向量的「內積」與應用

王　湘　君

一、導　　言

向量是近代數學的新工具，它的引入使實際問題，在處理上起了大改革，其特點是簡潔易於計算。數學愈進展，向量愈深入數學的各部門。向量的代數運算有加減，係數積，內積和外積。在這些運算中，向量的「內積」在近代各門數學體系中，扮演了一個相當決定性的角色。換句話說，它的引入幾乎決定了該門體系的基本構造。其實向量代數也是在有了「內積」以後，才眞正顯現出它的好處。下面打算討論的向量是在我們生活的歐氏空間裏，「內積」也以一定的形式出現。（這裏假定各位已熟悉向量的基本知識，如向量是什麼，向量的座標化，長度，單位向量，兩向量的夾角，以及加減，係數積等運算。）一般書上，對「內積」只是硬性地下定義，沒有說明其由來，初學的人，對這突如其來的硬性規定，不易接受，尤其對「內積」的座標形式，更是莫名其妙。於是對內積的代數形式與幾何意義，不能融會貫通，當然就不會引用「內積」運算，發揮其功能。

二、向量的內積是什麼?

我們先來看下列事實:

在平面上，兩個非零向量$\overrightarrow{a}=[a_1,\ a_2]$，$\overrightarrow{b}=[b_1,\ b_2]$，設其夾角爲$\theta$，（如圖一），在正交坐標平面上，以有向線段$\overline{OA}$表向量$\overrightarrow{a}$有向線$\overline{OB}$表向量$\overrightarrow{b}$。由餘弦定律知，

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\theta,$$

將上式代數化，可得

$$\begin{aligned}&(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\\&\quad=(a_1{}^2+a_2{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2)-2OA\cdot OB\cos\theta,\end{aligned}$$

化簡上式，得

$$a_1b_1+a_2b_2=OA\cdot OB\cos\theta。$$

上式表示：兩個向量的x分量之積與y分量之積的和恰等於此二向量長及它們夾角的餘弦之乘積。爲了簡便與需要，我們才將$|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\theta$或$a_1b_1+a_2b_2$用$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$來代表，稱它們爲「內積」。（$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$此式成立，應在初學的人心目中先穩定下來。）我們將上面的敍述，整理成下列定義:

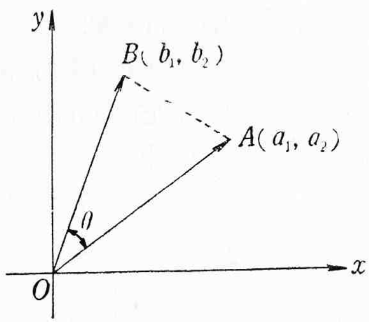

圖　一

定義: 平面上二向量$\vec{a}=[a_1,a_2]$, $\vec{b}=[b_1,b_2]$其夾角爲θ，規定

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \text{ 或 } \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2。$$

我們將稱$\vec{a}\cdot\vec{b}$爲$\vec{a}$・$\vec{b}$之內積（爲了區別另一運算「外積」）。

同樣地，在空間中的二向量$\vec{a}=[a_1, a_2, a_3]$，$\vec{b}=[b_1,b_2,b_3]$，若其夾角爲θ，則$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$或$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$。

這種定義很自然，因爲對平面上（或空間中）兩向量$\vec{a}\cdot\vec{b}$有如下之關係$a_1b_1+a_2b_2=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$，爲了方便，我們就叫$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$或$a_1b_1+a_2b_2$爲$\vec{a}\cdot\vec{b}$的內積，更爲了省事，我們以記號$\vec{a}\cdot\vec{b}$來替代。我們可稱$a_1b_1+a_2b_2$是內積的代數意義或坐標形式，$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$是內積的幾何意義。

三、向量內積的性質

明白了兩向量內積的意義，我們先來看其性質，再研究其功用。

性質: 1. 交換性$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

2. 分配性$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

3. $\vec{a}\cdot(r\vec{b})=(r\vec{a})\cdot\vec{b}=r(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $r\in \boldsymbol{R}$，但沒有結合性，即

$$\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})\neq(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}。$$

4. 內積與向量長的轉化$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$

5. 不適合消去律：即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c} \not\Rightarrow \vec{b}=\vec{c}$

以上性質利用內積的代數形式即可得證。

四、內積的功用

(1) 可求向量長

由於$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$，故

$$|\vec{a}\pm\vec{b}|^2=(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=|\vec{a}|^2\pm2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2。$$

例1: 設$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$、$\vec{b}$之夾角爲$\pi/3$，求$|\vec{a}-2\vec{b}|$的值。

解: $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$
$$=4-4\cdot2\cdot1\cos(\pi/3)+4=4$$
$\therefore\ |\vec{a}-2\vec{b}|=2$。

例2: 如圖二，設$\triangle ABC$爲一正三角形，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=3$，則$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$?

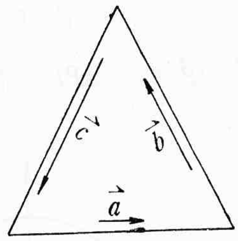

圖 二

解: 因爲$\triangle ABC$爲一正$\triangle$，故$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$任二向量的夾角爲$2\pi/3$，故

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$$
$$+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=3,$$
$$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{3}。$$

(2) 可求向量的夾角

利用$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$。

例1: 設$\triangle ABC$, $A(3,3)$, $B(2,2)$, $C(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$，求$\angle B$之弳度量。

解: $\overrightarrow{BA}=(1,1)$, $\overrightarrow{BC}=(-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$，得

$$\cos B=\frac{(1,1)\cdot(-1+\sqrt{3},-1-\sqrt{3})}{\sqrt{2}\qquad\sqrt{8}}$$
$$=-2/4=-1/2,$$
$$\therefore\ \angle B=2\pi/3。$$

例2: 設$|\vec{a}|=8$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=7$，求$\vec{a}$，$\vec{b}$之夾角θ的弳度量。

解: $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$
$$=64+9-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=49$$
$\therefore\ \cos\theta=1/2$，即$\theta=\pi/3$。

(3) 垂直問題: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$

例1: 利用內積，求證畢氏定理。

證: 如圖三:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\because\ \vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\Longleftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2 \text{ (得證)}$$

例2: 利用內積，求證內接於一半圓的角必爲直角。(如圖四)

證: 設圓的方程式爲$x^2+y^2=r^2$，半圓上任一點$P(x, y)$，則

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x+r,\ y)\cdot(x-r,\ y)$$
$$=x^2-r^2+y^2=0$$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$，即 $\angle APB$ 爲直角。(得證)

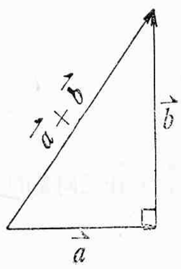

圖 三

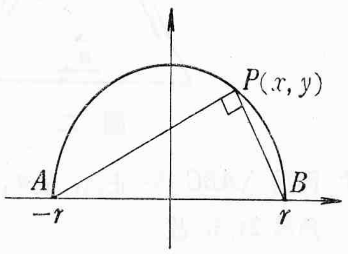

圖 四

(4) 可求投影量與投影 (爲什麼求投影，可求點與線，點與面的距離)

(i) $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影量$=|\vec{a}|\cos\theta=\vec{a}\cdot\vec{b}/|\vec{b}|$

(ii) $\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影$=|\vec{a}|\cos\theta\,\vec{b}/|\vec{b}|$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{b}/|\vec{b}|^2$$

例1: 設$P(6,\ -4,\ 4)$，$Q(2,\ 1,\ 2)$，$R(3,\ -1,\ 4)$爲空間中之三點，求P到直線$\overleftrightarrow{QR}$之最短距離。(如圖五)

解: $\overrightarrow{QP}=(4,\ -5,\ 2)$，$|\overrightarrow{QP}|=3\sqrt{5}$

$\overrightarrow{QR}=(1,\ -2,\ 2)$，$|\overrightarrow{QR}|=3$。

$\overrightarrow{QP}$ 在 $\overrightarrow{QR}$ 方向上的投影量爲

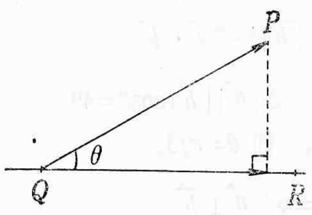

圖 五

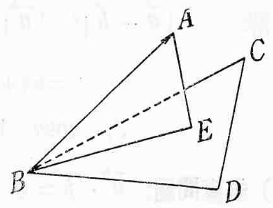

圖 六

$$|\overrightarrow{QP}|\cos\theta=\frac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|}=\frac{4+10+4}{3}=6,$$

$\therefore\ P$到$\overleftrightarrow{QR}$之距離爲$\sqrt{45-36}=3$。

例2: 設$A(1,\ 0,\ 3)$，$B(0,\ 0,\ -3)$，$C(1,\ 0,\ -2)$，$D(-1,\ 2,\ -3)$，求點A到平面BCD的距離。

解: 設A在平面BCD的垂足爲E，設$\overrightarrow{BE}=\alpha\overrightarrow{BC}+\beta\cdot\overrightarrow{BD}$，因爲$\overrightarrow{BA}=(1,0,6)$，$\overrightarrow{BC}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,\ 2,\ 0)$，故得

$$\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}-\alpha\overrightarrow{BC}-\beta\overrightarrow{BD}$$
$$=(1-\alpha+\beta,\ -2\beta,\ 6-\alpha)。$$

$$\because\ \overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{BC}\quad\therefore\ \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$
$$\Longrightarrow 1-\alpha+\beta+6-\alpha=0 \quad (1)$$

$$\because\ \overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{BD}\quad\therefore\ \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$$
$$\Longrightarrow -1+\alpha-\beta-4\beta=0 \quad (2)$$

解(1)，(2)得 $\alpha=34/9$，$\beta=5/9$，故

$$\overrightarrow{EA}=\left(-\frac{20}{9},\ -\frac{10}{9},\ \frac{20}{9}\right)=\frac{10}{9}(-2,\ -1,\ 2),$$

$|EA|=10/3$

$\therefore\ A$到平面BCD之距離爲$10/3$。

(5) 可求三角形面積

$$\triangle ABC \text{ 之面積}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2 A)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

例1: 設$A(1,\ 2,\ 3)$，$B(2,\ 4,\ -1)$，$C(0,\ -3,\ 1)$爲空間中之三點，求 $\triangle ABC$ 之面積。

解: $\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ -4)$，　$|\overrightarrow{AB}|^2=21$

$\overrightarrow{AC}=(-1,\ -5,\ -2)$，　$|\overrightarrow{AC}|^2=30$

$$\triangle ABC \text{ 之面積}=\frac{1}{2}\sqrt{21\cdot30-(-1-10+8)^2}$$
$$=3\sqrt{69}。/2$$

五、結　語

向量有了加法，係數積和內積，這三個可貴的運算，從抽象代數的觀點來看，其實已全盤托出了平面和空間的幾何結構。換句話說，所有平面上或空間中的「幾何問題」，適當地轉化成向量的三個運算來處理，都能迎刃而解。而向量最大的效用，可以說是內積功能的發揮。

(作者現爲師大附中數學教師)