投擲銅元骰子時的規則性

潘振輝

本文是中學數學的教學經驗報告，對二項式定理與多項式定理的應用，提出一個實例，並予以簡化；乘冪不大的計算，也想求得一較簡易的法則，供讀者作爲解題參考。

一、投擲公正的銅元與二項式定理

I. 投擲一銅元，僅有出現正面與反面兩種情形，故以 x 表出現正面；y 表出現反面，若投擲 n 個公正的銅元，其一切可能情形分述如下:

當 $n=1$ 時: x, y。

當 $n=2$ 時: $(x,x),(x,y),(y,x),(y,y)$。

當 $n=3$ 時: $(x,x,x),(x,x,y),(x,y,x),(y,x,x),(y,y,x),(y,x,y),(x,y,y),(y,y,y)$。

…………………………

…………………………

對於一般的 n，

$(\overbrace{x, x, x, \cdots\cdots, x}^{n\text{個}})$, $(\overbrace{x, x, \cdots\cdots, x}^{n-1\text{個}}, y)$

$(x, x, \cdots\cdots, y, x)$, ………………

$(y, \overbrace{x, x, \cdots\cdots, x}^{n-1\text{個}})$, ………………

$(x, \overbrace{y, y, \cdots\cdots, y}^{n-1\text{個}})$, $(y, x, y, \cdots\cdots, y)$

……………………, $(y, y, \cdots\cdots, y, x)$

現若干次正面，若干次反面的可能情形（但各銅元出現正、反面的機會均相等），則得

當 $n=1$ 時: $1x, 1y$。（表一正面，一反面）

當 $n=2$ 時: $xx, 2xy, yy$。（$2xy$ 表出現一正面、一反面的可能有 2 種）

當 $n=3$ 時: $xxx, 3xxy, 3xyy, yyy$（$3xxy$ 表出現二正面、一反面的可能有 3 種，$3xyy$ 表出現一正面、二反面的可能有 3 種）

…………………………

…………………………

對於一般的 n，

$\overbrace{x\ x\ x \cdots\cdots x}^{n\text{個}}$, $\quad n\ \overbrace{x\quad x \cdots\cdots x}^{n-1\text{個}}\ y$,

…………………………

…………………………

$n\ x\ \overbrace{y\ \ y \cdots\cdots y}^{n-1\text{個}}$, $\quad \overbrace{y\ y\ y \cdots\cdots y}^{n\text{個}}$

其中

$$m\ \overbrace{x\ x \cdots\cdots x}^{k\text{個}}\ \ \overbrace{y\ y \cdots\cdots y}^{l\text{個}}$$

表示出現 k 個正面、l 個反面有 m 種可能。

II. 我們觀察二項式 $(x+y)^n$ 的展開式:

當 $n=1$ 時: $(x+y)^1=x+y$

當 $n=2$ 時: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

當 $n=3$ 時: $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

…………………………

…………………………

對於一般的 n，

$$(x+y)^n=C_0^n x_n+C_1^n x^{n-1}y+\cdots\cdots$$
$$+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n y^n$$

III. 比較 I 與 II 的各種情形，可得知

(1)投擲 n 個公正的銅元的一切可能結果與 $(x+y)^n$ 展開式中的各項成一對一對應。

(2)投擲 n 個公正的銅元時，出現結果爲 k 個正面，$(n-k)$ 個反面的可能情形，恰爲 $(x+y)^n$ 展開式中 $x^k y^{n-k}$ 項的係數 C_{n-k}^n 或 C_k^n。

(3)依二項式定理知: 前後各項係數有對稱性，且以中間項的係數爲最大。（n 爲偶數，$C_{n/2}^n$ 爲最大係數；n 爲奇數，$C_{(n-1)/2}^n$ 與 $C_{(n+1)/2}^n$ 同爲最大係數。）

例 1: 投擲五個公正的銅元，求下列各情形出現的來源分別是幾次?

(i) 恰有 4 正面 (ii) 3 正面、2 反面

(iii) 至少 3 正面。

解: (i) $C_4^5=5$

(ii) $C_3^5=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3!}=10$

(iii) $C_3^5+C_4^5+C_5^5=16$

IV. 投擲銅元個數不多時，可用巴斯卡三角形求出!

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 1\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1
\end{array}$$

例 2: 投擲 7 個公正的銅元，至少出現 4 個正面的來源共有幾次?

解: $35+21+7+1=64$，或應用對稱性 $2^7/2=64$。

(因前後係數都相同且投擲後出現的來源共有 2^7 種可能)

投擲銅元個數相當大或有其變化，只好應用二項式定理。

例 3: 投擲12個公正的銅元，求出現正面爲奇數次的所有可能的次數總和。

解: 令

$$C_1^{12}+C_3^{12}+\cdots\cdots+C_{11}^{12}=s$$

$$\because\ C_0^{12}+C_1^{12}+C_2^{12}+\cdots\cdots+C_{11}^{12}+C_{12}^{12}=2^{12}\quad(1)$$

$$C_0^{12}-C_1^{12}+C_2^{12}+\cdots\cdots-C_{11}^{12}+C_{12}^{12}=0\quad(2)$$

(由 $C_0^{12}+C_1^{12}x+C_2^{12}x^2+\cdots\cdots+C_{12}^{12}x^{12}=(1+x)^{12}$，取 $x=1$ 或 $x=-1$ 代入可得)

(1)−(2) 得

$$2s=2^{12}\implies s=2^{11}=2048$$

二、投擲公正的骰子點數和與多項式定理

I. 投擲一公正的骰子，出現的點數分別爲 1 點、2 點、3 點、4 點、5 點、6 點等 6 種情形。投擲二公正的骰子，出現的點數和分別爲 2 點、3 點、4 點、……、12點等11種情形，但其中每種點數和或許是若干種不同的來源。例如，點數和爲 6 的情形，可由 1 與 5，2 與 4，3 與 3，4 與 2，5 與 1 相加而得。

II. 假設 x^i $(i=1,2,3,4,5,6)$ 表一公正的骰子所出現點數，則 $x^i\cdot x^j=x^{i+j}$ $(1\leq i,j\leq6,\ i、j\in N)$ 可表二骰子擲出所得點數和，於是投擲二個公正的骰子，同樣點數和的來源次數，可由下列式子來表示。

$$\begin{array}{cccccccccccl}
x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & & & & & & \longleftarrow \text{第一個骰子}\\
x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & & & & & & \longleftarrow \text{第二個骰子}\\
\hline
x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & & & & & &\\
 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & & & & &\\
 & & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 & & & &\\
 & & & x^5 & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 & x^{10} & & &\\
 & & & & x^6 & x^7 & x^8 & x^9 & x^{10} & x^{11} & &\\
 & & & & & x^7 & x^8 & x^9 & x^{10} & x^{11} & x^{12} &\\
\hline
x^2 & 2x^3 & 3x^4 & 4x^5 & 5x^6 & 6x^7 & 5x^8 & 4x^9 & 3x^{10} & 2x^{11} & x^{12} &
\end{array}$$

其中 kx^i 表二骰子點數和爲 i，出現的來源次數爲 k。且上式可視爲多項式 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ 展開式中各項及其係數。

III. 投擲三個公正的骰子，其點數和的出現來源次數也可視爲 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$ 的展開式中各項及其係數，推廣至一般情形，投擲 n 個公正的骰子，其點數和的出現情形及其來源次數，可視爲 $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^n$ 的展開式各項及其係數。

IV. 若投擲骰子的個數 $n\leq5$ 時，其點數和出現情形及其來源次數，仿巴斯卡三角形的畫法:（如下頁上圖）

(i) $n=i+1$ 的各項係數是由上列 $n=i$ 的各項係數相加而得。

(ii) 最低次項的係數爲 1，第二最低次項的係數由上列中最低次項與第二最低次項係數的和，第三最低次項的係數由上列中最低、第二最低、第三最低次項各係數的和，……，第六最低次項的係數爲上列最低次項、第二最低次項一直到第六最低次項的係數和，但第七最低次項的係數爲上列第二、第三、……、第七最低次項的係數和。

如 $n=i$ 的各項係數爲

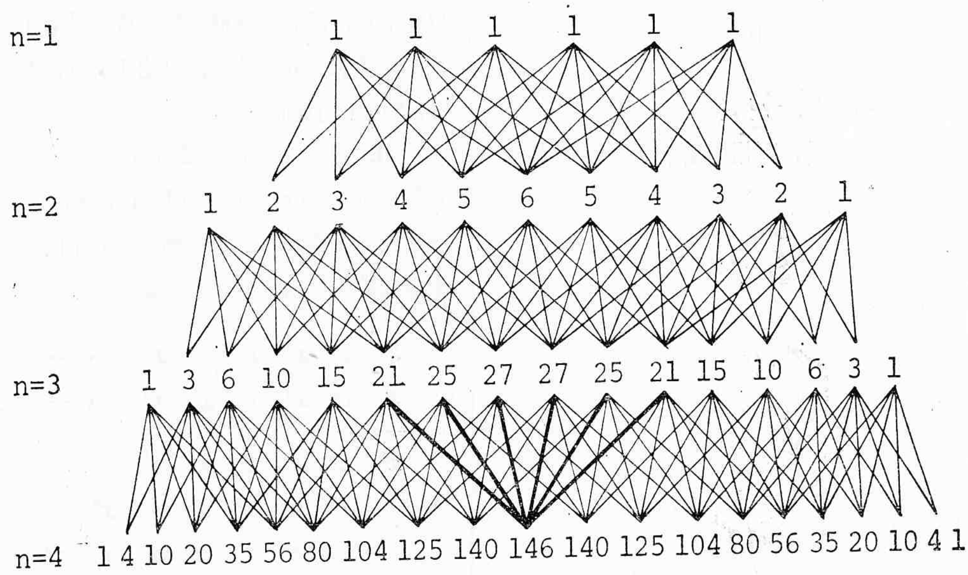
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\cdots\cdots,\ a_{k-1},\ a_k。$$

$n=i+1$ 的各項係數爲

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\cdots\cdots,\ b_{l-1},\ b_l。$$

則 $b_1=1$，$b_2=a_1+a_2$，$b_3=a_1+a_2+a_3$

$b_4=a_1+a_2+a_3+a_4$，$b_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$



$b_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$,

$b_7=a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$,

$b_8=a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$,

…………………………………

…………………………………

$b_{l-2}=a_{k-2}+a_{k-1}+a_k$, $b_{l-1}=a_{k-1}+a_k$, $b_l=1$。

(iii) 最低次項與最高次項的係數相等，第二最低次項與第二高次項的係數相等，……依次有對稱的性質。

例 4: 設一箱中盛有編號 1、2、3、4、5、6 等 6 張卡片，自箱中連取 4 次，每次一張，取出看了以後卽放回，分別得號碼 x、y、z、u，試依下列各種情形求出現來源的次數。

(1) $x+y+z+u=10$

(2) $x+y+z+u\geq 20$

(3) $10\leq x+y+z+u\leq 20$

解: 此題可視同投擲 4 個公正的骰子點數和的情形。

(1) $x+y+z+u=10$ 卽表 4 個骰子點數和爲 10，其出現來源的次數爲 80。(看上表 $n=4$，亦可看 $n=3$ 一列由 $3+6+10+15+21+25=80$ 而得)

(2) $x+y+z+u\geq 20$ 卽表 4 個骰子點數和至少 20 點，其出現來源爲 $35+20+10+4+1=70$ 次。

(3) $10\leq x+y+z+u\leq 20$ 卽表 4 個骰子點數和不小於 10 且不大於 20，其出現來源共有
$80+104+125+140+146+140$
$+125+104+80+56+35=1135$ 次。

V. 若投擲骰子的個數相當大時，只有應用多項式定理或負整數指數的二項式展開式來求點數和的情形，但此多爲逐次討論，一般很少作爲評量測驗用的試題，玆舉一例說明。

例 5: 投擲 6 個公正的骰子，求出現點數和爲12的來源共有幾種?

解: $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6$

$$=\sum\frac{6!}{p_1!\,p_2!\,p_3!\,p_4!\,p_5!\,p_6!}\cdot x^{p_1}(x^2)^{p_2}(x^3)^{p_3}(x^4)^{p_4}(x^5)^{p_5}(x^6)^{p_6}$$

$$=\sum\frac{6!}{p_1!\,p_2!\,p_3!\,p_4!\,p_5!\,p_6!}x^{p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5+6p_6}$$

其中 $p_i\in N\cup\{0\}$，$i=1,2,3,\cdots\cdots,6$，且 $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=6$。

欲求 x^{12} 項的係數卽令 $p_1+2p_2+3p_3+4p_4+5p_5+6p_6=12$，$p_1$、$p_2$、$p_3$、$p_4$、$p_5$、$p_6$ 的解如下表:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
3	0	3	0	0	0
2	2	2	0	0	0
1	4	1	0	0	0
0	6	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0
2	3	0	1	0	0
4	0	0	2	0	0
4	0	1	0	1	0
3	2	0	0	1	0
4	1	0	0	0	1

x^{12} 項的係數爲

$$\frac{6!}{3!\,3!}+\frac{6!}{2!\,2!\,2!}+\frac{6!}{4!}+\frac{6!}{6!}+\frac{6!}{3!}$$
$$+\frac{6!}{3!\,2!}+\frac{6!}{4!\,2!}+\frac{6!}{4!}+\frac{6!}{3!\,2!}+\frac{6!}{4!}=456,$$

即出現點數和爲 12 的來源共有 456 種。

另解：

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6$$
$$=x^6(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^6$$
$$=x^6\cdot\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^6$$
$$=x^6(1-x^6)^6(1-x)^{-6}$$

即 $(1-x^6)^6(1-x)^{-6}$ 展開式x^6 項的係數，但是

$$(1-x^6)^6(1-x)^{-6}$$
$$=[1-6x^6+\cdots\cdots][1-\binom{-6}{1}x+\cdots\cdots$$
$$+\binom{-6}{6}x^6-\binom{-6}{7}x^7+\cdots\cdots],$$

得x^6 項的係數爲

$$(-6)+\frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!}$$
$$=456$$

即爲所求。

三、

以上所討論乃針對着銅元與骰子（正六面體）而言，事實上，可推至正十二面體與正二十面體的投擲，由各面所標示的點數和及一些相關問題；或一箱中有若干個相同的球，分別標示不同的數值，由箱中連續取出一球，取出看了以後即放回，取n次所得數值和及一些相關問題。

（作者現爲北一女中數學教師）