

書評·書介

「新數學為何失敗？」書介 (續) [編註]

原著：Morris Kline

譯者：方祖同

出版：科學月刊社

第十章 摘錄

“現代數學家較為喜歡，將數學描述為確是一般性抽象系統的研究。每一系統由特定的抽象元素建立起來，各元素間因為有任意訂定，但明白的特定關係存在而形成結構”。

馬歇爾·史東

(Marshall H. Stone)

新數學課程計劃既有缺點，又未能補救傳統課程的缺失，為什麼會想出新數學計劃加以提倡？此外，這一計劃宣稱的優點，並不能由計劃內容或其他實證充份證明，究竟是什麼能說明要接受這一計劃？

要理解為什麼推行新數學課程，而不是某些更明智的課程，首先要注意到現代數學家的愛好，直到十九世紀後期，大數學家主要的關切，無疑的，是自然的作用。由於這一結論並無爭議，所以無需在此處重溫相關的歷史。數學看作是各門科學之一，在十七、十八及十九世紀大部份時期，數學和理論科學間的區別實在很少有人注意。事實上，過去許多主要數學家，在天文學、力學、水力學、彈性學、電學、磁學方面有更大的成就。數學同時是各門科學之后和婢。

上述人士對他們自己和其他人獲得的科學知識，決不遲疑的付諸實用。牛頓研究月球運動以幫助船員在大海上測定經度。歐拉 (Euler) 研究船及航線的設計，畫地圖，寫成

有關火砲的傑作。笛卡兒設計透鏡改進望遠鏡和顯微鏡。高斯不僅曾作漢諾佛 (Hannover) 選舉區的調查，還改良電報和磁的測計。像這樣的例子能增多到上百倍。幾乎所有這些人士不僅看出他們幫同聚積的科學智識有潛在力量，並且還熱烈關切這類智識的運用。

不過，近百年來大多數數學家脫離了科學。他們不熟知科學並且不再關切數學知識的實用。不錯，還有些人仍然宣稱他們的數學工作有潛在的科學價值，他們注意到激發過去數學研究以及授與像牛頓和高斯等榮譽的高貴傳統。他們說要為科學創建模式，但又不真心關切這項目標。事實上，由於大多數現代數學教授不熟知科學，也就不能創建模式。他們十分願意被過去大數學家放出光芒的反射所照耀，甚至還引述前輩的成就作為支持他們現在研究的理由。數學現在變成內向，要自己供給自己，如若從過去的情形來判斷，大多數新數學研究決定不會對科學進展有所貢獻。遇到這種責難，

數學家也沒有勇氣否認，但用數學的創造具有美感作為理由來辯解。至於所創造的有無美感，無需在此爭論。主要之點是用這項價值，來作支持研究的理由。

當前數學活動的另一項特點是狹窄的專門化。和科學一樣數學已經大量擴展。大多數數學家幾乎被迫祇能專心於某一有限的領域，以保持和其他人的創造齊頭並進，產生自己的新成果。無須多說，由於這些教授本身是狹窄範圍內的專家，所指導訓練的新數學家，自會跟着走相同的路線。博士候選人不得不向偏僻角落探索，以提出滿意的論文，不再能受到廣闊的數學教育，至於科學就更不必談了。

強調數學本身及其專門化在美國特別注重。主要的原因由於研究在美國還是比較新的現象。美國教授急於自顯卓越和訓練的學生也很出眾，才希望從專門化以求迅速的提出成果。

致力於以科學為目標的正統數學需要廣博的智識背景，因為所涉及的問題，已經詳細探究了幾百年。所以，祇有很少被稱為應用數學的數學家，繼續追尋這類傳統目標。大多數轉向純粹數學問題，將原已知道的加以形式化、公設化和一般化，這樣的工作當然容易得多。

數學和科學間的裂痕，遠在 1944 年，著名數學物理學家約翰·聖格 (John L. Synge) 已經深感痛惜。

大多數的數學家，現在都探究觀念，這些觀念經大家同意，確實是屬於數學的。他們形成封閉性的團體。新進的人要發誓放棄這個世界的一切事物，通常都還能信守誓言。祇有很少數的數學家徘徊門外，尋求從其他科學領域直接引起的問題作為數學的食糧。在 1744 年或 1844 年，第二類數學家幾乎包括數學家全體。到了 1944 年，反成為全體裏最小的一支，變成必需提醒大家這一少數派的存在，和解說他們的觀點。

這些少數派不願意被稱為物理學家或工程師，因為他們追隨歷經二十個世紀以上的數學傳統，其間包括了歐幾里德、阿基米德、牛頓、拉格朗基 (Lagrange)、漢米爾頓 (Hamilton)、高斯、朋加烈 (Poincaré) 等的大數學家們。這些少數派也總是不願意看輕多數派的研究，不過深怕數學祇靠自己供給自己，不久將會興趣索然。……從研究自然已經啟發的問題，以及大有可能繼續啟發的問題，比從數學家在自己的觀念圈子裏所構想的問題遠較困難。……

科學現在正大為活躍，是從未有過的活躍，看不出有衰退的徵象，祇有觀察最敏銳的人士注意到守夜者已經離開職守。並不是去安睡，他還是一樣的努力的工作，不過現在祇是為自己而工作……

在觀念的世界裏變動與死亡和人世間的變動與死亡同樣

的無可避免。在真有變動與死亡的時候，喜愛真理的數學家當然不會假意說並未發生。智識動機的根源深處，不是人為造作所能激發，某些事物抓到了想像，有些沒有，假如沒有，就沒有火花。如若數學家真正失去和世界原有的接觸，如若數學家確實看到上帝的手在純淨精確邏輯上比在星體運動裏更真實，那麼任何勸他們回頭的諫言不僅沒有用，還會被認為是干涉了學術自由的個人權利。

有些數學家，不再假裝關切他們工作的實用，索性喧嘩的宣佈他們的新獨立宣言。當時任職芝加哥大學的馬歇爾·史東教授，在「數學的革命」一文中首先發難。

「自 1900 年以來，數學的概念以及對概念的看法，發生幾項重大的變動。其中一項真正的觀念上的革命，是發現數學完全獨立於物理世界之外。說得稍微再精確點，數學現在看來和物理世界沒有一定連繫。……在比較今天的數學和十九世紀末的數學之後，將會注意到數學知識在數量和複雜性上，增加的急速令人大吃一驚。我們更應當覺察到，強調抽象概念以及對廣泛數學範型認知及分析的日增關切，和這項發展的關係是如何的密切……我們也認出指向抽象概念的趨勢無疑的一定會繼續下去，並由已有的成就予以加強。照着這一趨勢，會將更多注意力針對領會和研究抽象範型。數學家格外覺察到數學的結構和完全運算間的基本對立。而運算的一面通常在應用上顯得有極大重要性，也通常是數學教師教學主要重點……」

現代數學家較為喜歡將數學描述為確是一般性抽象系統的研究。每一系統由特定的抽象元素建立起來，各元素因為有任意訂定但明白的特定關係存在而形成結構。他的意思是說，研究這些數學系統，不僅要考察各別系統的內部性質，還要比較不同系統的結構。他還主張這些系統以及由邏輯所提供的�方法，在研究結構性質上，都和物理世界沒有直接、立即或必然的連繫。

……真的，顯然數學好像遊戲，或者更像無窮變化的遊戲。這些遊戲中的棋子以及棋着本身並無意義。吸引人的興趣，在於能看出和運用規則所允許的玩法的範型。如若這樣的看數學，會引起另一問題：「即有無可能將遊戲的這樣那樣玩法簡化為規定的自動程序，不再需要使用判斷和啟示。」

史東教授等人士表示的看法，並非無人反對，理查·庫朗特 (Richard Courant) 係希特勒當權前，世界數學中心，德國哥庭根 (Göttingen) 大學數學系主任，後來任紐約大學庫朗特 (Courant) 數學科學研究所主任。曾答覆史東說：

「諸位當中有許多人想曾看到最近一期『美國數學月刊』(1961, 十月) 裏一篇文章。這篇文章對現在本小組的討論特別有關聯。馬歇爾·史東教授的這篇文章談論『數學的

革命』。肯定我們生活在有偉大數學成就的時代，遠超過自古到现在的任何成就。『現代數學』的勝利應歸功於一項基本原則，即抽象概念以及有心將數學從物理和其他實體分開。數學的心智因為沒有拖累就能上升到最高點，對地面上的實有，完全看清楚並加以掌握。

這位著名作者的陳述和對教學方法的結論，我不想加以曲解或輕視。但是這種包羅無遺的主張，想要首先對教育再對研究定下一條路線，那麼這篇文章像是一種危險信號，必需有所補充。狂熱的抽象主義的危險，由於形成的風氣並非全在宣揚廢話，而祇是推動片面真理，所以危險格外加大。決不應允許片面真理，將均衡完整的真理的重要一面掃到旁邊。

當然，數學思想要靠抽象概念才能發生作用，數學觀念需要經由抽象逐步的純淨化、公設化、和具象化。要達到高一層對結構的領悟，才使具有重要性的簡化成為可能，這也實在不錯。如若能放棄數學只是在描述實質存在事物的偏見，數學的基本困難就不再存在，這當然是至理，也已經被強調了相當久的一段時間。

可是，科學生命的血液是從根升上來的。根的無窮分枝向下深達可稱『實在』之處。不問這『實在』是力學、物理學、生物形態、經濟行為、大地測量學以及其他已熟習的數學內容。抽象概念和一般化，對數學而言，並不比現象的特殊性，更不比歸納、直覺更為重要。祇有各種影響力的交互作用和綜合，才使數學具有活力不致成為乾枯的死骷骨。一定要反對任何企圖迫使片面的發展趨向終生矛盾的極端。

我們不接受古老惡意的廢話，那是說，支持數學科學的終極理由，是顯示人的心智光輝。數學決不應分裂和分歧，有純粹和應用的區別。一定要保持和加強數學，使成為科學廣闊潮流裏，匯集而有衝勁的一股激流，一定不讓數學成為細弱的旁支小溪，那將會消失在沙土之中的。……

片面的看法對教育的威脅可能最嚴重。知識廣博的優良教師有啟發性的教學，對社會比已往更極度需要。課程誠屬重要，不過改革的呼聲，決不能被用來掩蔽對實質的侵蝕，用來宣傳無法感悟的抽象概念，使數學孤離，用順口唸經教條主義的方法而放棄蘇格拉底方法的理想。

……無論如何，中小學校和大學許多病症，毫無疑問的需要根本的重大治療。如若將數學、力學、物理學以及其他科學間的密切連繫，認為是所要求的原則，就應使即將做教師的這一代全力加以把持，幫助這種改革是每位科學家的莊嚴責任。」

在另一場合，對一位著名數學家的悼詞裏，庫朗特表示對忽視科學的關切。「將來應用數學一定要由物理學家和工程師來發展，會使高級專業數學家對新發展一無接觸，這種

危險確實存在」。

朝抽象概念走的趨向，朝為數學而數學走的趨向，令世界聞名的數學家約翰·凡·挪曼(John von Neumann)提出警告。在「論數學家」一文中，他說：

「數學這一學科，已經從最初以經驗為根源走出很遠，再進一步，如若第二代第三代祇是間接的由來自實在的觀念所啟發，就會陷在許多很嚴重的危險之中。變得越來越純粹講求唯美，為藝術而藝術。假使數學的領域仍然為相關事物所圍繞有密切經驗上連繫，又假使這一學科在具有養成特別良好愛好的人士影響之下，那還不一定很壞。但是嚴重的危險，在於這一學科要順着阻力最少的路線發展下去，就像水流離開源頭太遠，分成無數細小支流，使得這一學科變成既瑣碎又複雜毫無組織的一大團。換句話說，離開經驗的根源一大段距離，或者餵了太多的『抽象』之後，數學一科有退化的危險。開始的時候，通常是古典風格，到了變成怪異的樣子時，就是危險的信號了。」

另外還有抗議的呼聲，在1962年，由紐約大學傑出數學家傑姆士·斯多克(James J. Stoker)教授發出。

「真奇怪，美國向來以實用自誇，將多少世紀累積的一切科學知識付諸實用。可是近五十年或者還不祇五十年，數學的探究顯然的注重抽象方式，在科學方面，又將數學與物理世界的關係這一重大使命，完全忽視……

……我認為抽象看法以及忽視，甚至藐視與現實世界有關的數學，仍然為美國數學界的趨勢。將數學和力學與物理學間相互影響作為強烈動機，幾乎從古到今各世代主要數學家都是這樣。就目前所見似乎還很少有辦法可以代替，這是明白不過的事實。所以我看上述觀點，不論就科學自身，或國家利益講，都不健全。我還看出有一股強大的力量在進行推動這種情勢，宣傳一種說法，即強有力的用抽象教法教數學，是對小學孩童最適合的辦法。我看這種作風不祇是不顧人類心理學還將理性整個弄翻過來。數學進步的方式，總是以非常具體性質的長期經驗為依據，再形成適切的有真價值的抽象概念，帶來高度可能的推論，這項歷史事實現在完全被忽視。

不要以為我以及和我有相同態度的朋友，反對那些選擇自認適合，且有收穫的抽象方式進行研究的數學家。我們的看法祇是保持和開啓數學和物理世界的接觸，對健全科學極關重要。這種做法不僅無疑的帶來顯著的實際成就的結果，而且整個數學歷史顯示給我們這種先見，能使科學安定有活力，收到好效果。」

數學和科學分裂的危險，還有其他許多人士加以重視。美

國重要的數學家，哈佛大學數學教授喬治·布克夫（George D. Birkhoff）遠在 1943 年，就曾說過，「或許從物理學提示的新數學發現總是最重大的，因為從混沌初開起，自然已經為數學開了一條路，建立起範式，所以數學——自然的語言，也就一定要跟着走」。

有人主張，因為數學能自由的走自己的路線，現在對科學的潛在力量更大。「應用數學家們」則以歷史的證據予以反駁。數學在科學上所有的應用來自科學所啟發的數學觀念。從來沒有一位數學家坐在象牙塔裏捏造的觀念能對科學有用處。不錯，科學所啟發的觀念，後來會有出乎意外的應用，但是祇有從真實的物理問題所導引出來的觀念，用來作為起點才靠得住。前面曾經引述聖格的文章裏，也指出這一點。

「自然投射出的重大問題，從來不會到達數學家手中。數學家帶着全副武器坐在象牙塔裏等候敵人，可是敵人絕不到他面前。自然提出的問題，不是現成寫出的公式，要用鋤和鏟去挖掘。不把手弄髒的人，永遠見不到。」

流行的數學研究的性質和課程改革到底有什麼關係？其中關連在於領導改革的人士多為大學教授。這些人士在數學世界教育長大，又和激發過去偉大數學家的數學概念根本分離。約有百分之八十五得到數學的哲學博士的人士，不僅是仄狹的專家，還是祇專心在數學邏輯，代數及拓撲學那些小角落裏的人。這些領域，就數學整體來看，是離開科學最遠的一些。這些人士甚至連大一物理都不懂，也毫無想懂的意思。由於他們不知道歷史上數學所扮演的角色，所以作為數學家，實在是外行，作為有教育的人，確還是無知的人。今天大多數教授追求抽象概念、一般化、結構、謹嚴、和公設化。由於大多數數學家這樣做，所以他們認為數學教育也要這樣教少年人，那就不足為怪。這些大學教授，不論有無能力，一旦被邀，去幫助編訂課程時，所能提供的課目祇有他們熟悉的又仄狹又專門化的抽象課目。僅在小學階段的教學上稍作通融讓步，將傳統數學加以摻改，成為沖淡的或簡節的版本。這種事實說明了大部份新數學課程的內容。

史東教授對現代數學研究的特性已經如前所述，在同一篇文章毫不猶豫的說，課程一定要改造來教另一種教學。「數學十分顯明有了新的見解和進步，合起來形成數學的真正革命，但對教育者增加了困難的實際問題。祇將新數學知識的主要項目編進數學課程已經是夠艱巨的任務，還要作為抽象課目來做這種數學，並且能調和對立的看法，這對數學教學達到時代要求的水準，增加極大困難。……」

大學教授領導課程改革的結果，還另有害處。通常選擇大學教授大多由於他在專門題目上的學識和研究能力，並不是由於教學方法的熟練。所學的既然專門為研究，就是對大

學程度的教學也不會良好。數學家更不是兒童教育者。這兩類人幾乎實際上是分離集合，這些人士沒有想過中小學甚至大學本科教育的目標，以及各級學生的興趣和能力都與數學研究一無關聯。得到哲學博士的人都變得聰明些，可能在重要大學又得到了優越的位置，這些人士自信是這方面的專家，但事實上還是完全外行。不管在大學施教，已經表現了在教學方法上的失敗，不管大多數參加課程改革的教授，在他們自己離開中小學之後，從沒有再到過中小學去，這些數學教授毫不遲疑的負起這項任務。這是需要很多明智的學校的教學方法的任務，可以說他們太過冒失。他們的做法，是將教學方法祇看作是細微末節。如果他們真從研究裏學到任何東西的話，就應知道幾乎任何涉及人的問題都是非常複雜。教學上的問題實在比數學上的問題難得多，可是這些教授對自己有最大的自信。有一句俏皮話說，有學問的人的悲哀，是學問會使得自己陶醉。

美國國立橡園實驗室主任，凡因伯博士，在他的「教師是否也是公民？」一篇文章裏，批評數學家和科學家的仄狹的專業觀點，談到這兩種人士，他說：

「由於從事這類工作的人員，為大學團體的壓力所苦惱，所以將科學變成格外零星瑣碎和格外仄狹。沒有時間和心意，從自己的小宇宙以外，來看究竟做了些什麼。將他們的仄狹的專科的看法硬加在初等課程上。認為某一領域的新邊界比傳統有更重大的價值。要接受他們認為重要的，不是從更大的眼界看來是重要的。這些人士不喜歡談應用，甚至不喜歡科際研究，因為這要將他們拖離自己的小宇宙。他們認真的強行推銷他們的作風和價值標準……」

在這篇文章另一地方，凡因伯注意到新科學和新數學課程兩者的趨勢。

「祇要新課程為大學裏不切實際的純理論派科學和數學家所安排，祇要新課程特別在數學方面反映可悲的瑣屑和抽象，祇要新課程否定科學作為典範而支持科學僅為研究，我認為這是很危險的……」

……專業的純理論派學者，代表了破碎的以為研究而研究的大學的精神。抓住課程改革，從他們辛勤積極的努力，創造出咬文嚼字的怪物。初等階層教育裏的一項科目，實在太重要，不能完全交給這一科目的專業人員，尤其是本身的看法太過仄狹專門化的專業人員。」

或許不需多說，專業數學家太過存心想從數學研究獲得成就，所以很少有或完全沒有時間，去學他那一科目的歷史知識以及對人對文化的意義。有些人甚至還自誇對科學是外行。極少數對數學的廣義價值有認識的人，又不曾想到一定要用來教人。因此數學家並沒有真正的準備將他們的科目編

寫得令人發生興趣，以吸引學生來學這些科目。如若教材真能引動人，學生是會來學的。就是真心急着吸引學生，這些教授既無此能力，也不想作必要的努力以求獲得這方面正確的背景知識。

費曼教授的「新數學與新教科書」一文，前面曾加引述。其中對新數學的苛刻批評，由於純粹數學家所編寫的教科書，毫不關心數學與真實世界的聯繫以及在科學與工程上的用處，因為他們認為就整體來看，那些數學不是新的是舊的。

上述批評對大學教授的善意並無一點懷疑，不過善意通常至多祇能做清出某條道路的工作。而他們的錯誤太大，教人不得不問，「他們如何弄出這樣大的錯誤？」前面已經說明他們一部份的錯誤，但是還有更多的可說。比如數學專業人員曾受廣泛訓練，對這一科目自有一些理解。可是他們忘記自己經歷多年才得到理解，反而相信可能立刻傳給少年人。此外，他們的興趣在造就未來的數學家，不過由於忽略教學方法，就連這一任務也失敗了。他們專心在數學的表面，那就是已建立結構的演繹模式，不重視數學上的思考方式，創造精神以及如何列式，如何解題。還有，專業數學家探究數學自有自己的動機，可是，其他的人看不到學習數學的目的，對這一點他們也說不出道理來。

專業數學家至少就數學教學來講，對數學的生命有最嚴重的威脅。他們怨恨不能立刻學好數學的學生，他們厭惡想知道數學為何值得注意的學生。數學本身由於課目按照正確邏輯順序編排成爲死的東西，也就是求數學進步是很辛苦悶人的事情。

如果要求數學教授，在小學花八年，在中學花三或四年，然後在大學再花一年的時間去學陶瓷學，他們自會全力反對。不知道爲數學而學數學，比要他們學陶瓷學更難吸引少年人。

本世紀的數學家特別關心嚴謹，這項成見有歷史上的理由。不過前面已經指出，嚴謹證明對學生有多麼大的損害，爲什麼數學家堅持這一點？答案是他們偏愛專業方面的興趣，例如，用一套最少公設作爲依據，對於數學方法則不願考慮。

爲任一階段準備的課程，應當知道那一階段的教育目標，比如，爲低班級所訂的任何課目，引起學生學習興趣比顯示精通熟練遠更重要。爲了解這類目標，要在整個教育問題上用很多心思。這是數學家不能做和不願做的。

大多數數學家對學習心理學一無興趣。這門學科很難，比數學更難。少年人能學多少？應否用糖果引誘學生去學要死記的事物？果真抽象概念容易進入少年人心裏？是否早點教負數，就不覺得是人爲造作的？兒童教育者會盡力從心理

學家建立的原理，和自己的經驗所得，找出答案。數學家不肯自找麻煩去尋求心理學所能提供的道理，也不講求自己的教學技巧。

至於教科書編寫得那樣壞，理由也很容易明白。專門數學的寫作有一種特別格式，就是簡明、單調、符號化，而且枯燥無味，主要關切之點只是正確。另一方面，好的教科書一定有生動的風格能引發興趣，告訴學生要學的是些什麼以及爲什麼要學。寫作是一種藝術，數學家沒有這種修養。

數學家不能成爲兒童教育者的基本原因之一，是由於數學心智的性質。通常都相信數學家是才智的縮影，對一切問題經常能處理得很聰明，開出解決的辦法。大多數的人這樣相信，是由於他們祇要見到符號就駭怕，如若有人能精通符號，一定很有才智。照這樣說，我們就可以斷定每個法國人一定都很有才智，因為他們能精通法語。但是我卻願在數學家的智力與智慧之間作一判別。數學家確有將語詞的意義加以顯明區分的能力，有學習及應用邏輯法則的能力，有記憶和比較許多事實的能力。他具有稱爲理性的心智，在數學上也能有創造。智慧當然包含這些理性性質，不過更含有許多其他性質。像判斷力，從經驗中學習的能力，對價值的感覺，對人性的理解，以及運用知識以解決關於人的問題的能力。後面說的這些性質，數學家就是有，也不會比任意選出的一羣人所有的較多。

數學用邏輯來表達合於理性，但並不顯示智慧。就拿教微積分來講，大家知道微積分建立在極限理論上，所以就斷定教微積分的方法先從極限理論開頭。可是有智慧的人，更要考慮到少年人能否毫無根據就從極限理論學起，是否沒有任何動機和預先有的見識，就願去學。

僅以或然率爲根據，智慧的分佈在數學家當中和在律師、醫生、工程師、商人當中一樣。但是稍加分析似乎會引起一項問題，即數學家可否攤到他的一份。是什麼吸引人去學數學？和經濟學、心理學或物理學相比，數學是單純的學科，是仄狹的學科，學純粹數學不需要廣博的背景知識。此外，數學本身不涉及到人，也不涉及與人有關的複雜問題。正如羅素所說，「遠離人的情感，甚至遠離自然的堪笑堪憐的事實，多少世代創造成一個有秩序的宇宙，能讓純粹思想就像住進自然之家一樣，至少我們一項高尚的刺激力量，能從真實世界可悲的流亡中逃出來。」因此，數學可能吸引那些自覺不善於處理人的問題的人，甚至那些意識到無力處理而要逃避這個問題的人，數學可以作爲庇護所。

數學家作爲一類來看，在另一主要特點上常被估價過高，都假定教授的品德高超，祇支持對社會有幫助的問題和運動。不幸，數學界照樣也有見風轉舵的投機份子，復古的

保守分子，追求特權者，追求權力者，貪財者。讀了數學史會令人深感可悲，甚至許多大數學家，可恥的將他人的收穫作為自己的去發表。

上述對數學家否定的評價，真是駭人。看來必然使人不會相信，數學家永不錯誤以及真是優秀的一羣。

由於關心從研究求個人晉升，超過一切，所以不願意花時間在教學方法的問題上，使得發展成為有智慧的人的可能，受到限制。

大學教授不大可能勝任領導中小學的課程。大學教授如何涉及中小學課程的改革？這項工作需要從大學教授獲得一些幫助，自無問題。因為中小學教師沒有充份時間去跟上數學的進展，追上能夠編進課程的任何新教材，從學習過程的任何研究獲得助益，把這類資料用在任何大規模課程的修正。這類問題需要由教授加以評價，而教授的功能是在這些方面提供所知，因而數學教授就被請來參加改革。

另有一些人對課程改革能有幫助，那就是教育教授。不過大多數對數學的進展所知不多，祇專心於如何教傳統數學。這些教授的苦境，數學教育教授麥克斯·布伯曼(Mxa Beberman)曾經公開誠實的說明。1964年，在伊利諾大學舉行的中小學數學委員會大會論文集，他在「中學數學課程中應用的任務」一文裏，曾說，

「我的看法一直是認為我個人不對我所試教實驗的教材內容的選擇上負責。我的工作找出什麼是能教的，什麼是不能教的。如若有人建議教某一課目，我盡了我的力量，仍然不能為兒童接受，結果弄清楚，可能這一課目不能教一祇是可能。如若是先選出很多的數學內容，再盡最大的努力去硬使學生接受，我不知道這對學生有多少損害。作為教育教授，我完全滿意於盡全力以求取正確的教學方法，使兒童能接受教學觀念，但是許多批評者曾經指出，不能信任數學家所選擇的教材內容，或許是認為數學家不了解中學學生能學的是什麼，這反對看來似乎很笨，又有誰知道什麼是學生能學的？這一些東西是要加以實驗的。比較嚴重的抗議是說，數學家不知道什麼是學生的適當的數學。

就一般教育而言，他們並不知道什麼是數學裏真正最重要的。現在我不知道要找什麼人去請教這種見識。是否我們要找不是數學專家的那些人，來告訴我們什麼數學是適當的？我想這是我們經常要面對的問題。關於這一方面，我仍舊願意向數學家請求幫助，我不認為他們已往曾經誤人太多。不過我想重要的，是認清現在比三、四年前有更多的人，對下述假設發生疑問，那一假設是說，對提供在中學應教什麼數學，數學家是最佳的人選。」

要求數學教授對採取什麼課目提供見解，這件事本身並非錯誤。像前面曾經指出的，還是有事實上的必要。不幸，參加課程工作的人士，大多數不是適當的人選。仍然在傳統數學領域，亦即在關切數學與各門科學間關係的領域裏工作的那些少數人士，在1960年代，全心參加研究急速擴展的各門科學裏的問題。所以在比較遙遠的抽象純粹數學那一面的那些教授，覺得可以放開手致力於新數學課程的工作。此外，除了他們自己的單方面想法而外，這些人士和一般大學教授一樣，對中小學課程既無經驗也少接觸。事實上，他們過去對這類關係一向輕視，所以各班級應教些什麼以及少年人有什麼想法，毫無觀念。許多濫竽充數的教授，覺得這祇是處理初等數學的課目，或是想找些活動增加自己的聲譽，因而欣然參加。

或許有人認為大學教授在教學方法方面的弱點，可能因為有中學教師及教育教授的參加得到補償。誠然不錯，後面兩種人知道對中小學生應該教些什麼以及如何激發少年人學習。可是中學教師和教育教授會被數學家唬住。在現今社會裏，能寫研究論文的人被看成是具有非常能力的人。在一個團體裏，地位較低的人員對這樣傑出而有可靠學問的人，如何會再懷疑？如上所述，公正的說法，應為在每一課程團體裏，大學教授左右着教育者及學校教師。教育者及教師祇知向偶像頂禮，不知道大多數是泥足的偶像。

上面所作的說明，並非用以反對智識份子參與學校問題。這些人士參加的需要，原屬公認。這些說明，卻顯示學校本身的系統要夠堅強，足以辨認何者對他們有幫助，何者反誤引他們入歧途。學校所能獲得的幫助的價值，完全看受幫助者的能力。一定要能判斷所得到的忠告是否健全。換句話說，可以借重大學教授作為顧問，但決不能用於主持和支配中小學課程的推行。

新數學課程所採取的方向，已經說明。但沒有解釋何以還能比較的廣被接受。這項課程，如果說有許多缺點，自會想到將為全國大部份所公開拒絕，其所以被採用，可由幾項因素來解說。

或許一項最大的因素，是課程團體都組織完善經費充足。因此各團體從事積極競賽，推動新課程使獲接受。許多團體的領導人和團體，在教師、校長、行政人員等各種集會裏，一齊幫新課程講話。由於傳統課程未能成功，所以許多人認為新課程至少可以接受。從演講裏知道，確實是由數學家，教育教授和中學教師的共同合作，並都同意新課程的優點，自更深被打動。

除了演講，各課程團體也印發文獻資料。像已經提到過的文件，「中小學數學的革命」，副題為「對行政人員與教

師的挑戰」，是1961年全國數學教師協會所散發。表面上，這項文件是在美國各處舉行會議的報告。這些會議原本是將新課程的性質告知中小學行政人員及數學主任。但在敘述新課程時，說是「能使他們在建立新的改良數學方案時，處於領導地位」。暗示行政人員如若沒有採用革新的課程，就犯了冷漠或消極的罪過。在1961年，美國對新課程祇有極少的經驗。在那個時候，用這種小冊子來競銷和鼓吹新課程，簡直是宣傳罷了。

不幸，這種宣傳卻很收效。大多數學校行政人員缺乏廣博科學背景知識，能用來評估所建議的革新。是否這些革新是教育專門技能與最佳科目結合的典型，或者祇是各科目專家的熱情產物和學生的需要並無十分關聯，他們無法知道。所有的壓力正集中在行政人員身上。他們為了表示有興趣和願意求取改革，就選用其中某一方案，或者為了澈底誠實，自認沒有能力可以判斷任一種方案的優點。實際情形，是許多校長和主任督促教師採用新課程，用來向學生家長及校董會表示他們的機敏和積極。

就是採用現代數學這一名稱，完全是為了宣傳。「傳統」意謂古老的、不完全、貧瘠的、是一個惡意批評的名稱。「現代」意謂最新的、適切的、充滿活力的。現代和新這兩個名稱要用在一切值得用到的地方。新課程的發言人大大為渲染一項事實，即傳統課程對1700年以前所不知道的數學，幾乎沒有提供什麼。當然，正如曾經說過的，現代和新這兩個名稱很難認為有理由，因為新課程，基本上祇是傳統課程的新教法。

少數發言人竟隱約的威脅人們採用新數學，實在降低了他們的人格。大學入學試驗處的數學委員會裏，就有幾位是這樣的。該處編訂性向測驗為高中學生進入大學之用。發言人暗示這些試驗裏包含現代數學課目的問題。由於教師急着讓學生考好這些試驗，就被迫來學習新課程所包含的什麼，被迫來教這些課目。

另有細心計劃的一種手段，用在推動新數學使人接受。很有能力的數學家保羅·羅森布魯姆(Paul Rosenbloom)教授曾參加編訂課程，對這一手段，在題名為「應用數學、研究與教育需要的是什麼」一文中有所敘述。羅森布魯姆說：「在試圖改變中小學數學教學這一件事情裏，問題很多。其中之一是社會工程學方面的問題，亦即在沒有權力可以強求任何人做任何事的條件下，如何使大規模改變，迅速達成。要使很多人自行決定去做他們該做的。所以不祇是安排第七或任何其他級一級應教什麼數學的問題，更是實際急速帶進多數學校又不顯得是強迫的問題。因此進行的程序，是從全國各地，集合數學、教育、中小學各界以及其他等等方面很

多代表和各種看法的人，在很寬容的氣氛裏，編寫教科書。主要的，要能宣稱這第九級課目，代表數學家 and 教師的一致同意，對其他班級的課目也是一樣。西雅圖學校系統引進了SMSG新數學教材，因為許多數學主任參加這個編寫小組。全國數學教師協會也曾參加過意見，該會中學課程委員會的主席參加第十一級編寫小組，像這等等事。如若你有這類問題，在某些範圍內，所得結果，要看代表不同看法參加編寫小組人士的說服力量和成熟判斷」。像這樣來推動計劃，使得一位學校顧問說，假如發展現代課程計劃的人士，在教學方法上的見識能夠和他們進行推動計劃一樣聰明，那就是數學教育黃金時代的來臨。

雖然參加編寫小組的許多教師，有時不免有些失望，甚至因為不得不作一些妥協而煩惱。但是回到家鄉地區，由於曾經參加編訂課程自覺得意，當然偏向他們幫助完成的課程，立即為現代數學熱心競銷，領導推動。

許多大學教授，真的認為中學教材對有學問的大學教授而言，祇是小孩的玩藝。自信能找到勝任的活動，像鼓吹現代課程，甚至開班訓練教師教新數學。另一些人的附和贊同在於使自己高出人羣，還能優先參加成為突出的活動。中小學教師也急切顯示在教育方面領先，不問交給他們的是什麼，就來促進推動。可惜，教師整天辛勞工作，沒有機會再去學習什麼是數學上最重要的，也就不能審慎查核作為通向數學教育大道的新教本。

許多教師由於迎合新數學，就有機會貢獻於編寫的成果，也搶着參加。通常他們祇不過將舊教科書噴上些新數學打扮起來，在這些書上貼出新數學教科書的標籤。當然這些教師，至少對外自稱擁護新數學。

有人解釋這種教科書可以作為折衷辦法，所持的理由是學生還沒有立即轉移到新數學的準備，特別是那些已經學過幾年傳統數學的學生。不過這些折衷派教科書，由於不是將傳統和現代科目合理的統一編訂，顯然祇是生意經，讓人家看來像是現代數學教科書，實際是傳統和現代課目的大雜大會，完全未曾整合。

出版商為爭取市場利益，推出成套的新數學教科書。更為確保能被採用，不僅用新奇巧妙的廣告文字和新數學的宣傳聯合起來。還派出發言人到教師的集會裏為新數學講話。主持課程編訂人員，贊同附和的教師，和出版商配合織成嚴密的既得利益的網，將對數學祇有單純認識的新聞界，一般大眾，甚至支持這一運動的基金會，都一網罩住了。

除了已經敘述的因素而外，另有偏愛新數學的原因。有些教師無疑的真相信公設演繹方式是數學的要素。他們得到這種仄狹的看法不問是來自所受的教育，或者被許多偏愛這

種方式的教科書誘使採取，他們雖不是有效力的兒童教育者，但至少是真誠的教師。令人內心懷疑的，是有些教師喜歡將熟悉的數系用難懂的公設方式來表達。由於他們原知道是簡單的數學，祇要這樣一弄，看起來像在教高深的課目。

許多年輕教師相信，現在數學有了正確優美的說法，可以充份採用公設及嚴謹的教法而學生也會加以吸收。就是這些教師曾經爲了這種教法吃足苦頭。在學會正確的說法之後，他們不再回想起和感覺到在學習嚴謹說法時所遭遇的困難。

有些教師深知某問題的嚴謹證明，而要他們祇教學生能說服人而不嚴謹的證明，心中就會深感不安，他們知道這是不完全的證明。不過重要的不是要教師滿意而是讓學生滿意，好的教學方法需要這樣折衷的辦法。

教師自然願望提供完全優美演繹的數學。當然這是一種較爲美好的說法。不過對學生而言，其價值和組織的優美平穩正好成反比例。因爲最終的說法，曾經過很多道修飾，不是自然的解說。

另有一些教師希望學生一下就學會全部真理，不必要將曾經學過的忘掉。不過，就是教英文或歷史也不能從最高標準開始。中學學生的英文作文得的A，如照大學標準來講，大都祇能算作C。教人 $2 + 2 = 5$ ，後來再改正，與教減法先作爲「拿掉」，後來再改正爲引用 -1 是加 2 的反元素這一概念，完全不是一會事。對少年人講，後一說法是太過累贅。

公設演繹教法流行的另一主要理由，是比較容易表達。整個教材已被安排成明白清晰的順序，所有教師要做的祇是就提供的罐裝教材重講一遍。我聽到過教師抱怨，說許多學生，特別是學工科的學生，祇希望就要學的，教他們做的程序，再照着程序做回來。教師用邏輯方式施教，因爲能避免許多困難——像教學生如何去發現，領引學生參加構想的過程，解說朝這條路進行，不朝那條路走的理由，尋求令人心服的論證——這比學生想避免思考祇要學童重複的機械學習程序，更應受到非難。公設的性質，正如羅素所說，有竊取真正辛苦工作的便宜。就教學方法來講，這種竊取得不到理解，所以更不好。

我們已經注意到許多教師，特別是在大學階層的教師，喜歡用嚴謹公設教法來表達。爲了他們偏愛自己的專門興趣就讓學生吃虧。縱使這種系統能使少年人理解，所需教學的時間最好用在更有意義的教材上。從嚴謹的公設教法以及提出令人迷惑的嚴謹證明，教師爲他們自己，不僅提供表達數學的方式，還更將另一些課目過早的加以施教。這些課目像抽象代數概念、線性向量空間、有限幾何、集合論、符號邏輯、矩陣，是高等數學課目，能使教師的自我得到滿足。難怪學生變得和數學日見疏離，並對所教的和什麼有關聯提出

疑問。

教師不問理由堅持教少年人現代嚴謹證明，是欺騙自己的行爲。我們已經注意（第5章）到，並沒有終極的嚴謹證明。這項事實正好是從數學發展的途徑得來。卓越的研究數學家及兒童教育者費力克斯·克萊（Felix Klein）曾說過，「事實上，數學的發展像一棵樹，不是祇從細小支根朝上生長，還將向下越長越深，同時以相同生長率使枝葉向上散開來……我們知道，對數學的基本研究，那是沒有最後終點，所以另一方面，也沒有最初開始，可供作施教的絕對依據」。朋加烈（Poincaré）表示相同的看法。沒有已完全被解答的問題，祇有多少已被解答一些的問題。數學的正確正和人的一樣，而人是容易犯錯的。

數學史中沒有一個時期，對何謂嚴謹有明確的說法。因之沒有證明是真正完全的。在任何情形裏，教師一定要有一些折衷。集合論現在被認爲是數學的任何嚴謹教法，一開始就不可缺少的。有趣的是極少教師知道集合論有最深遠且難於克服的邏輯困難的根源，假如沒有覺察到這一基礎問題，至少應注意到當代傑出數學家之一，赫曼·偉爾所說的話。「數學的終極基礎及終極意義的問題，仍然有議論的餘地。不知道從什麼方向能找到最後的解答，甚至根本不知道是否有可預期的最後客觀答案。數學化正是人的一項創造活動，和語言、音樂一樣，具有根本的原創性，其中歷史性的決定，公然不顧完全客觀的理性化」。

雖然對嚴謹的公設演繹教法有所偏愛，但也看出有些教授縱使介紹的是嚴謹的教材，並不能真正確定這樣做是明智的。很多微積分書籍起頭部份列出嚴謹的定義和定理，例如，像有關極限和連續的定義和定理，後來就決不再提到這些教材。書的後面部份係採用食譜的寫法。對這類書最寬容的看法，是作者想讓自己良心平安或者想給學生對嚴謹是什麼意義有一些觀念。或許更正確的看法，是這些書僅提供虛飾的嚴謹，爲了投合兩種市場的心意。一種市場需要嚴謹，另一滿意於教機械程序。

另外有些教科書採取其他折衷辦法。在教科書的本文裏，所陳述的是機械的，也許偶爾謙虛的加點直覺的解說。至於「真正」解釋是用嚴謹的證明，但放在附錄裏，又寫的很簡潔，學生當然完全不能懂。這樣使作者自己良心得到安慰。這種書和原來機械式陳述並無不同。這種書確實對了解某一點有貢獻，那就是表示有能力的數學家對教學方法的愚昧。

由於上面引述的各項原因，現代數學現已十分流行。正像奧斯卡·偉得（Oscar Wilde）所說，流行使得奇想暫時變成普及。