數學傳播 31卷1期, pp. 12-16

幾何板與 Pick 公式

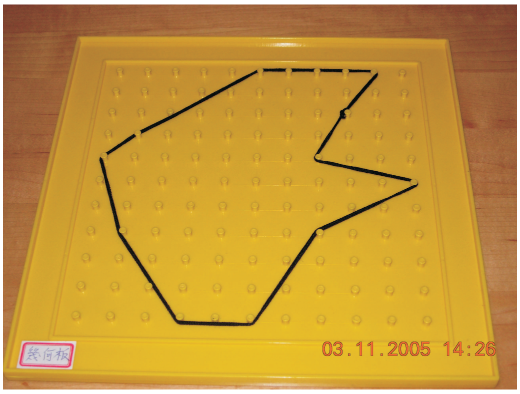
楊惠后

一. 源起

日前在網站上拜讀了蔡聰明教授所寫的「談求面積的Pick 公式」一文, (原載於「科學月刊」第25卷第10期), 不僅得知 Pick 公式 (Pick's Formula) 的歷史地位, 而且它還與海龍公式(Heron Formula)、測量師公式 (A Surveyor's Formula) 構成了數學上三足鼎立的求面積的三個重要公式; 也驚喜地發現自己在多年前指導學生於幾何板 (又稱釘板) 的教學活動時, 獨自研究出來的 Pick 公式的證法有異於蔡教授在文中所提到的證法, 而且只要具有高一的程度就能理解了。因此想假貴刊一角發表本人的拙見, 並懇請不吝賜教。

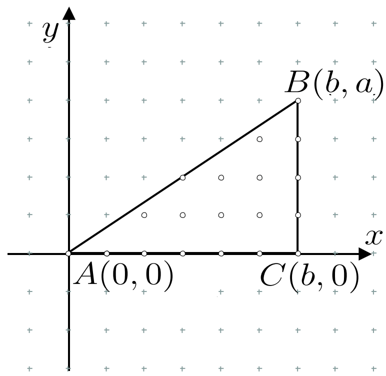
二. 研究過程

在幾何板上圍出邊不相交的任意多邊形(見圖), 則該多邊形的面積爲 $A=\dfrac{B}{2}+I-1$ (Pick公式), 其中 B 爲邊上的格子點總數, I 爲多邊形內部的格子點數目。只要會數格子點的數目就可以算出多邊形的面積了, 所以 Pick 公式是一個外型優美、簡單的求面積公式。Pick 公式是 奧地利人 Georg Alexander Pick (1859 ∼ 1943) 在1899年提出來的, 可是一直等到1969年才被廣泛注意到。



現在來談談我的想法: 首先在幾何板上建立直角坐標系統 (見圖一), 並以相鄰兩格子點的距離爲單位長; 又因爲任意的凸 n 邊形均可以分割成 $n-2$ 個小三角形, 因此我就從三角形著手處理, 而且是先從兩股分別平行 x 軸、y 軸的直角三角形開始。

(一) 預備性質: 如圖一所示, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90°$, $\overline{AC}//x$ 軸, $\overline{BC}//y$ 軸, 若 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, 其中 a 、$b\in N$ 且 $\gcd(a,b)=d$, 則斜邊 $\overline{AB}$ 上的格子點數目必爲 $d-1$ 個。(不含 A、B 兩點)。

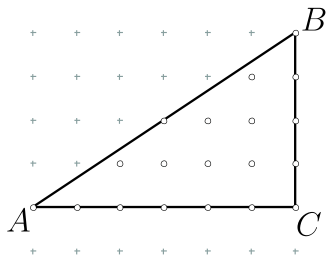


圖一

證明: 令 $A(0,0)$ 、$B(b,a)$ 、$C(b,0)$, 則 $\overline{AB}$ 方程式爲 $y=\dfrac{a}{b}x$, 且 $0<x<b$; 因爲 $\gcd(a,b)=d$, 因此可將 a 、b 表成 $a=hd$, $b=kd$, 其中 $\gcd(h,k)=1$, 代入 $\overline{AB}$ 方程式中, 得 $y=\dfrac{h}{k}x$, 且 $0<x<b$。因爲求 $\overline{AB}$ 上的格子點數目, 相當於求上式的整數解個數, 所以取 $x=k$ 、$2k$ 、$\cdots$ 、$(d-1)k$ 均可得到整數解, 因此 $\overline{AB}$ 上的格子點數目不含 A 、B 兩點共有 $d-1$ 個。

(二) 圖形的分類:

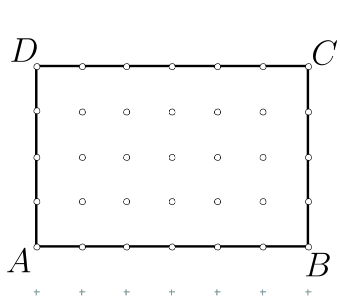
1. 兩股分別平行 x 軸、y 軸的直角三角形 (見圖二)。



圖二

說明: 設 $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, 且 $\gcd(a,b)=d$, 則邊上的格子點總數爲 $B=(d-1)+(a-1)+(b-1)+3=a+b+d$, 內部的格子點數目爲 $I=\dfrac{(a-1)(b-1)-(d-1)}{2}$ $=\dfrac{ab-a-b-d}{2}+1$, 代入 $\dfrac{B}{2}+I-1=\dfrac{a+b+d}{2}+\dfrac{ab-a-b-d}{2}+1-1=\dfrac{ab}{2}$ 恰爲 $\triangle ABC$ 的面積, 所以對於此種三角形 Pick 公式成立。爲了方便下面的討論, 我把此種三角形稱爲簡單型的直角三角形。

2. 兩邊分別平行 x 軸 、y 軸的矩形 (見圖三)。



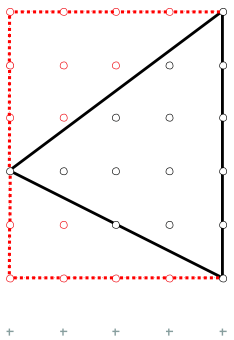
圖三

說明: 設 $\overline{AB}=n$, $\overline{BC}=m$, 則邊上的格子點總數爲 $B=2[(n-1)+(m-1)]+4=2n+2m$, 內部的格子點數目爲 $I=(n-1)(m-1)=nm-n-m+1$, 代入 $\dfrac{B}{2}+I-1=\dfrac{2n+2m}{2}+nm-n-m+1-1=nm$, 恰爲矩形 $ABCD$ 的面

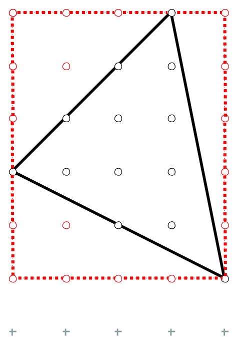
積, 所以對於此種矩形 Pick 公式成立。同樣的, 我也把此種矩形稱爲簡單型的矩形。

3. 其他類型的三角形

其他類型的三角形均可以利用簡單型的矩形剪掉二個簡單型的直角三角形(見圖四) 或剪掉三個簡單型的直角三角形(見圖五) 得到, 所以 Pick 公式適用於所有的三角形。現在以圖五爲例說明如下:



圖四



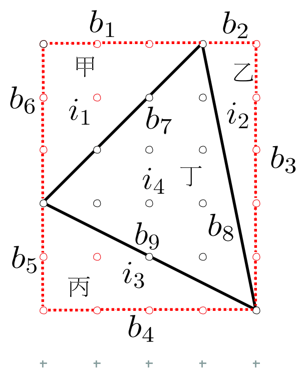
圖五

首先令 $b_1 \sim b_9$ 爲三角形甲、乙、丙、丁各邊上不含兩端點的格子點數目, $i_1 \sim i_4$ 爲三角形甲、乙、丙、丁內部的格子點數目, 所以利用上述已驗證過的 Pick 公式, 算得: 矩形的面積 $-$ 三角形甲的面積 $-$ 三角形乙的面積 $-$ 三角形丙的面積

$$= \left[\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6+6}{2}+(i_1+i_2+i_3+i_4+b_7+b_8+b_9)-1\right]$$

$$-\left(\frac{b_1+b_6+b_7+3}{2}+i_1-1\right)-\left(\frac{b_2+b_3+b_8+3}{2}+i_2-1\right)-\left(\frac{b_4+b_5+b_9+3}{2}+i_3-1\right)$$

$= \dfrac{b_7+b_8+b_9+3}{2}+i_4-1$ 恰爲三角形丁的面積; 並且這個面積呈現出 Pick 公式的型式。因此 Pick 公式適用於幾何板上任意形狀的三角形。



圖五

4. 凸多邊形

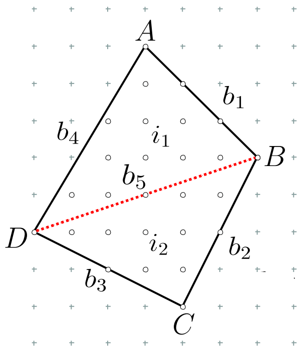
因爲面積具有加性 (additive property), 利用上述的論證過程, 我們就可以證明 Pick 公式適用於所有的凸多邊形。首先任意的四邊形可以分割成2個三角形 (見圖六), 類似圖五的說明:

四邊形 $ABCD$ 的面積

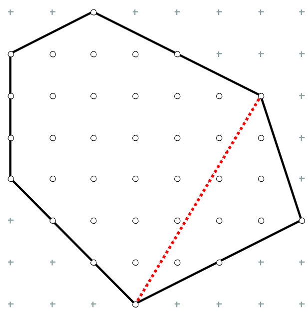
$= \triangle ABD$ 的面積 $+ \triangle BCD$ 的面積

$= \left(\dfrac{b_1+b_4+b_5+3}{2}+i_1-1\right)+\left(\dfrac{b_2+b_3+b_5+3}{2}+i_2-1\right)$

$= \left[\dfrac{b_1+b_2+b_3+b_4+4}{2}+(i_1+i_2+b_5)-1\right]$ 恰爲 Pick 公式的型式。所以 Pick 公式適用於所有的凸四邊形。又因爲任意的凸 n 邊形可以分割成一個凸 $n-1$ 邊形與一個三角形的組合 (見圖七), 再利用數學歸納法可以很輕易地證明出來 Pick 公式適用於所有的凸 n 邊形。

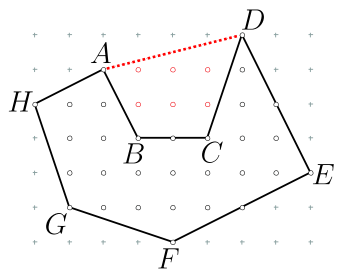


圖六



圖七

5. 凹多邊形



圖八

因爲任意的凹多邊形均可適當地連接輔助線使其變成凸多邊形 (以圖八爲例), 凹多邊形 $ABCDEFGH$ 的面積爲兩個凸多邊形 $ADEFGH$ 與 $ABCD$ 的面積差, 所以感覺上 Pick 公式也應該適用於凹多邊形的面積上。今簡單說明如下: 令凸多邊形 $ADEFGH$ 邊上的格子點總數爲B_1, 內部的格子點數目爲 I_1, 凸多邊形 $ABCD$ 邊上的格子點總數爲 B_2, 內部的格子點數目爲 I_2, 兩個凸多邊形的所有共同邊的格子點總數爲 B_3, 則凸多邊形 $ADEFGH$ 的面積 $-$ 凸多邊形 $ABCD$ 的面積

$$= \left(\frac{B_1}{2}+I_1-1\right)-\left(\frac{B_2}{2}+I_2-1\right)=\frac{B_1-B_2+2B_3-2}{2}+(I_1-I_2-B_3+2)-1,$$

結果發現 $(B_1 - B_2 + 2B_3 - 2)$ 恰爲凹多邊形 $ABCDEFGH$ 邊上的格子點總數, $(I_1 - I_2 - B_3 + 2)$ 爲其內部的格子點數目, 也就是說導出來的結果完全符合 Pick 公式的型式, 所以凹多邊形 $ABCDEFGH$ 的面積可以利用 Pick 公式計算出來; 仿此說明方法, 可知 Pick 公式確實適用於幾何板上所圍出來的所有凹多邊形。

三. 結尾語

經由上面的分類說明, 可知在幾何板上任何邊不相交的多邊形的面積均可利用Pick 公式輕易地算出來; 而且它的面積一定是 $\dfrac{1}{2}$ 的正整數倍。事實上, 幾何板活動非常適合給中小學生、甚至是學齡前的小朋友操作、玩耍。幼小孩童只要拿著幾條橡皮筋就可以藉著創意圍出各種圖形, 或是透過引導圍出對稱圖形、相似形 $\cdots$ 等等。小學生可以嘗試圍出一些等積異形的圖形; 老師也可以設計簡單的多邊形, 讓他們數數圖形上的點數, 直接利用 Pick 公式 $A = \dfrac{B}{2} + I - 1$ 來驗證多邊形的面積, 順便練習一下計算能力。至於中學生則可以利用商高定理來觀察、發現哪些型如 $\sqrt{n}$ 的長度在幾何板上是不會出現的? (例如: $\sqrt{3}$ 、$\sqrt{6}$ 、$\sqrt{7}$ $\cdots$) 進而知道在幾何板上是圍不出來 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形及正三角形的圖形 $\cdots$ 等等; 或者利用分割的技巧來求出任意多邊形的周長及面積, 甚至老師再更進一步地引導學生觀察、試著歸納出格子點數目與面積之間的關係, 並勇於嘗試證明看看及分享想法。因此, 不管是多久以前的舊教材也好, 九年一貫一綱多本的教材也罷, 甚至現在連部編版也又舊瓶裝新酒重出江湖了, 我想像幾何板這樣地活潑、多樣性的數學活動應該是一直都是實用的!

參考文獻

1. Max A.Sobel and Evan M. Maletsky, Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities and Strategies, 95-101.
2. 蔡聰明, 談求面積的 Pick 公式。
   http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_25_10_1
3. Wikipedia, Pick's theorem (from the free encyclopedia).
   http: //en.wikipedia.org/wiki/Pick's_theorem
4. Alex Bogomolny: Pick's Theorem.
   http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick.shtml

—本文作者任教臺中市曉明女子中學—