數學傳播 30卷4期, pp. 69-78

道 4

吳振奎

前文 [1] 我們講了數3, 及與之相關的一些論題, 下面我們說說4。

在自然數中, 4是最小的合數, 也是除1之外的最小完全平方數。古希臘人認爲4代表公平、正義; 在我國「說文」中寫道"四, 陰數也。" (古人稱奇數爲陽數, 偶數爲陰數, 陰一指烏雲蔽日的天象, 二指上意引申爲覆蓋之意)。「周易」中也有"天三地四"之說。

生活中我們幾乎處處與4打交道, 舉目四顧, 滿眼是四邊形 (還有圓形): 門、窗、桌、椅, 書、報、雜誌, 冰箱、洗衣機、電視, ... 皆爲四邊形外形。再說, 天有四季 (春夏秋冬)、面有四方 (東西南北), 經書上稱地、火、水、風爲"四大"(「老子」稱道、天、地、王 (人) 爲四大),「周易」中有四象 (兩儀生四象、四象生八卦), 人的雙手雙脚合稱"四體" (書法中正、草、隸、篆亦稱四體), 地球上有四大洋 (太平洋、大西洋、印度洋、北冰洋), ...。

在數學中的"四捨五入"近似計算法則中, 4是被捨掉的最大數, 如此等等。下面我們還是來介紹幾個與4有關的數學趣題。

1. 四個4和四個9的算題

用四個數字通過某些運算組成$0 \sim n$ (某個自然數) 的問題俗稱"霍艾威爾 (W. Whewell) 的問題", 因爲它最早被此人提出 [2]。

1859年霍艾威爾給英國數學家德 · 摩根 (A. De Morgan) 的信中寫到: "我想用四個9表示$1 \sim 15$的數, 例如 $2=\frac{9}{9}+\frac{9}{9}$, 請問繼續此項工作有無價值? ", 德 · 摩根回信說: "試一試15以後的數字會很有價值, 特別是在數學教育方面會有很大作用。"

用四個9通過四則運算、加上開方表示$1 \sim 15$似乎無大困難, 但表示16則需引進小數點:

$$16=\frac{9}{.9}+9-\sqrt{9}.$$

接下來表示25則還要引進階乘符號:

$$25=9+\frac{9}{.9}+\sqrt{9}!.$$

表示38又須引進循環小數記號:

$$38 = (\sqrt{9}!) \times (\sqrt{9}!) + .\dot{9} + .\dot{9}.$$

(注意到 $.\dot{9} = 1$, 當然38還可表爲 $(\sqrt{9}! + \frac{\sqrt{9}}{9}) \times \sqrt{9}!$ 形式。)

1913年魯茲鮑爾 (W. W. Rouse Ball) 在英國「數學雜誌」上提出用四個4表示$1 \sim 1000$的數字問題, 這其中大部份已解決; 但113、157、878、881、893、917、943、946、947的表示方法他沒能找到。其實方法還是有的 [3]。

2. 四對 (雙) 數的擺放

兩個1、兩個2、兩個3, 可否擺成一排, 使得兩個1之間夾一個數, 兩個2之間夾兩個數, 兩個3之間夾三個數? 答案是肯定的, 請看:

$$3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 2$$

問題推廣一下: $1 \sim 4$各兩個, 可否擺成一排, 使兩個1之間夾一個數, 兩個2之間夾兩個數, 兩個3之間夾三個數, 兩個4之間夾四個數? 答案也可找到:

$$4 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 2$$

問題推廣到$1 \sim 5$, 擺法則不存在, $1 \sim 6$ 的擺法也無法給出。我們會問, 接下去的情況又如何? 結論是:

兩個1、兩個2、$\cdots$、兩個 n 排成一行使得任兩個數 k 之間夾著 k 個數 $(1 \le k \le n)$ 的擺法, 當 $n = 4m+1$ 或 $n = 4m+2$ 時不存在。

這裡的結論顯然蘊含“以4爲周期”(周期4會在許多問題中遇到) 的概念, 今簡證如下。

設第一個 k 排在 a_k 位, 第二個 k 排在 b_k 位, 則 $b_k - a_k = k+1 \quad (1 \le k \le n)$. 兩邊求和有:

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n}(k+1), \tag{$*$}$$

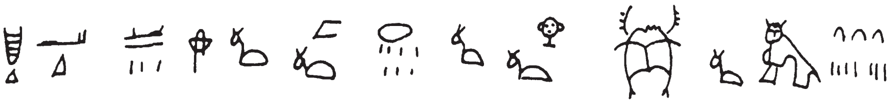
而 $$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{n}(b_k + a_k) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{2n} k - 2\sum_{k=1}^{n} a_k = n(2n+1) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

且 $$\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2}n(n+3).$$

容易驗證: $n=4m$ 或 $4m+3$ 時, $(*)$式兩邊奇偶性相同; $n=4m+1$ 或 $4m+2$ 時, $(*)$式兩邊奇偶性不同。

3. 四次以下代數方程有公式解

早在三千多年以前, 古埃及人已開始研究某些方程問題, 並把它們記在紙草 (一種可用來書寫的草葉) 上, 如圖



它表示方程

$$x\Big(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\Big)=37.$$

據載, 古代巴比倫人也已知道某些特殊的一元二次和三次方程的解法。

我國兩千多年前的數學書「九章算術」中也有方程一章, 專門研究一次聯立方程組。

一元二次方程的一般解法, 即求根公式是9世紀中亞學者阿爾 · 花拉子米 (Al-Khowarizmi) 給出的, 用當今數學符號可表示爲:

方程 $ax^2+bx+c=0\ \ (a\neq 0)$ 的兩個根爲

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

周公作九章之法, 以教天下圖。

人們在探得一元二次方程求根公式之後, 便著手三、四次、$\cdots$ 甚至更高次方程的求根公式的尋求。

1545年意大利人卡爾達諾 (G. Cardano) 在其所著「大法」書中給出了一元三次方程求根公式, 人稱“卡爾達諾公式”, 其實它的發現者當爲塔塔利亞 (N. Tartaglia), 關於他們的故事, 可從有關數學史上查找[7],[8]。公式的描述是這樣的:

方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ \ (a\neq 0)$ 通過變量代換可化爲: $x^3+Px^2+Qx+R=0$, 再令 $x=y-\frac{1}{3}P$ 可得 $y^3+py+q=0$, 其中 $p=-3ab$, $q=-a^2-b^2$. 由因式分解, 則方程 $y^3+py+q=0$ 的三個根:

$$y_k=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}\ \omega_1^k+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}\ \omega_2^k\quad(k=0,1,2),$$

其中 $\omega_1 = \dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, $\omega_2 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)$.

卡爾達諾的學生費拉利 (L. Ferrari) 沿用其老師的方法給出了一元四次方程的求根公式: 方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 兩邊加 $(ax+b)^2$ 後配方化爲

$$x^4+px^3+(q+a^2)x^2+(r+2ab)x+b^2=(ax+b)^2,$$

令式左爲 $(x^2+\frac{p}{2}x+k)^2$ 形式, 展開比較係數消去 a, b, 整理得

$$8k^3-4qk^2+2(pr-4s)k-p^2s+4qs-r^2=0,$$

解上三次方程得 k 的一個實根。又因 $(x^2+\frac{p}{2}x+k)^2=(ax+b)^2$, 故上四元方程的根可由

$$x^2+(\frac{p}{2}+a)x+(k+b)=0 \text{ 和 } x^2+(\frac{p}{2}-a)x+(k-b)=0$$

兩個二次方程解得。

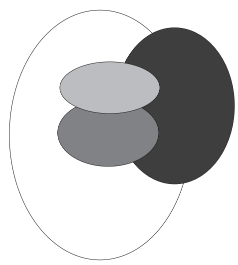
此後人們便開始尋求一元五次及五次以上方程的公式解。300餘年過去了, 人們仍是一無所獲, 這其間不少數學精英都爲此付出過心血和汗水。當人們從正面努力而使終未果後, 有人開始從反面考慮它——或許這種公式並不存在。

問題的否定解決是由挪威數學者阿貝爾 (N. H. Abel) 和法國數學家伽羅華 (É. Galois) 共同完成的, 且由此問題的研究導致一門新的數學分支——“群論”的誕生。

至此, 一元 n 次方程求根公式的討論終結。

4. 四色定理

平面或球面上的地圖只須4種顏色即可將圖上任何兩相鄰區域分開。顯然, 顏色少於四種不行 (見右圖)。



需要四種顏色區分的地圖。

這個問題最早由德國數學家莫比烏斯 (A. F. Möbius) 於 1840 年發現[6], 但未能引起人們重視。

1852年英國學生弗蘭西斯 (G. Francis) 向其兄弗利德克 (G. Frederick) 再次提出該問題, 後者請教了他的老師德 · 摩根, 德又請教於學者哈密頓 (W. R. Hamilton), 他們均不能解答。

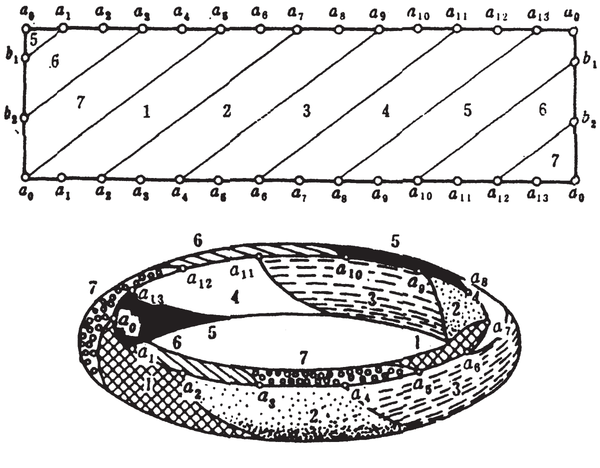
1878年, 數學家凱萊 (A. Cayley) 正式向倫敦數學會提出這一問題, 人稱 “四色猜想”。1879年, 肯普 (A. B. Kempe) 給出了猜想的第一個證明。次年, 希伍德 (P. J. Heawood) 發現該證明有誤, 同時他給出了 “五色猜想” (染色數爲5) 的證明。此前 (1880年), 塔特 (P. G.

Tait) 也對 "四色猜想" 給出一個證明, 直至1946年才因加拿大數學家圖特 (W. T. Tutte) 構造出反例後否定了塔特的證明。

至1975年止, 人們僅對區域數爲有限的情形給出了證明 (見下表):

年份	證　明　者	區域數
1939	P. Pranklim	≤ 22
1956	C. E. Winn	≤ 36
1975	O. Ore	≤ 52

其間, 值得一提的是: 問題研究的重大進展是漢斯 (Heesch) 發展了排除法以尋找可約構形的不可避免集, 這爲利用計算機去證明該定理奠定了基礎。1976年美國人阿佩爾 (K. Appel)、黑肯 (W. Haken) 和庫克 (J. Koch) 在計算機上花1260小時 (機上時間), 進行60億個邏輯判斷, 終於證得 "四色猜想"。順便講一句, 早在球面或平面上 "四色猜想" 證明之前, 希伍德已證得環面上地圖的 "七色問題"[8]。

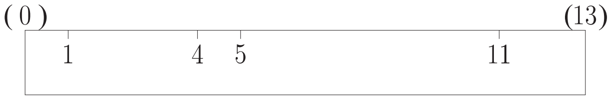


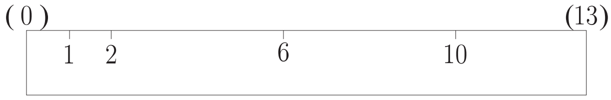
環面上需七種顏色區分的 "地圖"。

5. 只需四個刻度

20世紀初英國遊戲大師杜丹尼 (H. E. Dudeney) 曾指出: 一根13cm 的尺, 要想完成 1 $\sim$ 13的任何整數 cm 長的度量 (下稱完整度量), 至少要有幾個刻度?

答案是四個, 且有兩種, 它們分別是刻度刻在1、4、5、11cm 處或1、2、6、10cm 處。





我們用 $a \to b$ 表示從刻度 a 量到 b, 對於第一種刻度的具體完整度量分別爲:

$1(0 \to 1)$、$2(11 \to 13)$、$3(1 \to 4)$、$4(0 \to 4)$、$5(0 \to 5)$、$6(5 \to 11)$、$7(4 \to 11)$、$8(5 \to 13)$、$9(4 \to 13)$、$10(1 \to 11)$、$11(0 \to 11)$、$12(1 \to 13)$、$13(0 \to 13)$。

這類問題稱爲 "省刻度尺問題"。

杜丹尼還指出: 一根22cm 的直尺只需六個刻度, 即分別在: 1、2、3、8、13、或 1、4、5、12、14、20cm 處刻上刻度, 即可完成完整度量。

上個世紀80年代日本人騰村幸三郎指出: 23cm 的直尺的完整度量所需刻度亦爲六個: 1、4、10、16、18、21cm 處有刻度即可。

1956 年約翰 · 李奇 (J. Leech) 在「倫敦數學會雜誌」上撰文指出: 一根36cm 長的尺, 僅需在 1、3、6、13、20、27、31、35cm 處有八個刻度即可完成 $1 \sim 36$cm 長的完整度量。

前蘇聯的拉巴沃克在其所著「消遣數學」中指出: 一根40cm 長的尺只需在1、2、3、4、10、17、24、29、35cm 處刻上九個刻度即可完成 $1 \sim 40$cm 長的完整度量。

而後有人指出: 九個刻度的省刻度尺度量範圍可擴至50cm, 其刻度分別爲: 1、3、6、13、20、27、34、41、45、49 或 1、2、3、23、28、32、36、40、44、47cm 等處。

接下來的情況如下表所開列:

度量範圍	刻度數	刻　　度
$1 \sim 58$	11	1、2、3、27、32、36、40、44、48、52、55
		1、2、6、8、17、26、35、44、47、54、57
		1、5、8、12、21、30、39、45、50、51、52
$1 \sim 67$	12	1、2、6、8、13、17、26、35、44、53、56、63、66
		1、5、8、12、21、30、39、48、57、66、71、72、74

遺憾的是: 這類問題的一般情形至今未能得到, 儘管該問題與「圖論」中 "完美標號" 問題有聯繫。該問題的一般情形是:

(1) n cm 長的尺至少要有多少個刻度才能完成 $1 \sim n$ cm 的完整度量;

(2) 有 k 個刻度的尺至多能在多大範圍實現完整度量。

此外, 人們還研究了長尺、短度量 (即尺長 m, 刻度數 k, 去實現 $1 \sim\ n(n<m)$ 的完整度量) 問題。比如有下面的結論:

尺長	刻度數	度量範圍	刻　　度
24	5	$1 \sim 18$	2、7、14、15、18
25		$1 \sim 18$	2、7、13、16、17
31		$1 \sim 18$	5、7、13、16、17 或 6、10、15、17、18
39	6	$1 \sim 24$	8、15、17、20、21、31

“省刻度尺” 在「圖論」中稱為格勞姆 (S. W. Golomb) 尺, 它在 X 射線、晶體學、雷達脈沖、導彈控製、通訊網路、射電天文學等領域皆已找到應用。

6. $4/n\,(n \geq 4)$ 表成單位分數

1955年埃爾德什 (P. Erdös) 的好朋友格雷厄姆 (R. L. Graham) 向他推荐「美國數學月刊」上的一個問題:

任何一個分母爲奇數的非單位分數 (單位分數即分子是1的分數, 又稱埃及分數) 皆可表示爲分母都是相異奇數的單位分數之和。

格雷厄姆對它很感興趣, 但他又不拘於此, 而是轉而去考慮 “分數表爲分母是相異整數平方 (完全平方數) 的單位分數之和” 問題, 例如:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{54^2}+\frac{1}{112^2}+\frac{1}{640^2}+\frac{1}{4302^2}+\frac{1}{10080^2}+\frac{1}{24192^2}\\ +\frac{1}{40320^2}+\frac{1}{120960^2},\end{aligned}$$

同時, 他還證明了在某些範圍內有有限多的分數可以這樣表示。進而埃爾德什則提出將分數表示成分母更高次冪的問題。此外, 埃爾德什又提出猜測:

$\dfrac{4}{n}$ 當 $n \geq 4$ 時皆可示成三個相異單位分數之和。

換言之, 該命題等價於:

不定方程 $\dfrac{4}{n}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ 當 $n \geq 4$ 時總有相異整數解。

莫德爾 (Mordell) 證明除了與模840同餘於 1^2、11^2、13^2、17^2、19^2、23^2 之外的所有整數結論成立 [9]。此外這一猜想經不少人驗證結論局部成立, 比如下表中列舉的一些結果:

驗 證 者	n 成 立 的 範 圍
Straus	$n < 5000$
Shapiro	$n < 8000$
Obláth	$n < 20000$
Yamamoto	$n < 106128$
Franceschine	$n < 10^7$, $n < 10^8$

1957年波蘭數學家謝爾品斯基 (W. Siepinski) 考慮過方程

$$\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

相異解 x,y,z的問題。斯特瓦特 (Stewart) 驗證至 $n \leq 1057438801$ 時結論眞。

1970年 R. C. Vaughen 證明: 對任一給定的 m, 方程

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

對幾乎所有的 n 有相異解 x,y,z.

7. 自然數表為四個平方數和

任何自然數皆可用四個完全平方數和表示:

$$m=a^2+b^2+c^2+d^2,$$

三個則不夠 (如15的表示等), 五個則有多餘。這個結論早在兩千多年前已爲古希臘數學家刁番圖 (Diophantus) 發現, 但直到1770年才由法國數學家拉格朗日 (J. L. Lagrange) 嚴格證明。該問題相關背景及其推廣情形請見 [4]。

8. 四元數

人們知道: 實數是一元數, 複數是二元數 (表爲 $a+bi$ 形式)。複數概念能否再推廣? 這是長期困擾愛爾蘭數學家哈密頓 (W. R. Hamilton) 的一道難題。因朝思暮想, 當靈犀偶致時, 果然功夫不負——他竟會在一次飯後散步中 (1843年10月16日) 發現了四元數, 它是形如 $a+bi+cj+dk$ 形式的數, 它也是滿足乘法結合律的元數最高的超複數 (八元數雖存在, 但其不滿足乘法結合律)。這個問題的詳細介紹請見 [4]。

9. 方程 $X^4+Y^4+Z^4=W^4$ 的解

1753年數學大師歐拉 (L. Euler) 在證明了 $n=3,4$ 時, 費馬 (P. de Fermat) 猜想 “$x^n+y^n=z^n$ 當 $n\geq 3$ 時無非平凡 (非顯明) 整數解” 成立後, 提出

$$X^4+Y^4+Z^4=W^4$$

無非零整數解的猜測。人們一直不曾懷疑它的正確性。但到了1987年情況突然有變, 是年埃裡克斯 (N. Elkies) 在研究其他數學問題時發現等式:

$$2682440^4+15365639^4+1879670^4=20605673^4,$$

從而否定了歐拉的上述猜想。而後, 弗耶 (R. Frye) 又給出一個更精彩的例子:

$$95800^4+217519^4+414560^4=422481^4,$$

它顯然比前例中的數小了許多。這方面的介紹也請見 [5]。

順便講一句, 這種形式的等式還與另一個問題——勾股數推廣有點類同, 即求滿足

$$a^2+b^2+c^2=d^2 \tag{$**$}$$

的整數組(這裡要求非平凡解即非顯明解)。

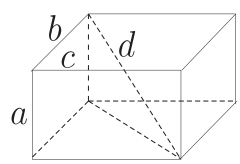
其實, 這種解有無窮多組, 它的一般表達式可由下式給出:

$$a=\frac{1}{n}(l^2+m^2-n^2),\quad b=2l,\quad c=2m,\quad d=\frac{1}{n}(l^2+m^2+n^2),$$

其中 $n\mid m^2+n^2$, 且 $n<\sqrt{l^2+m^2}$, 這裡 m,l 爲自然數。

公式是由波蘭人謝爾品斯基 (W. Sierpinski) 於1964年發現的, 據稱日本人林永良弼此前也曾給出過類似的表達式 [6]。

($**$)式的幾何意義是明顯的: 求稜長 a、b、c 皆爲整數的長方體, 使其 (體) 對角線長 d 亦爲整數。



這類問題更深入的討論可見 [7] (比如再涉及長方體面對角線爲整數的問題等的問題)。

例子舉到這兒, 其實數學中涉及4的有趣的論題還有許多, 限於篇幅, 先談到這裡, 倘有機會我們再作介紹。

参考文獻

1. 吳振奎, 說3, 數學傳播, 30卷2期, 民95年6月, 81-90。

2. 平山諦 (代欽譯), 東西數學物語, 上海教育出版社, 2005, 375-379。
3. 吳振奎, “24點” 問題的終結, 智力, 9(2004), 22-23。
4. 吳振奎, 幾個與形數有關的問題, 數學傳播, 29卷1期, 民94年3月, 64-74。
5. 吳振奎, 數學大師們的偶然失誤, 數學傳播, 28卷3期, 民93年9月, 69-82。
6. 沈康身, 歷史數學名題欣賞, 上海教育出版社, 2002, 810-812; 433-435。
7. 吳振奎, 吳旻, 數學的創造, 上海教育出版社, 2003, 82-95。
8. 吳振奎, 吳旻, 數學中的美, 上海教育出版社, 2002, 44-46。
9. P. K. 蓋伊著, 張明堯譯, 數論中未解決的問題, 科學出版社, 2003, 202-203。
10. 凌啓渝, 數學遊戲, 天津科學技術出版社, 1983, 104-105。

—本文作者任教於中國天津商學院—