※教　與　學※

二元二次不定方程的整數解

葉東進

關於此文，先提出兩點說明:

一、此文之主要對象是一般高中學生，因此不作嚴謹的理論建構；有時爲便於讀者瞭解起見，多輔以特例以代替繁瑣的一般說明。我們希望從特例出發，讓讀者能學著從諸特例中找出問題的一般解法，最後再試着以解析的方法來解釋這解法的必然性或充分性；其實這也正是數學發展過程的一般型態。我們盼望高中生能瞭解此點。特例並非就是結論，但沒有開始時的特例又如何能有一般性的結論?

二、本文未多加潤飾，沒有嚴謹的理論建構，甚至有些問題故意保留不決而留給讀者自己去思索，讀者若能因此而聯想，而推廣，正是本文的最大旨趣。

現在開始本文:

本文的目標是設法提供二元二次不定方程（形如 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，其中 A,B,C,D,E,F 均爲整數）的整數解的求法，由於從一些特例中我們發現並沒有一般性的解法，因此試着將問題分作三類，分別介紹各類的可行解法；正如上文所述，先從特例出發，再找出一般的可能解法，最後再以解析的方法來解釋解法的共通性。

I. 二次項可分解者

例 1. 求 $x^2-4y^2=5$ 之整數解。

$$x^2-4y^2=5 \iff (x+2y)(x-2y)=5$$
$$=1\cdot5=5\cdot1=(-1)\cdot(-5)$$
$$=(-5)\cdot(-1)$$
$$\Longrightarrow (x+2y,x-2y)=(1,5) \text{ 或 } (5,1)$$
$$\text{或 } (-1,-5) \text{ 或 } (-5,-1)$$

得整數解 (x,y) 爲 $(3,-1),(3,1),(-3,1),(-3,-1)$。

例 2. 求 $x^2-3xy-4y^2=-9$ 之整數解。

$$x^2-3xy-4y^2=-9$$
$$\iff (x+y)(x-4y)=-9$$
$$=1\cdot(-9)=9\cdot(-1)=(-1)\cdot9=(-9)\cdot1$$
$$=3\cdot(-3)=(-3)\cdot3$$
$$\Longrightarrow (x+y,x-4y)=(1,-9) \text{ 或 } (9,-1) \text{ 或……或 } (-3,3)$$

得整數解 (x,y) 爲 $(-1,2),(7,2),(1,-2),(-7,-2)$。

例 3. 求 $x^2+5xy+6y^2-3x-7y=0$ 之整數解。

$$x^2+5xy+6y^2-3x-7y=0$$
$$\iff (x+2y)(x+3y)-3x-7y=0 \qquad (1)$$
$$\iff (x+2y+\triangle)(x+3y+\square)=\triangledown \qquad (2)$$

比較(1), (2)之係數得$\triangle=-1$, $\square=-2$, $\triangledown=2$。

$$\Longrightarrow (x+2y-1,x+3y-2)=(1,2) \text{ 或 } (2,1)$$
$$\text{或 } (-1,-2) \text{ 或 } (-2,-1)$$

得整數解(x,y)爲 $(-2,2),(3,0),(0,0),(-5,2)$。

例 4. 求 $2xy+x-3y+4=0$ 之整數解。

$$2xy+x-3y+4=0$$
$$\iff xy+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-2$$
$$\iff \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{4}$$
$$\iff (2x-3)(2y+1)=-11 \text{〔何故?〕}$$
$$\Longrightarrow (2x-3,2y+1)=(1,-11) \text{ 或 } (11,-1)$$
$$\text{或 } (-1,11) \text{ 或 } (-11,1)$$

得整數解 (x,y) 爲 $(2,-6)$, $(7,-1)$, $(1,5)$, $(-4,0)$。

例 5. 求 $x^2+2xy-3y^2+4x-7y+5=0$ 之整數解。

$$x^2+2xy-3y^2+4x-7y+5=0$$
$$\iff (x+3y)(x-y)+4x-7y+5=0 \qquad (1)$$
$$\iff (x+3y+\triangle)(x-y+\square)=\triangledown \qquad (2)$$

比較(1), (2)得 $\triangle=19/4$, $\square=-3/4$, $\triangledown=-137/16$。

$$\therefore \text{ 原式} \iff \left(x+3y+\frac{19}{4}\right)\left(x-y-\frac{3}{4}\right)=-\frac{137}{16}$$
$$\iff (4x+12y+19)(4x-4y-3)=-137$$
$$\Longrightarrow (4x+12y+19,4x-4y-3)$$
$$=(1,-137) \text{ 或 } (137,-1)$$
$$\text{或 } (-1,137) \text{ 或 } (-137,-1)$$

得整數解 (x,y) 爲 $(25,-10),(-9,-10)$。

例 6. 求 $x^2+2xy+y^2+3x+6y-1=0$ 之整數解。

〔此題，其三個二次項雖可以分解，但其解法則列入第II類來討論（參看例12）；並注意它的前三項之係數 1,2,1 滿足 $2^2-4\cdot1\cdot1=0$ $(B^2-4AC=0)$。〕

II. 二次項不可分解者

例 7. 求 $2x^2+3y^2=30$ 之整數解。

$$2x^2+3y^2=30 \iff 3y^2=30-2x^2 \implies 30-2x^2\geq 0 \implies x^2\leq 15$$

$\therefore$ $-\sqrt{15}\leq x\leq\sqrt{15}$，取 $x=0,\pm1,\pm2,\pm3$ 代入原式驗求。〔注意：y 爲整數〕

得整數解 (x,y) 爲 $(3,2)$, $(3,-2)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$。

例 8. 求 $x^2+3y^2-4x+6y-10=0$ 之整數解。

$$x^2+3y^2-4x+6y-10=0$$
$$\iff (x-2)^2+3(y+1)^2=17$$
$$\iff (x-2)^2=17-3(y+1)^2$$
$$\implies 17-3(y+1)^2\geq 0 \implies (y+1)^2\leq\frac{17}{3}$$

$\therefore$ $-\sqrt{17/3}\leq y+1\leq\sqrt{17/3}$，取 $y=-3,-2,-1,0,1$ 代入原式驗求，得原式無整數解。

例 9. 求 $x^2+3xy+3y^2+2x+2y-1=0$ 之整數解。

$$x^2+3xy+3y^2+2x+2y-1=0$$
$$\iff 3y^2+(3x+2)y+(x^2+2x-1)=0$$
$$\because\ y\in R \quad \therefore\ (3x+2)^2-12(x^2+2x-1)\geq 0$$
$$\iff -3x^2-12x+16\geq 0$$
$$\iff \frac{-6-\sqrt{84}}{3}\leq x\leq\frac{-6+\sqrt{84}}{3}$$

取 $x=-5,-4,-3,-2,-1,0,1$ 代入原式驗求，得整數解 (x,y) 爲 $(-5,2)$, $(-4,1)$, $(-3,2)$, $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(1,-1)$。

例10. 求 $x^2+2xy+2y^2+3x+2y+5=0$ 之整數解。

$$x^2+2xy+2y^2+3x+2y+5=0$$
$$\iff x^2+(2y+3)x+(2y^2+2y+5)=0$$
$$\because\ x\in R \quad \therefore\ (2y+3)^2-4(2y^2+2y+5)\geq 0$$
$$\iff 4y^2-4y+11\leq 0$$

但 $4y^2-4y+11=(2y-1)^2+10>0$〔何故？〕，故原式無解。

例11. 求 $x^2+2xy-3x+y-7=0$ 之整數解。

〔本題可以分解法求之，底下試以另一觀點來處理〕

$$x^2+2xy-3x+y-7=0$$
$$\iff x^2+(2y-3)x+(y-7)=0 \qquad \text{(A)}$$
$$\because\ x\in R \quad \therefore\ (2y-3)^2-4(y-7)\geq 0$$
$$\iff 4y^2-16y+37\geq 0$$

但 $4y^2-16y+37=4(y-2)^2+21\geq 0$ 對於任何實數 y 恒成立，因此光從 $4y^2-16y+37\geq 0$ 我們無法獲知所求整數 y 之任何資料，但(A)式中之 x 爲整數的一個必要條件是 $4y^2-16y+37$ 是一個完全平方整數〔何故？（註1）〕

由此，令 $4y^2-16y+37=\triangle^2$

$$\iff 4(y-2)^2+21=\triangle^2$$
$$\iff (\triangle+2y-4)(\triangle-2y+4)=21$$
$$\implies (\triangle+2y-4,\ \triangle-2y+4)=(1,21)\ \text{或}\ (3,7)\ \text{或……或}\ (-7,-3)$$

得 $y=-3,1,3,7$ 代入原式驗求，得整數解(x,y)爲 $(10,-3)$, $(-1,-3)$, $(3,1)$, $(-2,1)$, $(-4,3)$, $(1,3)$, $(0,7)$, $(-11,7)$。

例12. 求 $x^2+2xy+y^2+3x+6y-1=0$ 之整數解。

$$x^2+2xy+y^2+3x+6y-1=0$$
$$\iff y^2+(2x+6)y+(x^2+3x-1)=0$$
$$\because\ y\in R \quad \therefore\ (2x+6)^2-4(x^2+3x-1)\geq 0$$
$$\iff 12x+40\geq 0$$

但滿足 $12x+40\geq 0$ 之整數 x 有無窮多，因此再利用 $12x+40$ 是一個完全平方數〔何故？〕，令 $12x+40=\triangle^2$，由此式子卽可找出許多整數解來，譬如取 $\triangle=\pm2$, ±4, ±8, ±10, ……，卽可求出對應之 $x=-3,-2,2,5,\ldots\ldots$。

在此，順便一問：

讀者是否已從上列12個特例中找出類似問題的一般解法？請思索之後再繼續下文。

III. 形如 $x^2-ay^2=1$（a是一個非完全平方的正整數）者

〔它有一組顯然的解是 $x=1$, $y=0$；又由對稱性知當 (x,y) 爲其解時，$(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ 亦爲其解，因此爲方便討論，將所求之整數解只限於正整數者。又此類問題爲便於讀者瞭解起見，先試著以底下的例 13 來說明，雖然例13只是一個特例，但它的解法已具有一般性，讀者可試着從不同的 a 值問題中驗證此點。（參看IV之說明）。〕

例13. 求 $x^2-3y^2=1$ 之整數解。

先找出一組最簡的整數解 $x_1=2, y_1=1$，再利用這組解 $(2,1)$，可以找到其他所有整數解，方法如下：

$$(x_1+\sqrt{3}y_1)^n=(2+\sqrt{3})^n$$

由 $(2+\sqrt{3})^n$ 之二項展開式知 $(2+\sqrt{3})^n$ 可書爲 $\triangle+\square\cdot\sqrt{3}$，其中 $\triangle$，$\square$ 均爲正整數，令 $\triangle=x_n$，$\square=y_n$. 則有

$$(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\cdot y_n\text{。}\qquad(*)$$

(*) 是一個關鍵，它是找出整數解 (x_n, y_n) 的一部機器，譬如：令 $n=2$，則 $(2+\sqrt{3})^2=x_2+\sqrt{3}\cdot y_2$，但 $(2+\sqrt{3})^2=7+4\cdot\sqrt{3}$，故得 $x_2=7$，$y_2=4$ 爲一組整數解。又譬如令 $n=3$，則 $(2+\sqrt{3})^3=x_3+\sqrt{3}y_3$，但 $(2+\sqrt{3})^3=26+15\sqrt{3}$，故得 $x_3=26$，$y_3=15$ 爲一組整數解。

如此，令 $n=4,5,6,\cdots\cdots$，便可找到許多整數解來，但接着一個問題發生了：「利用這種方法可以找出 $x_2-3y^2=1$ 的所有正整數解嗎？」換句話說，有沒有漏網之魚？我們的答案是「可以」，也就是說沒有整數解不是從這部機器 (*) 算出來的。這件事的證明由於較繁，把它列在註2。〔讀者可以跳過這個證明不看，有興趣的不妨追根究底一番。〕

例14. $x^2-3y^2=7$ 是否有整數解？

類似這樣的問題，諸如 $x^2-3y^2=2$，$x^2-3y^2=8$，$2x^2-3y^2=1$，……一般均可用底下介紹的方法來討論它的整數解存在與否？試以 $x^2-3y^2=7$ 爲例說明如下：

(i) 顯然，滿足 $x^2-3y^2=7$ 之整數 (x, y) 不可能均爲偶數或均爲奇數。(何故？請思索！)

(ii) 令 $x=2\triangle$，$y=2\square+1$ (卽 x 爲偶數，y 爲奇數)，若 x, y 滿足 $x^2-3y^2=7$，則有

$$\begin{aligned}x^2-3y^2=7 &\iff 4\triangle^2-3(4\square^2+4\square+1)=7\\ &\iff 4(\triangle^2-3\square^2-3\square)=10\\ &\iff 2(\triangle^2-3\square^2-3\square)=5\end{aligned}$$

最後一式中左邊是一個偶數，右邊是一個奇數，矛盾！故 x 爲偶數，y 爲奇數之整數解不存在。

(iii) 令 $x=2\triangle+1$，$y=2\square$，則有

$$\begin{aligned}x^2-3y^2=7 &\iff (4\triangle^2+4\triangle+1)-3\cdot4\square^2=7\\ &\iff 4(\triangle^2+\triangle-3\square^2)=6\\ &\iff 2(\triangle^2+\triangle-3\square^2)=3\end{aligned}$$

最後一式亦矛盾！

綜合 (i), (ii), (iii) 知 $x^2-3y^2=7$ 無整數解。

例15. 求 $x^2-3y^2=4$ 之整數解。

(i) 仿照前例 $x^2-3y^2=7$ 之討論，知 x, y 均爲奇數或 x 奇，y 偶或 x 偶，y 奇時原式均無解。(請讀者親自動筆驗證一番。)

(ii) 當 x，y 均爲偶數時，令 $x=2\triangle$，$y=2\square$，則有

$$\begin{aligned}x^2-3y^2=4 &\iff 4\triangle^2-3\cdot4\square^2=4\\ &\iff \triangle^2-3\square^2=1\end{aligned}$$

最後一式卽爲例13之問題，因此例13問題中的整數解的2倍卽爲 $x^2-3y^2=4$ 之整數解。〔何故？注意 $x=2\triangle$，$y=2\square$〕

IV. 提出一個問題：

在例13中，我們提供了一個尋找 $x^2-3y^2=1$ 之正整數解的方法。

類似的，求 $x^2-5y^2=1$ 的正整數解：先找到最簡的一組正整數解 $x_1=9$，$y_1=4$，利用

$$(9+4\cdot\sqrt{5})^n=x_n+\sqrt{5}y_n$$

可以找到一般解 (x_n, y_n)。〔譬如：$x_2=161$，$y_2=72$；$x_3=\cdots\cdots$〕

類似的，求 $x^2-6y^2=1$ 的正整數解：先找到最簡的一組正整數解 $x_1=5$，$y_1=2$，利用

$$(5+2\cdot\sqrt{6})^n=x_n+\sqrt{6}y_n$$

可以找到一般解 (x_n, y_n)。〔譬如：$x^2=49$，$y^2=20$；……〕

讀者不妨找出 $x^2-7y^2=1$ 的正整數解看看。

我們發現了一件事實；卽對於 $x^2-ay^2=1$ 只要我們能找到一組最簡的正整數解 (x_1, y_1)，再利用 $(x_1+\sqrt{a}\cdot y_1)^n=x_n+\sqrt{a}\cdot y_n$ 便可找出 $x^2-ay^2=1$ 之所有解 (註2)。現在一個問題發生了。

是否對於任何非完全的正整數 a，$x^2-ay^2=1$ 恒可找到一組最簡的正整數解呢？

這個問題就留給讀者去思索了，我們歡迎讀者提供他自己的看法。

V. 關於第II類，二次項不可分解者，其解法的解析說明：

求二元二次不定方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 之整數解，其中 A, B, C, D, E, F 均爲整數：

原式 $\iff Cy^2+(Bx+E)y+(Ax^2+Dx+F)=0$

因爲 $y\in R$，所以

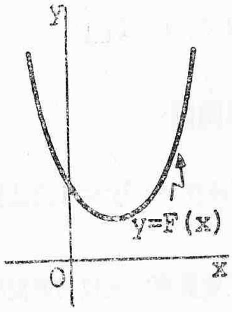
$$(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)\geq 0$$

$$\iff (B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)\geq 0$$

令 $F(x)=(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+(E^2-4CF)$

討　論

1. 當 $B^2-4AC>0$ 時，此時 $y=F(x)$ 所表的幾何意義是座標平面上一個開口向上的拋物線，它與 x 軸相交的可能情形如下列圖形所示：



（含相切）
圖 1-(i)

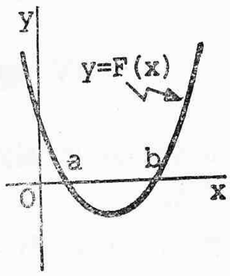


圖 1-(ii)

因此不等式 $y=F(x)\geq 0$ 的解集合 S 可能是

（i）R 〔參看圖 1-(i)，此時整個拋物線在 x 軸上方，因此 $\forall\ x\in R$，恆有 $F(x)\geq 0$〕

（ii）$(-\infty,a]\cup[b,\infty)$ 〔參看圖 1-(ii)，欲使拋物線之 y 值（即 $F(x)$ 值）≥ 0，必須取 $x\leq a$ 或 $x\geq b$〕

此時，無論是（i）或（ii）之情形，我們均無法由 R 或 $(-\infty,a]\cup[b,\infty)$ 找出所求整數 x（因爲範圍太廣了），故須再配合 $F(x)$ 本身是一個完全平方數（註 1）以限定 x 的範圍，請參看例 11 的解法。

2. 當 $B^2-4AC<0$ 時，此時 $y=F(x)$ 的幾何意義是座標平面上一個開口向下的拋物線，它與 x 軸相交的可能情形如下列圖形所示：

因此不等式 $y=F(x)\geq 0$ 之解集合 S 可能是：

（i）ϕ 〔參看圖 2-(i)，此時拋物線在 x 軸下方，因此 $\forall\ x\in R$，$F(x)<0$，故 $F(x)\geq 0$ 無

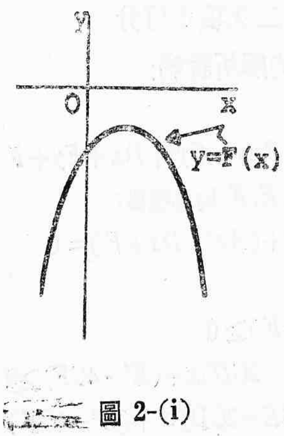
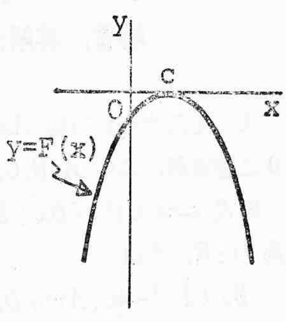


圖 2-(i)



（相切）
圖 2-(ii)

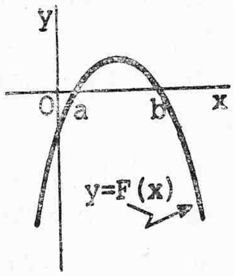


圖 2-(iii)

解〕

（ii）$\{c\}$ 〔參看圖 2-(ii)，此時使 $F(x)\geq 0$ 之可能的 x 只有 c，但若 c 不是整數時，$F(x)\geq 0$ 仍然沒有整數解〕

（iii）$[a,b]$ 〔參看圖 2-(iii)〕

此時，若是（i）之情形，則原式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 無整數解；若是（ii）之情形則可能有唯一解也可能無解（視 c 而定）；至於（iii）之情形，則可在較小之範圍 $[a,b]$ 中找到可能的整數解，上述情形請分別參看例10，例 8，例 9。

3. 當 $B^2-4AC=0$ 時，$y=F(x)$ 的幾何意義是座標

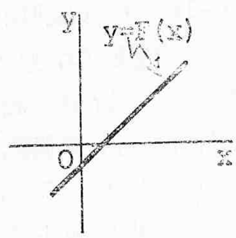


圖 3-(i)

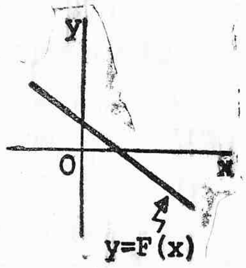


圖 3-(ii)

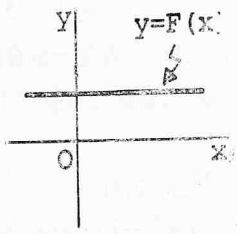


圖 3-(iii)

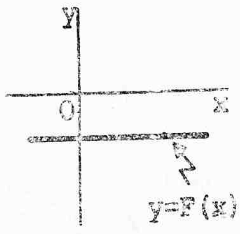


圖 3-(iv)

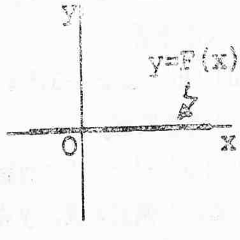


圖 3-(v)

平面上的一條直線，其圖形與 x 軸相交的可能情形是:

因此不等式 $y=F(x)\geq 0$ 的解集合 S 可能是:

(i) $[a,\infty)$ 〔參看圖 3-(i)〕

(ii) $(-\infty,b]$ 〔參看圖 3-(ii)〕

(iii) 及 (v) R 〔參看圖 3-(iii) 及圖 3-(v)〕

(iv) ϕ 〔參看圖 3-(iv)〕

除第 (iv) 情形原式無整數解外，其餘情形均須再配合 $F(x)$ 本身是一個完全平方數才能找出可能的整數解，請參看例12的解法。

註 1. 一個整係數二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根 $(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$ 爲整數的必要條件是 $\sqrt{b^2-4ac}$ 仍是一個整數，即 b^2-4ac 是一個完全平方整數。

註 2. 要證明 $x^2-3y^2=1$ 的所有正整數解都可以從

$$(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\,y_n \qquad (*)$$

這部機器算出來，即是證明下列這件事:

「設正整數 x_n, y_n，若滿足 $(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\cdot y_n$，則必滿足 $x_n^2-3y_n^2=1$，反過來，若是滿足 $x_n^2-3y_n^2=1$，則亦必滿足 $(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\,y_n$，其中 $n=1,2,3,\cdots\cdots$ 用數學的式子來說即是:

$$(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\,y_n \Longleftrightarrow x_n^2-3y_n^2=1$$」

證明: ($\Rightarrow$ 部份) 設正整數 x_n, y_n 滿足 $(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\,y_n$，由 $(2+\sqrt{3})^n$ 之二項展開知 $(2-\sqrt{3})^n=x_n-\sqrt{3}\,y_n$〔讀者務必動筆一番! 〕，因此

$$(2+\sqrt{3})^n\cdot(2-\sqrt{3})^n=(x_n+\sqrt{3}\,y_n)\cdot(x_n-\sqrt{3}\,y_n)$$
$$\Longrightarrow [(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})]^n=x_n^2-3y_n^2$$

即 $x_n^2-3y_n^2=1$。

($\Rightarrow$ 部份) 設正整數 x_n, y_n 滿足 $x_n^2-3y_n^2=1$，則

$$(x_n+\sqrt{3}\,y_n)(2-\sqrt{3})$$
$$=(2x_n-3y_n)+\sqrt{3}(2y_n-x_n)=x_{n-1}+\sqrt{3}\,y_{n-1}$$

〔令 $2x_n-3y_n=x_{n-1},\quad 2y_n-x_n=y_{n-1}$〕

這樣的 (x_{n-1},y_{n-1}) 亦能滿足 $x^2_{n-1}-3y^2_{n-1}=1$。

【理由是:

$$x^2_{n-1}-3y^2_{n-1}=(2x_n-3y_n)^2-3(2y_n-x_n)^2$$
$$=x_n^2-3y_n^2=1】$$

也就是說當 (x_n,y_n) 是 $x^2-3y^2=1$ 的一組正整數解時，由上述方法得到的 (x_{n-1},y_{n-1}) 仍是 $x^2-3y^2=1$ 的一組正整數解。

把上述的方法重複做一次:

$$(x_{n-1}+\sqrt{3}\,y_{n-1})(2-\sqrt{3})$$
$$=(2x_{n-1}-3y_{n-1})+\sqrt{3}(2y_{n-1}-x_{n-1})$$
$$=x_{n-2}+\sqrt{3}\,y_{n-2}$$

〔令 $2x_{n-1}-3y_{n-1}=x_{n-2},\quad 2y_{n-1}-x_{n-1}=y_{n-2}$〕

這樣找出來的 (x_{n-2},y_{n-2}) 當然亦是滿足 $x^2_{n-2}-3y^2_{n-2}=1$〔理由同上〕，把上述的方法一再重複做下去，我們可以得到

$$(x_{n-3},y_{n-3}),\ (x_{n-4},y_{n-4}),\ \cdots\cdots,\ (x_1,y_1)$$

而且它們都滿足 $x^2-3y^2=1$。

接着利用 (x_1,y_1) 再重複上述做法一次:

$$(x_1+\sqrt{3}\,y_1)(2-\sqrt{3})$$
$$=(2x_1-3y_1)+\sqrt{3}(2y_1-x_1)$$
$$=x_0+\sqrt{3}\,y_0 \quad [\text{令}\ 2x_1-3y_1=x_0,\ 2y_1-x_1=y_0]$$

而這樣找出的 (x_0,y_0) 其實即是 $(1,0)$〔即爲顯然解 $(1,0)$，何故? 〕，因此而有:

$$1=x_0+\sqrt{3}\,y_0=(x_1+\sqrt{3}\,y_1)(2-\sqrt{3})$$
$$=[(x_2+\sqrt{3}\,y_2)(2-\sqrt{3})](2-\sqrt{3})$$
$$=\{[(x_3+\sqrt{3}\,y_3)(2-\sqrt{3})]\cdot(2-\sqrt{3})\}\cdot(2-\sqrt{3})$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=(x_n+\sqrt{3}\,y_n)\cdot(2-\sqrt{3})^n$$

但是 $1=(2+\sqrt{3})^n\cdot(2-\sqrt{3})^n$〔算算看是不是?!〕，因此

$$(2+\sqrt{3})^n\cdot(2-\sqrt{3})^n=(x_n+\sqrt{3}\,y_n)\cdot(2-\sqrt{3})^n$$

故得 $(2+\sqrt{3})^n=x_n+\sqrt{3}\cdot y_n$。

(作者現爲臺中曉明女中數學教師)