數學傳播 30卷4期, pp. 62-68

無尺作圖

朱 哲

1. 從尺規作圖到無尺作圖

從西元前三世紀歐幾理得「原本」誕生, 直到十八世紀, 歐氏幾何在幾何領域一直是一統天下。但「原本」研究的只是用圓規和直尺畫出的圖形。在尺規作圖中, 利用直尺和圓規可以完成下列操作:

第一條操作, 過兩點作一直線;

第二條操作, 已知圓心和半徑作一圓;

第三條操作, 作直線與直線、直線與圓、圓與圓的交點 (若交點存在)。

如果我們作以下約定:

1. 平面中兩點 A, B 可表示直線 (線段)AB 或射線 AB(BA);
2. 平面中不在同一直線上的三點 A, B, C 可表示 ΔABC 或 $\angle ABC(\angle ACB, \angle CAB)$;
3. AB 上取一點 C 指若聯接 AB 時, 點 C 在直線 (線段) AB 上;
4. AB 與 CD 相交於 E 指若分別聯接 A 和 B, 以及 C 和 D 時, E 爲兩直線 (線段) 的交點;
5. AB 與圓 (弧) ω 交於 C 指若聯接 AB 時, AB 與 ω 交於點 C。

那麼, 尺規作圖中的第一條操作可以取消; 第二條操作不變; 對於第三條操作, 只要找出兩線交點與圓線交點的無尺作法, 我們即可得出結論: 凡是用圓規和直尺能完成的歐氏幾何作圖問題, 都能只用圓規完成 (即無尺作圖)。而這個過程是可以完成的。事實上, 無尺作圖的實現方法通常是將尺規作圖的問題及其作法, “翻譯”成只用圓規作圖的問題及其作法: 根據約定, 將問題中條件“翻譯”成不用直尺作圖的條件; 保留作法中不涉及直尺的部分; 將作法中涉及直尺的部分, 用相應的替代操作, “翻譯”成不用直尺的操作。

1797 年義大利人馬薛勞尼 (Mascheroni) 出版了「圓規的幾何」一書, 在書中他說明只用圓規就可以作出一切能用圓規和直尺作出的點。無需直尺而又不納入任何新的操作就可以作圖這一驚人的結論曾使馬薛勞尼名躁一時, 但到 1927 年, 人們發現這件事在歐克裏德斯「Danicus」一書中由莫爾 (D. G. Mohr) 於1672年指出過。[1] 他們的方法我們不得而知。不過, 文

[2]~[4] 作了探討, 文 [2] 中兩線交點和圓線交點這兩個作圖使用圓規的次數分別約爲300次和200次, 文 [3] 簡化爲66次和83次, 文 [4] 在此基礎上進一步簡化, 僅需14次和19次即可完成。但依然存在著進一步簡化的可能。

2. 兩線交點和圓線交點的無尺作法

在探討兩線交點和圓線交點的無尺作法之前, 我們先來看等腰梯形的一個性質。

在圖1中, 四邊形 $ABCD$ 是等腰梯形, $AD=a, AB=b, BD=c, CD=d$。過 D 作 AB 邊上的高 DE, 則在 ΔBDE 中, $DE^2=BD^2-BE^2=c^2-\left(b-\frac{b-d}{2}\right)^2=c^2-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2$; 在 ΔADE 中, $DE^2=AD^2-AE^2=a^2-\left(\frac{b-d}{2}\right)^2$。則 $c^2-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2=a^2-\left(\frac{b-d}{2}\right)^2$, 整理得 $bd=c^2-a^2$。

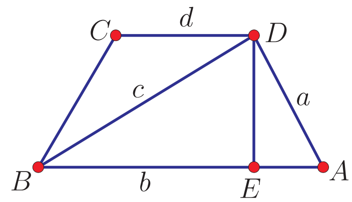


圖1

由此我們給出以下引理。

引理: (圖2) 在 $\Delta ABC, \Delta AB'C$ 和 $\Delta AB''C$ 中, 若 $AB=CB'=CB''=c$, $CB=AB'=AB''=a$, $c>a$, $AC=b$, $BB'=d$, $BB''=d_1$, 且 B 和 B' 在 AC 的同側, B 和 B'' 在 AC 的異側。則

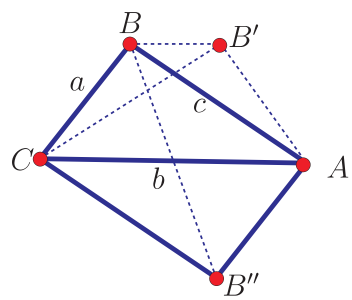


圖2

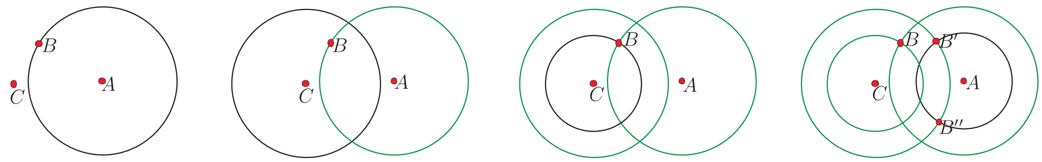
$$d=\frac{(c^2-a^2)}{b}, \tag{1}$$

$$d_1^2=2a^2+2c^2-b^2。 \tag{2}$$

證明: 對於公式 (1), 我們在上文等腰梯形的性質中已作了證明, 下面證明公式 (2)。連結 $B'B''$, 易知 $B'B''\perp AC$, $B'B''\perp BB'$, 所以 $BB''^2=BB'^2+B'B''^2$。$d_1^2=d^2+4\Big[a^2-(\dfrac{b-d}{2})^2\Big]=d^2+4a^2-b^2+2bd-d^2=4a^2-b^2+2(c^2-a^2)=2a^2+2c^2-b^2$。

根據引理, 我們可以由三角形的三邊 a,b,c, 作出線段 d 與 d_1, 具體作法如下。

作法: (圖3) 以 C 爲心, AB 爲半徑作圓; 以 A 爲心, BC 爲半徑作圓; 兩圓交於 B 和 B''。作出兩個距離 d 和 d_1, 分別滿足式 (1) 和式 (2)。



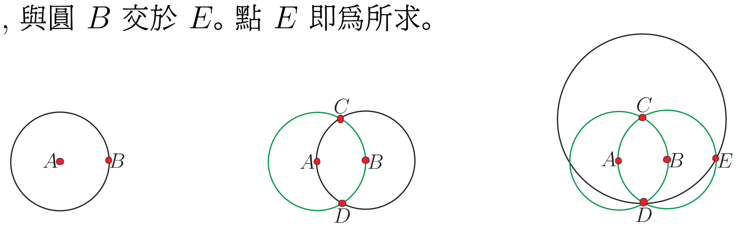
(1)　　(2)　　(3)　　(4)

圖3

說明: 此處使用圓規4次。

作圖1: 已知 AB, 在 AB 之外, 求作 AB 上的一點 E, 使 $BE=AB$。

作法: (圖4) 以 AB 爲半徑, 分別以 A 和 B 爲心作圓, 兩圓交於 C 和 D; 以 C 爲心, CD 爲半徑作圓, 與圓 B 交於 E。點 E 即爲所求。



(1)　　(2)　　(3)

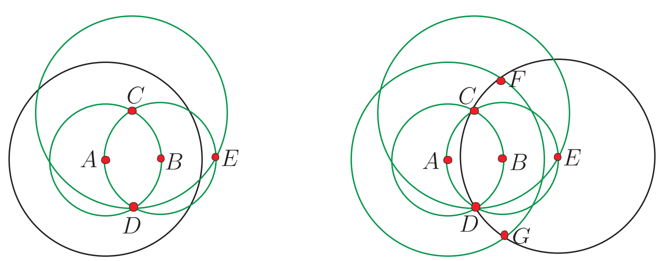
圖4

證明: 在圓 A 和圓 B 中, 易知 $AB=BC=AC=BD=AD$, $CE=CD=\sqrt{3}AB$。在 ΔBCE中, 由 $BC=BE=AB$, $CE=\sqrt{3}AB$, 利用餘弦定理, $\cos\angle BCE=\frac{BC^2+CE^2-BE^2}{2BC\cdot CE}=\frac{1+3-1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\angle BCE=30°$。則 $\angle ACE=90°$。故 AE 是圓 B 的直徑, $AE=2AB$, $BE=AB$。

說明: 此處使用圓規3次。

作圖2: 已知 AB, 求作 $\sqrt{2}AB$。

作法: (圖5) 在圖4基礎上, 再以 CD 爲半徑, 分別以 A 和 E 爲心作兩圓, 交於 F 和 G。則 BF 與 BG 均爲所求之 $\sqrt{2}AB$。



(1)　　(2)

圖5

證明: $\because AB = BE$, $AF = EF$, $\therefore FB \perp AB$, 同理 $GB \perp AB$。在直角 ΔABF 和直角 ΔABG中, $AF = AG = CD = \sqrt{3}AB$, 故由畢氏定理得 $BF = BG = \sqrt{2}AB$。

說明: 此處使用圓規5次。

作圖3: 已知線段 a 和 b, 求作線段 y, 使滿足 $y = \dfrac{a^2}{b}$。

作法: 在引理中, 令 $c = \sqrt{2}a$, 則 $d = \dfrac{a^2}{b}$。

說明: 作 $\sqrt{2}a$ 使用圓規5次, 再作 $d = \dfrac{a^2}{b}$ 使用圓規4次, 共使用圓規9次。

作圖4: 求作 AB 和 CD 的交點 Q。

作法: 1. (圖6) 以 A 爲心, AC爲半徑作圓, B 爲心, BC 爲半徑作圓, 兩圓交於 C'; 以 C 爲心, CC' 爲半徑作圓, D 爲心, DC' 爲半徑作圓, 兩圓交於 C''; 以 C' 爲心, $C'C$ 爲半徑作圓, C'' 爲心, $C''C$ 爲半徑作圓, 兩圓交於 C'''。

2. 令 $CC' = a$, $CC''' = b$, 作 $y = \dfrac{a^2}{b}$(作圖3)。

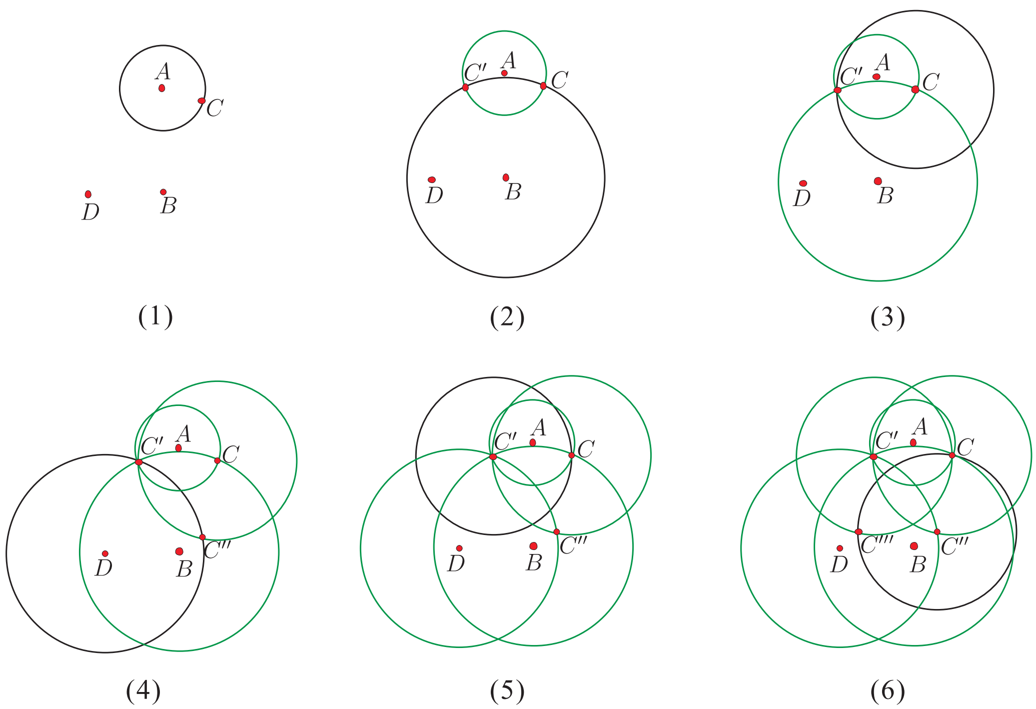
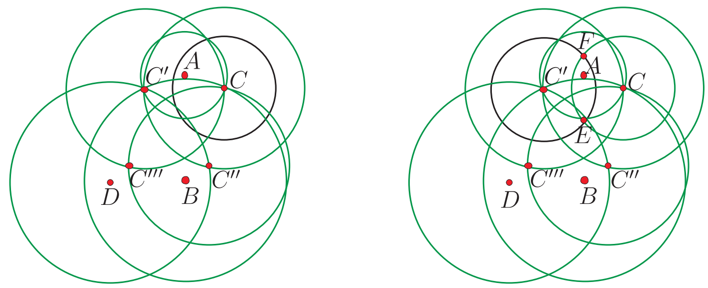


圖6

3. (圖7) 在圖6基礎上, 分別以 C, C' 爲心, y 爲半徑作圓, 兩圓交於 E, F。其中位於 CD 上的 E 即爲所求之 Q。



(7) (8)

圖7

說明: (圖8) $\Delta CC'C'''$ 與 $\Delta CEC'$ 是兩個相似的等腰三角形, $CC' = C'C''' = a$, $CC''' = b$, $CE = C'E = \dfrac{a^2}{b}$。$AB$ 是 CC' 的中垂線, 而 $CE = C'E$, 故 E 在 AB 上; CD 是 CC'' 的中垂線, 而 $C'C''' = C''C'''$, 故 C''' 在 CD 上; 又 E 在 CC''' 上, 故 E 在 CD 上。所以, E 是 AB 與 CD 的交點 Q。

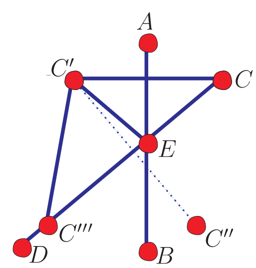


圖 8

說明: (1) 完成以上操作, 共需使用圓規14次。

(2) 如果交點在四邊形 $ABCD$ 外部, 也可先由作圖1等距延長 AB 和 CD。若干次等延後, $A'B$ 和 $C'D$ 的交點在四邊形 $A'DBC'$ 內部 (圖9), 這個交點同時也是 AB 和 CD 的交點。

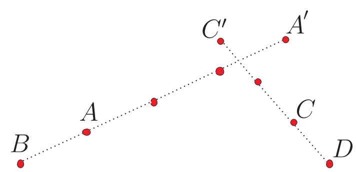
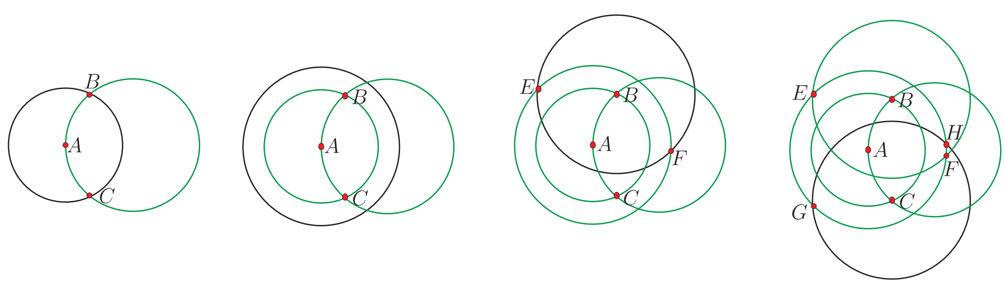


圖 9

作圖5: 已知圓周 (或弧), 求其圓心。

作法: (圖10) 在圓上任取一點 A, 適當長爲半徑作圓, 交圓於 B, C; 再以適當長爲半徑, 分別以 A, B, C 爲心作圓, 圓 A 與圓 B 交於 E, F, 圓 A 與圓 C 交於 G, H。作 EF 與 GH 的交點, 即爲圓心 O。



(1) (2) (3) (4)

圖10

證明: $\because AE = BE = AF = BF$, $\therefore EF \perp AB$。同理 $GH \perp AC$。則 EF 與 GH 的交點即爲圓心。

說明: 完成以上操作, 共需使用圓規16次。

作圖6: 已知直線 (線段) AB 和圓 (弧) O, 求作 AB 與 O 的交點。

作法:

(1) 若圓心未知, 先作出圓心 O(作圖5)。

(2) 若 AB 不過圓心 O, 則: (圖11) 以 A 爲心, AO 爲半徑作圓, 以 B 爲心, BO 爲半徑作圓, 兩圓交於 O'; 以 O' 爲心, 圓 O 半徑爲半徑作圓, 交圓 O 於E, F。E, F 即爲所求。

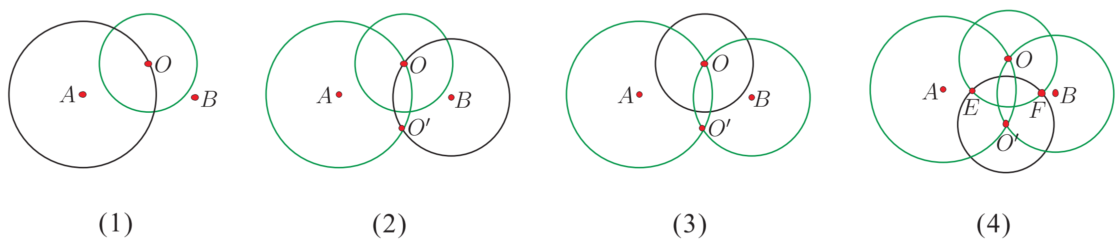


圖11

(3) 若 AB 過圓心 O, 令圓 O 半徑爲 q, AO 長爲 p, 則:

1. 作 $\sqrt{2}q$。
2. 在引理中令 $a = b = q$, $c = \sqrt{2}q$, 則 $d_1 = \sqrt{5}q$。
3. 引理中令 $a = \sqrt{2}q$, $b = c = p$, 則$d_1 = \sqrt{4q^2 + p^2}$。
4. (圖12) 等延 AO 至 C, 分別以 A, C爲心, $\sqrt{4q^2 + p^2}$ 爲半徑作圓, 兩圓交於 D, E; 以 D (或 E) 爲心, $\sqrt{5}q$ 爲半徑作圓, 交圓 O 於 F, G。F, G即爲所求。(B 點的位置在作圖中無關緊要, 故略去。)

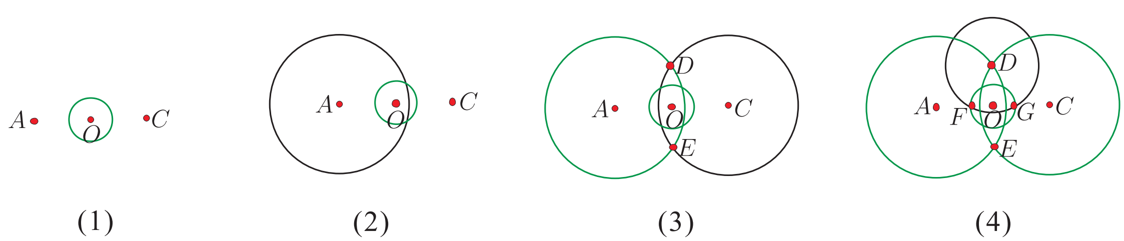


圖12

證明:

(1) 若 AB 不過圓心 O : $AO = AO'$, $EO = EO'$, 則 $AE \perp OO'$, 同理 $BF \perp OO'$。又 $AO = AO'$, $BO = BO'$, 則 $AB \perp OO'$, $\therefore A, E, F, B$ 四點共線。E, F 在 AB 上, 又在圓 O 上, $\therefore E, F$ 是圓 O 與 AB 的交點。

(2) 若 AB 過圓心 O : (圖13) 易知 ΔAOD 是直角三角形。在 ΔAOD 中, $AO=p$, $AD=\sqrt{4q^2+p^2}$, 則 $OD=2q$; 在 ΔDOF 中, $OF=q$, $OD=2q$, $DF=\sqrt{5}q$, $OF^2+OD^2=DF^2$, 故ΔDOF 是直角三角形, 所以 F 在 AO 上; 同理, G 在 OC 上。又 F,G 在圓 O 上, 所以 F,G 是圓 O 與 AB 的交點。

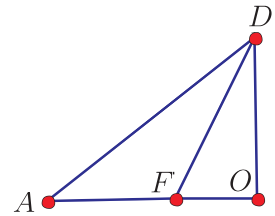


圖13

說明: 在這一作圖中, 完成 (1), (2) 兩項操作, 共需使用圓規19次; 若圓心已知, 完成操作 (2) 僅需使用圓規3次。完成操作 (3), 共需使用圓規14次。

3. 無尺作圖在中學數學中的應用及教育價值

無尺作圖進入中學數學教學, 可以從以下幾方面入手: 把尺規作圖下歐氏幾何中的公理、定理、性質等等“翻譯”成無尺幾何中的等價命題; 用圓規作出一些尺規作出的圖形; 將一些煩瑣冗長的作圖步驟簡化; 將這些作法編程, 使電腦可以根據這些程式畫出圖形; 等等。把無尺作圖帶進中學數學領域, 也是培養學生動手“做數學”(doing mathematics) 的好機會。可以在課堂上或興趣小組活動中把無尺作圖介紹給學生, 也可以作爲探究課題, 拓寬視野, 拓展思路。這一活動有豐富的教育價值: 可以從傳統幾何內容引出新的數學觀念, 有利於演算法在中學數學教學中的滲透, 有利於學生數學思維的訓練, 有利於學生數學學習興趣的激發和培養。對於這些教育價值的具體論述, 有興趣的讀者可以參閱文 [5]。

這一活動也讓我們對“數學教育現代化”有一新的認識, 並不是說一定要把現代數學的新內容、新思想在數學課程中體現出來; 我們可以對傳統的數學內容進行改造, 賦予新的生命, 讓它以一種全新的形式呈現在學生面前, 借此來培養學生的數學思維能力和創新能力。

参考文獻

1. (丹麥)A. 艾鮑, 周民強譯, 早期數學史選編, 北京: 北京大學出版社, 1990, 91。
2. 楊玉瓚, 無尺作圖, 西北大學學報 (自然科學版), 1999, 29(3), 199-204。
3. 楊力能, 穆玉傑, 無尺作圖的基礎作圖體系的簡化, 純粹數學與應用數學, 2001, 17(4), 302-308。
4. 朱哲, 王凱華, 兩圓交點和圓線交點的無尺作法, 中學教研 (數學), 2004(8), 28-30。
5. 朱哲, 東洪平, 無尺作圖的教育價值, 中學教研 (數學), 2005(8), 25-27。

—本文作者任教於浙江師範大學數理學院—