數學解題法中的

特殊化和一般化原理

張 憶 壽

「逢山開洞、遇水架橋」描述着一個堅強人物抗拒艱難的大無畏精神，值得我們歌頌讚揚。可是，如果在數學課本裏碰到了問題，有時候，比較適當的做法也許就是俗語裏的「大事化小，小事化無」。這種情形好比遠足郊外，遇到了小溪，不寬不窄的，剛好跳不過。假如這時我們幸運的在溪裏找到了一塊適當的石頭，那麼，這塊墊脚石就可能發揮功用，把一大步化爲兩小步而跨過溪面。在數學範圍裏，沿用這種型式所解決的問題很多，我們把這種解決問題的方法叫做特殊化。

在本文裏，我們要透過下列幾個問題來說明特殊化的意義與功用。

(一)一付棋子，共 n^2 個（n 當然是個正整數），各標一個 1 與 n 間的數字，標 $1, 2, \cdots\cdots, n$ 的各 n 個。問題是：能不能把這 n^2 個棋子排成一直排，使得對每個 $X \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$，在任兩個標 X 的棋子間恰好各有 X 個其他棋子？

(二)假定某任意給定的三角形的內切圓半徑爲 r，外接圓半徑爲 R，最長的高爲 H。試證明或否證 $r+R \leq H$。（如圖一）

(三)如何在給定的橢圓周界上，選定三個點 A、B、C，以使得所形成的三角形的面積爲最大？（如圖二）

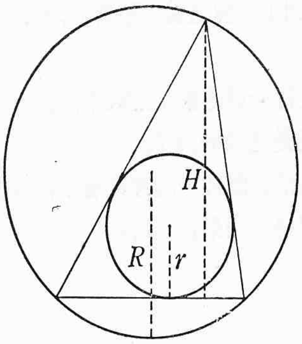

圖 一

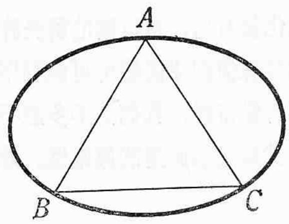

圖 二

我們希望讀者在繼續往下閱讀之前，至少先花上一、兩小時試試這幾道題目。若是讀者能夠檢討自己解題的過程，不斷的從自己解題的經驗中去領會本文所講述的方法，那麼，他的學習就有收穫了。

首先，我們利用第一道題來解釋特殊化的意義。初次讀到這道題的人大概可以分爲兩類。第一類的人感覺到茫茫無邊，不知所措，從來沒有遇見這樣的東西，找不到任何足供模仿的典範，怎麼辦，老師沒教過，又不是發明家，怎麼可能做得出，算了，眞煩人。

另一類的人也沒做過這問題，可是在瞭解題意之後，卻不慌不忙（土里土氣？呆頭呆腦？）的找來四個棋子，兩個標上 1，兩個標上 2。玩呀玩的，終於發現無法把這四個棋子排成題意所要求的樣子。略經思索，他知道原因了：標 2 的棋子之間一定要有兩個其他的棋子，因此，必須把標 1 的兩個棋子排在當中，但是，這樣的排法就又使得兩個標 1 的棋子之間沒有其他的棋子了。根據這些，他便知道當 $n=2$ 時，題意所要求的排法是辦不到的。

上面的做法「土里土氣」，而且「玩呀玩的」，好像是亂碰運氣，所得到的結論雖說正確，卻是距離問題所要求的答案還有一大段距離，不足借鏡，不必重視，沒有什麼了不起。但是，優秀的數學家一定會愼重地說道：「嗯！老手。」套句國文先生的話，這是寓偉大於平凡，是看似容易卻艱難。把一個涵蓋廣泛的問題暫時擱下，而老老實實的分析其中一個簡單特殊的情況，這便是特殊化的精髓，相信並且重視這種工作的價值不是簡單的事，所謂慧眼識英雄，它是長年累積的工夫，是從整理自己解題經驗中逐漸培養起來的。

$n=2$ 是這個問題裏最簡單容易的特例。只須經過少許觀察便能解決。但是一個老手絕不會因此而輕視它。他要解決它，更要利用它來解決原題。$n=2$ 的情況極爲容易，解決它，好像有點小題大作，不着邊際；企圖利用 $n=2$ 的結論來解決原題似乎顯得螳螂擋車，不自量力。好吧！我們就來看看這樣的做法是不是不自量力。

首先，$n=2$ 時的結論至少提供了我們一個嚐試的方向：對於任意的 n，證明題意所要求的排法均爲不可能。

我們不妨保守些，暫時先用 $n=2$ 的討論來研究 $n=3$ 的情況。由於標 3 的棋子之間要有三個其他的棋子，目前一共有三個標 3 的棋子，因此，任何合乎題意的排法一定是下面的樣子（一共是九個棋子）：

③ ○ ○ ○ ③ ○ ○ ○ ③

由於標 3 的棋子把其餘的棋子分成兩個區域，而且任何兩個標 2 的棋子都不能被排在同一個區域，但是，目前一共有三個標 2 的棋子，因此，我們無法把標號爲 2 的棋子安排得合乎題意。

做過 $n=2$、3 的情況之後，這一道題就不再具有挑戰性了。任何細心的讀者必然都知道如何處理這道題的一般情況。（先把標號爲 n 的棋子依照題意排列起來，然後觀察標號爲 $n-1$ 的棋子。）

$n=2$、3 的情況是個簡單的特殊情況。但是，一旦解決了它，我們便找到了進一步努力的方向與尋求整個問題解答的秘密。解決了 $n=2$、3的情況就好像是在溪中找到了一塊適當的墊脚石，足以把大事化小、小事化無。

雖說特殊化很有用，可以幫忙解決許多問題，但是，並不是每一道題都能這般幸運。有時候，我們必須嚐試好幾個特殊情況才能獲得可供利用的資料。第二個問題便是這樣的例子。

這個問題有點奇怪，我們差不多想不出什麼相關的問題來幫忙。既然一時無從着手，我們何妨找些特殊的三角形來試試這個敍述的眞確性。最特殊的三角形自然是等邊三角形，這時，

$$r=H/3,\quad R=2H/3$$

所以，在這情況下，敍述是正確的。

這個特殊的情況價值不高，沒有提出充分的資料，不足以讓我們藉此斷定敍述的眞僞。我們只好再試試等腰三角形，這也是特殊的三角形，不過，範圍大多了。

等腰三角形的形狀隨着頂角而改變，它有兩個極端的退化情況。一個是頂角爲0°時，另一個是頂角爲180°時。在前一退化情況，$r=0$，$R=H/2$ 敍述依然爲眞。但是在後一退化情況，$r=0$，$R>0$，$H=0$ 敍述爲僞。因此，我們否證了這個敍述。（用功的學生最好再花點心思想想這題。）

一般說來，否證某個敍述的常用辦法是利用特殊化來找尋反例。上面的問題便是這樣做的。先試驗一下多少是隨意選出的某個簡單情況。假使試驗結果與敍述相違，那麼，這敍述就被駁倒了，工作也算完畢。可是，假使試驗結果與敍述相符，那麼，我們就得從試驗中找尋啓示，或者證明敍述爲眞，或者修改找尋反例的方向。

最後，我們來看看第三個例子。談了這麼多的特殊化了，讀者必然知道這時候應當先考慮橢圓的特殊情況——圓：如何在給定的圓周上，選定三個點 A、B、C，以使得所形成的三角形面積爲最大？

這個特殊問題的答案是，當着$\triangle ABC$爲正三角形時，其面積爲最大。（原因很簡單，如果$\triangle ABC$不是正三角形，則三邊不等。假定$AB\neq AC$，則可在圓周上找到點D，使得$\triangle DBC$的面積大於$\triangle ABC$的面

積，如圖三，嚴格的證明與此稍有出入，但可由讀者自行補上。）

好了，現在我們要以這個特殊情況爲基礎來解決原來的問題。圓與橢圓的關係何在?

把圓壓扁就得橢圓!

在平面上選定以橢圓之重心爲原點的坐標。（如圖四）令G爲以橢圓之長軸爲直徑的圓。定義線性函數T: $R^2 \longrightarrow R^2$ 如下:

$$T(x,y)=\left(x,\frac{b}{a}y\right)$$

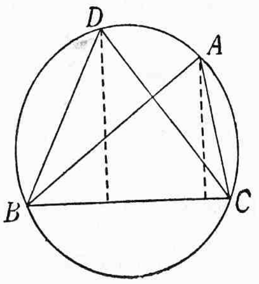

圖 三

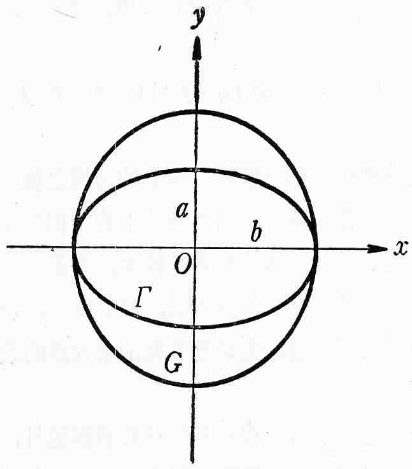

圖 四

則函數T把圓G映射到橢圓Γ。前面所提到的把圓壓扁卽得橢圓便是指的這個線性函數T的作用。

假設$\triangle DEF$是圓G上的一個正三角形。由於線性函數的面積放大率是個常數，我們知道$\triangle DEF$面積與圓面積之比等於 $T(\triangle DEF)$ 與橢圓面積之比。因此，由 $A=T(D), B=T(E), C=T(F)$ 所組成的三角形必然就是我們所要找的。（請讀者把這幾句話弄淸楚，它所牽涉到的是線性函數的一般性質，而與本文所討論的特殊化無關，所以討論從簡。）

現在我們總結一下這個問題的解法。爲了要解決原題，我們製造了並解決了一個輔助問題。原題是目標，輔助問題是手段。原題看來困難，輔助問題卻是幾乎可以立刻得解。事實上，輔助問題是在原題所涵蓋的範圍之內的東西。我們要在輔助問題的基礎上解決原題，怎樣才有可能呢? 我們是實實在在的提出了一個頗有份量的觀察: 把圓壓扁卽得橢圓，而且「壓扁」是個性質良好的函數。

因此，解決原題的因素有兩個: 第一，我們製作並解決了一個輔助問題。第二，我們找到了把輔助問題應用到原題上去的路徑。

利用特殊化的方法去解決問題是個好主意。但是，有時候，輕而易擧，只須採用特殊化所指出的原則便能把困難在傾刻之間化爲烏有。有時候，卻仍然須要提出一些有份量的工作才能完全達到目的。當然也有失靈的時候。天底下沒有一個屢試不爽的解題方法，我們只能指出公認爲經常有用的方法。基本上，特殊化所提供的是一個可能的工作方向，尤其是當原題看來困難，令人束手無策的時候，它給了我們一個工作的機會。請記住，有工作才可能有收穫，才可能維持住解題的興緻。

上面的三個例子中，由於篇幅的限制，只有第一例的解說比較眞實的描述了一個老手的思路。第二例與第三例的解說都過份的聰明了一點， 沒有把嚐試與錯誤的經歷描述出來。 當然第一例的描述也是簡略的，一個老手也可能試過數學歸納法或是什麼別的方法，不過他會永遠記得試試特殊化的辦法。一般數學課本的陳述， 常常是在表演， 只把最聰明、 最漂亮的部分搬上銀幕， 從來不提練唱排演時期的愚蠢與甘苦。細心的讀者，好自爲之。

特殊化不只是可以幫助我們解決數學問題，更重要的，它是貫穿人類知識的常用方法之一。我們都知道，零散孤立的事實難於理解、記憶。系統化的知識與歸了位的知識才比較有利用價值。在建造知識系統與歸納處理新知上，特殊化是一個必要的手段。不過，這些東西不是本文的主題，我們暫且不談。我們只在這裏再舉一個例子來說明特殊化在幫助記憶上也有其特殊的功用。

有的數學公式相當複雜，是記憶上的負擔。一個經常發生的情況是我們只記得大略的樣子，卻弄不清其中的細節。譬如說，我個人就老是記不得$\cos(x+y)$是等於$\cos x\cos y+\sin x\sin y$還是$\cos x\cos y-\sin x\sin y$。每次在使用這個公式之前，我總是把$x,y$換成一個好角度代下去試試。(這也是特殊化!)取$x=45°$，$y=45°$，則$\cos(x+y)=\cos(45°+45°)=\cos 90°=0$，而

$$\begin{aligned}\cos x\cos y+\sin x\sin y&=\cos 45°\cos 45°+\sin 45°\sin 45°\\&=(\cos 45°)^2+(\sin 45°)^2=1\end{aligned}$$

所以，$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ 讀者不妨在碰到類似困難的時候，嚐試一下這個特殊化的辦法。

討論過特殊化在解決數學問題上的功用之後。現在我們來看看一般化。我們知道特殊化的意思是把目前所考慮的東西暫時擱下，而考慮其中的一個特殊情況。一般化與特殊化正好相反：把目前所考慮的事物暫時擱下，而考慮一個涵蓋範圍比較大，涵蓋着目前事物的東西。

一般化的主要功用是貫穿知識，精簡概念，提高我們在學問領域上的視野。把特殊化與一般化調配起來運用是研習任何知識，尤其是高度抽象知識的最佳策略。在下面，我們將集中討論一般化在解決數學問題中的功用。

採用一般化來解題的程序是：仔細觀察題目，以便製作並解決一個涵蓋範圍比較大的題目，從而得解原題。（通常我們把涵蓋範圍比較大的問題叫做比較一般的問題。）這樣的做法似乎給人一種好高騖遠、不可思議的感覺。捨下原題而企圖解決一個更大的問題，不可能吧! 但是，天下的事很難說的。我想我們還是廢話少說，趕緊用例子來說明這一點。

問題 1　已知一直線及一正二十面體的位置，求作一平面通過這直線，並平分這二十面體的體積。

乍看之下，這道題目好像不好做，正二十面體是個什麼樣子，要不要先作個圖?

可是，如果我們記得採用一般化的做法，問題就簡單了。因爲，一般化的做法自然地指引着我們提出一個更深入核心的問題：

問題 2　已知一直線及一多面體的位置。我們想要作一平面，通過這直線，並且平分這多面體的體積。問：對於怎樣的多面體，才可作出上述平面?

我們知道，一個平面被一條直線及線外一點所決定。在這裏，我們只須作出一個適當的點卽可。因此，當着該多面體具有一個對稱中心時，問題 2 就有正面的解答。

問題 1 是問題 2 的特例，解決了問題 2 便也就解決了問題 1。製作並解決問題 2 便是解決問題 1 的所有工作。

在看過這問題的解決過程之後，我們知道，比較一般的問題可能反而比較容易解決。在這種情況下，製作一個比較容易的一般問題便是解決原題的主要成就。

事實上，有經驗的數學工作者在解題時，常常主動的採用一般化的做法，常常有意的製作一個涵蓋範圍比較廣的問題，然後試行解決。

體認到一般化做法的價值，然後養成一個隨時準備採用一般化做法的習慣，將是受益無窮。

看到這裏，讀者大概已經相信一般化確實能夠幫助解決若干問題。

一般化是一種重要的解題方法，更是一個取得科學成就的常用手段。在數學、物理學以及其他的自然科學上，將現有定理、定律加以一般化（推廣），或者從若干個別觀察中綜合出一個含義廣泛的敍述都常常是走向發明的第一步。

通盤瞭解一般化的一個好機會是解決幾道算術裏的四則應用題。先用算術做，再用代數做，最後將兩

種做法細加比較。通常說來，代數做法比較容易，但是反而具有比較大的應用性。從算術到代數，涵蓋範圍變大了，而處理手法卻簡化了。（當然，在學習程序上一定要先學算術。）

好的一般化須要從掌握事物的特質下手。試作這類練習極爲有益，我們在此列舉一個，希望讀者能細心的做一做:

問題 3　我們用 l, m, n 代表一個三角形的三個邊長，假定 l, m, n 都是正整數，而且 $l \leq m \leq n$。問:

(A)　當 $n=9$ 時，滿足上邊條件的三角形的個數有多少?

(B)　如果 n 爲任意值，請找出(A)的通式。

我們再強調一次: 無經驗卽無學習，一定要善於利用自己解題的經驗才能體會到一般化與特殊化的意義，才可能進一步的運用它們來解題。

最後，我們引述一段偉大數學家 Hilbert 的話來做結束:

「如果某個問題難倒了我們，那麼，常常就有另一個比較容易的相關問題我們還不會做。因此，我們該做的是: 找出那個簡單容易的問題，然後把它解掉，而且要儘可能的解得盡善盡美，儘可能的用比較一般化的辦法來解它。」　（取自 Constance Reid 著 Hilbert 傳，p. 80）

本文原載六月廿三日民生報，作者現任敎於中央大學數學系。

——編　者