論不定方程式 $X^2-Y^2=M$ 之解

葉 得 祥

本文寫作的動機是由於閱讀「數播」第二卷第一期張孟熙先生所寫的「淺論不定方程式 $x^2+y^2=M$之解」而引起的。我這個問題顯然比張先生的題目簡易得多，因爲我們可以利用乘法公式：$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$。

首先舉例說明

例 1：若 $x, y \in N$，$x^2-y^2=99$，求 x, y 值。

解：
$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$
$$=1\times99=3\times33=9\times11。$$

若
$$\begin{cases} x-y=1 & (1) \\ x+y=99 & (2) \end{cases}$$

(2)+(1)得$2x=100$，(2)−(1)得$2y=98$，$(x, y)=(50, 49)$。

若
$$\begin{cases} x-y=3 & (1) \\ x+y=33 & (2) \end{cases}$$

(2)+(1)得$2x=36$，(2)−(1)得$2y=30$，$(x, y)=(18, 15)$。

若
$$\begin{cases} x-y=9 & (1) \\ x+y=11 & (2) \end{cases}$$

(2)+(1)得$2x=20$，(2)−(1)得$2y=2$，$(x, y)=(10, 1)$。

得解爲 $(50, 49)$，$(18, 15)$，$(10, 1)$。

例 2：求 $x^2-y^2=100$ 的自然數解。

解：
$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

$$=1\cdot 100=2\cdot 50=4\cdot 25=5\cdot 20=10\cdot 10。$$

若 $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=100, \end{cases}$

則 $2x=101$，不合。

若 $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=50, \end{cases}$

則 $2x=52$，$2y=48$，$(x,y)=(26,24)$。

若 $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=25, \end{cases}$

則 $2x=29$，不合。

若 $\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=20, \end{cases}$

則 $2x=25$，不合。

若 $\begin{cases} x-y=10 \\ x+y=10, \end{cases}$

則 $2x=20$，$2y=0$，不合。

從解這兩個例題的過程中，我們發現：把自然數M分解成兩個相異的正奇數乘積或兩個相異的正偶數乘積，再令小的因數等於 $x-y$，大的因數等於 $x+y$，解方程組，就可以求得 $x^2-y^2=M$ 的自然數解了。

若M爲形如 $4n+2$，$n\in N$的自然數，則$x^2-y^2=M$沒有自然數解。理由如下：因任一自然數平方後，被4除，必餘1或餘0，所以任兩個自然數平方相減，再被4除，必餘3或餘1或餘0，絕不可能餘2。

接著我們來討論一下"$M\in N$，$x^2-y^2=M$之自然數解個數"在討論以前，得先看一看M的正因數個數問題。

若M分解成

$$M=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 爲相異質數，$a_1,a_2,\cdots,a_r\in N$，則

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{a_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{a_2})\cdots\cdots(1+p_r+\cdots+p_r^{a_r})$$

的展開式的項數爲 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_r)$（這個數記爲$A$），每項都是$M$的一個正因數，所以$M$有$A$個正因數。

若M分解成

$$M=2^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 爲相異奇質數 $a_1,a_2,\cdots,a_r\in N$，則

$$(2+2^2+\cdots+2^{a_1-1})(1+p_2+\cdots+p_2^{a_2})\cdots(1+p_r+\cdots+p_r^{a_r})$$

展開式的項數爲$(a_1-1)(1+a_2)\cdots(1+a_r)$（這個數記爲$B$），每項都是$M$的一個正偶數因數，它所含2的乘冪不超過$a_1-1$。

討論 $x^2-y^2=M$ 的自然數解個數：

M爲奇數時

(1) M非完全平方數：自然數解個數爲 $A/2$。

(2) M爲完全平方數：自然數解個數爲 $(A-1)/2$。

M爲偶數時

(1) M非4倍數：無自然數解。

(2) M爲4倍數

(i) M非完全平方數：自然數解個數 $B/2$。

(ii) M爲完全平方數：自然數解個數 $(B-1)/2$。

例3：$x^2-y^2=2343$有多少組自然數解？

解：$2343=3\cdot 11\cdot 71$，有8個正因數，所以有4組自然數解。

例4：$x^2-y^2=10368000$ 有多少組自然數解？

解：$10368000=2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^3$，且

$$\frac{(10-1)(4+1)(3+1)}{2}=90,$$

所以有90組自然數解。

例5：求自然數y，使$\sqrt{60+y^2}$ 也是自然數。

解：$$x=\sqrt{60+y^2}\Longrightarrow x^2-y^2=60$$

所以只有2組自然數解，$y=14$ 或2。

（作者現就讀前鎮高中二年級）