cup_{\alpha\in A}U_\alpha=\mathcal{M}$;

(ii) 對所有的$\alpha,\beta\in A$, $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}\in C^k$;

(iii) 相對 (ii) 來講, F 是最大的, 即如果 (U,ϕ) 是一坐標系, 且對所有 $\alpha\in A$, $\phi\circ\phi_\alpha^{-1}$ 及 $\phi_\alpha\circ\phi^{-1}$ 都屬於 C^k, 則 $(U,\phi)\in F$。

這裡A是一個指標集合。若$f=(f_1,\ldots,f_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一個區域 D 上的映射, 稱 $f\in C^k$ 的意義是, f 的每個分量 f_j, $j=1,2,\ldots,n$, 在 D 上都是 k 次可微的, 且 $f^{(k)}$ 在 D 上連續。

從上述這些定義中可以看出: 粗略地說, 一個局部歐氏空間就是由與歐氏空間同胚的每個點的鄰域在一起所組成的, 而微分結構是說這種黏法是用微分相聯繫起來的 [12], [13] (見圖 5.1)。而這是微分流形的大意, 一般討論的微分流形都是 $k=\infty$ 的情形, 也就是光滑的形式。

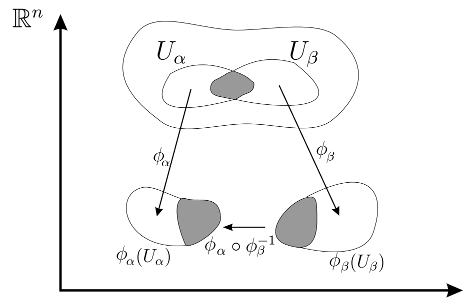

圖 5.1

圖5.1中陰影部分表示 $U_\alpha\cap U_\beta$, ϕ_α 及 ϕ_β 分別將此映至圖形下方的陰影部分, 而將下圖右邊的陰影部分映爲下圖左邊的陰影部分的映射 $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$ 是 C^k, $k\geq 1$。如果對所有 $\alpha,\beta\in A$ 都成立, 這就是微分流形。

重要的是: 現代數學中討論的對象往往是微分流形。如: 實歐氏空間 $\mathbb{R}^n$, 複歐氏空間 $\mathbb{C}^n$, 有限維實向量空間, 有限維複向量空間, n 維球面等都是微分流形; 前面提到的黎曼面是二維

微分流形。由 $n\times n$ 非異實矩陣的全體組成的一般線性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 也是微分流形。而現代數學中極爲重要的李 (Lie) 群, 例如海森堡群 (Heisenberg group) [14]和四元數 $\mathbb{H}$ 形群 (Quaternion $\mathbb{H}$-type group) [15] 就是兩個具有 C^∞ 群結構的微分流形。微分流形的例子不勝枚舉, 但從上面說到的這些, 足以看出其重要性了。

在微分流形上建立微積分, 就要在這上面定義微分與積分。要嚴格的來定義這些實在太費口舌, 但是從微分流形的定義中, 可以想到, *在微分流形上定義微分與積分一定是通過坐標映射 ϕ, 將一點附近的鄰域映到歐氏空間中進行*。這裡以不嚴格的定義微商與積分爲例來說明這種方法。

若 $\mathcal{M}$ 是一個 n 維微分流形, (U,ϕ)是它的坐標系, 坐標函數爲 $x_1,\ldots,x_n$, 如果 $G\subset\mathcal{M}$ 是一個開集合, $f:G\to\mathbb{R}$ 是 G 上的一個實值函數, 若 $p\in G\cap U_\alpha$, 則 $f\circ\phi_\alpha^{-1}$ 是定義在開集合 $\phi_\alpha(G\cap U_\alpha)$ 上。我們稱 f 在 p 點可微, 如果 $f\circ\phi_\alpha^{-1}$ 在 $\phi_\alpha(p)$ 上可微; 我們稱 f 在 $G\cap U_\alpha$ 上可微, 如果 $f\circ\phi_\alpha^{-1}$ 在 $\phi_\alpha(G\cap U_\alpha)$ 上可微; 我們稱 f 在 $G\cap U_\alpha$ 上是 C^k, $k\geq 1$, 如果 $f\circ\phi_\alpha^{-1}$ 在 $\phi_\alpha(G\cap U_\alpha)$ 上是 C^k。因此, 對在微分流形上定義的一個函數求導數, 是通過ϕ^{-1}, 對在歐氏空間上引導出來的函數求導數來定義的。

用相似的做法, 由微分流形上函數的微商出發, 可以定義相應的微分、外積分、外微分形式、外微分算子等等。同樣, 可以對微分流形進行定向, 若$U_\alpha\cap U_\beta$ 非空, 且 $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$ 的 Jacobi 行列式是正定的, 則給予 U_α 與 U_β 以相同的定向, 否則給它們以相反的定向。定義一個流形是可定向的, 如果對任意兩個 $\alpha,\beta\in A$, 且 $U_\alpha\cap U_\beta$ 非空集合, 則 $\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}$ 的 Jacobi 行列式是正定的。否則流形爲不可定向。我們討論的都是可定向的流形。通過 ϕ, 對可定向的微分流形上的適當的區域上定義的外微分形式來定義積分。爲了簡單起見, 假設流形是 緊緻 (Compact) 的。所謂緊緻是指一個集合 K 的每一個無限子集都在K中有極限點, 則稱 K 是緊緻的。若 $\mathcal{M}$ 是一個 n 維緊緻可定向的流形。由於 $\mathcal{M}$ 是緊緻的, 由 Heine-Borel 定理知道, 對 $\mathcal{M}$ 有一個有限個坐標鄰域的覆蓋若爲 $U_1,\ldots,U_m$。對於這個覆蓋可以證明, 存在以下的與之相對應的 1 的分解 $F_1,\ldots,F_m$, 滿足

(1) $F_j(p)\geq 0$, $p\in\mathcal{M}$, $j=1,2,\ldots,m$;

(2) $F_j(p)=0$, $p\notin U_j$, $j=1,2,\ldots,m$;

(3) $\sum_{j=1}^m F_j(p)\equiv 1$, $p\in\mathcal{M}$。

若 ω 是 $\mathcal{M}$ 上的一個 n 階外微分形式, 如果 U_j 的局部坐標爲 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 則在 U_j 上,

$$\omega=a_j(x_1,\ldots,x_n)dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

直觀地, 粗略地看, 由上述 (3),

$$\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{\mathcal{M}}\omega\cdot 1=\int_{\mathcal{M}}\omega\sum_{j=1}^m F_j=\sum_{j=1}^m\int_{\mathcal{M}}\omega F_j,$$

由上述 (2),

$$\int_{\mathcal{M}} \omega F_j = \int_{\sum_{k=1}^{m} U_k} \omega F_j = \int_{U_j} \omega F_j,$$

故應該將 $\int_{\mathcal{M}} \omega$ 定義爲$\sum_{j=1}^{m} \int_{U_j} \omega F_j$, 而 $\int_{U_j} \omega F_j$ 定義爲

$$\int_{\phi_j(U_j)} F_j(x_1,\ldots,x_n) a_j(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

這是 n 維歐氏空間中外微分形式的積分。這樣就定義好了緊緻可定向的流形 $\mathcal{M}$ 上外微分形式的積分。

上述的種種定義都不是十分嚴格的。由於要嚴格給出這些定義, 太費篇幅, 只好不十分嚴格地介紹個大概。*在微分流形上的微積分中最最重要的定理仍然是* Stokes *定理*, 這裡是第二講第三節中 Stokes 定理的推廣。這時候, Stokes 定理大意爲, 若 $\mathcal{M}$ 是 n 維定向微分流形, D 是其中的一個區域, ω 爲一個光滑的 $(n-1)$ 階外微分形式, 則

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

成立。我們之所以說這個定理的“大意是這樣”, 主要因爲這時對 D, ∂D 與 ω 還要加上一些合理的要求, 這些要求就不具體說明了。這個微分流形上的 Stokes 定理, 說明了在微分流形上, 微分與積分這組對立運算是怎樣體現的。

從前面舉出的微分流形的那些例子中可以看出, 微分流形是一個十分廣泛的概念, 歐氏空間不過是它最爲簡單的例子, 所以將微積分從實歐氏空間拓展到微分流形是本質上的一些拓展, 說明微積分已從古典走向了現代, 它的影響遠遠超過了分析的範圍。這的確是 “*數學中眞正的進展*”。它是 “‘*更有效的工具和更簡潔的方法之發現*”, 不但可以對已有的分析理論有更深刻的理解, 而且由此產生了很多不同分支的優美的理論, 使得數學翻開了嶄新的一頁。有關微分流形上的微積分就十分粗略地介紹這些, 有很多寫得很好的書可供參閱, 如 [16], [17] , [18], [19] , [20]。在微積分嚴格化之後, 作爲微積分自身理論的發展也就介紹到這裡爲止; 由於這些內容都已不屬於通常理解的微積分的範圍, 而是分別成爲一門門獨立的學科, 因此, 它們都不能作爲微積分發展的一個階段來看待。在微積分嚴格化之後, 還有一個重要的拓展在這裡沒有講到的, 那就是有限維實歐氏空間上的微積分拓展到無窮維空間上去, 這是屬於泛函分析的內容, 這一部分也就只好留待將來了。

參考文獻

1. G. Cantor: Uber eine eigenschaft das Inbegriffes aller, reelen alge braischen Zahlen, *Crelles Journal fur Mathematik*, 77(1874), 258-262.

2. H. Lebesgue, Integrale, longueur, aire, *Annal di Mathematica Pura ed Appl*,(3) 7(1902), 231-359.
3. J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford univ. press, 1944.
4. A. L. Cauchy, *Bull des Sci. Math*, 7 (1874), 265-304, 8 (1875), 43-55, 148-159.
5. A. L. Cauchy, *Sur la mecanique celeste et sur un nouveau calcul apple calcul des limits*, Turin, 1931.
6. E. Goursat, Sur la definition general des function ananlytiques d*apres Cauchy, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 4(1900), 14-16.
7. K. Weierstrass, *Darstellung einer analytischen Function einer complxen Veranderlichen, Mathematische werke*, Johnson, reprint, I, 51-66.
8. G. F. B. Riemann, *Grundlagen fur eine Allgemeine Theorie der Funktionen enier Veranderlichen complex Grosse*, 1851.
9. F. Hartogs, Zur theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhangiger Veranderlichen, insbesondere uber die Darstellung derseler durch Reihen weche nach Potentzen einer Veranderlichen fortscheiten, *Math. Ann.*, 62(1902), 1-88.
10. H. Poincaré, Les fontions analytiqeas de deux variables et la representation conforme, *Rend Circ. Mat. Polermo*, 23(1907), 185-220.
11. G. M. Henkin and J. Leiterer, *Theory of Functions on Complex Manifolds, Monographs in Math.*, 79, Birkhauser, Boston, 1984.
12. O. Calin and D. C. Chang, *Geometric Mechanics on Riemannian Manifolds, Birkhauser*, Boston, 2005.
13. S. S. Chern, *Complex Manifolds Without Potential Theory*, 2nd Edition, Springer-Verlag, New York, 1979.
14. O. Calin, D. C. Chang and P. Griener, *Geometric Mechanics on the Heisenberg Group and Its Applications*, to be published by American Mathematical Society & International Press, Cambridge, Massachusetts, 2006.
15. D. C. Chang and I. Markina, Geometric analysis and Green function on anisotropic quaternion Carnot groups, *Journal of Geometric Analysis*, 2006.
16. G. M. Henkin and J. Leiterer, *Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas*, Progress in Math., 74, Birkhauser, Boston, 1988.
17. F. W. Warner, *Foundations of Differentiale Manifolds and Lie Groups*, GTM. Springer-Verlag, 1983.
18. E. M. Stein and R. Shakarchi, *Fourier Analysis–An Introduction*, Princeton Lectures in Analysis 1, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.
19. E. M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis 2, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2003.
20. E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real Analysis-Measure Theory, Integration, Hilbert Spaces*, Princeton Lectures in Analysis 3, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2005.

—本文作者龔昇任教於中國科技大學; 張德健任教於美國 Georgetown University 數學系—