數學傳播 30卷4期, pp. 34-47

我們可以聽出鼓的形狀嗎?

Peter Greiner 演講 · 蔡亞倫 整理

如果將一片薄膜Ω固定其邊界Γ並使其運動, 在垂直於原始平面方向上的位移 $F(x_1, x_2; t) = F(x, t)$, 會滿足波動方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}\Big) = c^2 \Delta F,$$

其中 c 是一物理常數, 只跟薄膜的物理性質與使其產生運動的張力有關。我們可以選擇適當單位使得 $c^2 = \frac{1}{2}$。

數學家及音樂家感興趣的是形如

$$F(x; t) = U(x)e^{i\omega t},$$

的解。此解是時間變數的調和函數, 代表此薄膜可以產生的“純音”。這樣的解滿足

$$\frac{1}{2}\Delta U + \omega^2 U = 0,$$

並且因爲薄膜在邊界是固定的, 因此也滿足邊界條件: 在 Γ 上 $U = 0$。證明薄膜可以產生離散範圍的純音; 換句話說, 就是證明有一離散的數列 $\omega_1 \le \omega_2 \le \omega_3 \le \cdots$ 使得

$$\frac{1}{2}\Delta U + \omega^2 U = 0$$

在 Γ 上 $U = 0$ 的非零解存在是十九世紀數學物理的重大問題之一。Poincaré 和其他人都曾經致力於解決此問題。

離散分布的純音的存在性後來是在二十世紀初期使用當時還是新領域的積分方程的理論證明的。精確的說, 存在一離散的數列 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \cdots$, 稱作“特徵值”, 以及相對應的“函數 $\psi_n(x)$”, 使得下列式子滿足:

$$\frac{1}{2}\Delta\psi_n + \lambda_n\psi_n = 0$$

在 Γ 上 $\psi_n = 0$。我們可以讓 ψ_n 正規化, 即 $\int_\Omega \psi_n^2 = 1$。

現在我可以重新陳述我們的問題爲: 已知 Ω_1 和 Ω_2 是平面上的兩個區域, 分別以 Γ_1 和 Γ_2 爲邊界, 考慮下列兩組特徵值問題:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2}\Delta U_n + \lambda_n U_n = 0 \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 裡} \\ \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上 } U_n = 0, \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} \frac{1}{2}\Delta V_n + \mu_n V_n = 0 \text{ 在 } \Omega_2 \text{ 裡} \\ \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上 } V_n = 0; \end{array}$$

假定對每一個 n, $\lambda_n = \mu_n$, 那麼在平面上 Ω_1 和 Ω_2 是一致的嗎?

換句話說, 我們可以由知道所有的特徵值從而決定出鼓的形狀嗎? Mark Kac 首先從 Salomon Bochner 那裡聽到這個問題, 之後 Lipman Bers 將它敍述成下列的形式: "意思是說, 如果你有完整的音調, 你可以描述你所聽到的鼓的形狀嗎:? "

Kac 的論文於1966年發表。在1964年, John Milnor 構造出兩個不同構的16維度 Tori, 而兩者的 Laplace-Beltrami 算子皆有完全一致的特徵值。因此, 我們沒有辦法光從特徵值來區別鼓的形狀。另外一個實際的問題是, 我們可能沒有辦法分辨出所有的特徵值, 所以人們研究它們漸進的行爲, $\lambda_n \to \infty$。

到底這些問題源自何處呢? 在1910年的十月, 荷蘭物理學家 Hendrik Lorentz 在 Gottingen 發表 Wolfskehl 演說。順帶一提, Wolfskehl 贊助獎金給證明或反證費瑪定理的人, 並且規定萬一獎金沒有頒出, 這筆錢的孳息將用於邀請傑出科學家到 Gottingen 來演講。Lorentz 給了五個演講, "物理中的新問題與舊問題", 就在第四次演講他說: "我以下面的數學問題做爲本次的結尾, 這個問題可能將引起在座數學家的興趣。它源於 Jeans 的輻射理論。" 簡單扼要的說, 他從物理的觀點上提出下列公式:

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda.$$

其中 $N(\lambda)$ 表示小於 λ 的特徵值個數, $|\Omega|$ 表示 Ω 的面積, 而 $\sim$ 意思是 $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}$。一年之後, 當年出席 Lorentz 演說的 Herman Weyl 用 Hilbert 積分方程理論證明了這一猜想。Hilbert 原本認爲 Lorentz 的猜想不會在他有生之年被證明出來的。這個公式的成立顯示我們可以聽出一個鼓的面積。

1954年, 瑞典數學家 Åke Pleijel 證明下列式子:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}, \qquad \text{當 } t \to 0.$$

這裡 L 代表 Γ 的長度。我們注意到左邊項是熱核 (Heat Kernel) 的 Trace:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)^2 dx,$$

而 $P_t(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\varphi_n(y)$ 是熱核。

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{2}\Delta\Big)\int_0^t ds\int_\Omega P_{t-s}(x,y)dy=I,$$

則是單位算子。Pleijel 的結果證明我們可以聽出一個鼓的周長。

值得注意的是, 這表示如果一個鼓所有的頻率跟一個圓形鼓的頻率相同的話, 那麼這個鼓一定也是圓形的。這是一個古典等周圓不等式的結果, 此不等式的敍述是 $L^2\geq 4\pi|\Omega|$, 等式只在圓形的時候成立。因此只透過音調, 我們可以決定鼓是否是圓形的。

Pleijel 的結果顯示對於一個簡單連通 (simply connected) 且有光滑邊界 (smooth boundary) 的鼓應該可以得到下面更精確的公式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\sim\frac{|\Omega|}{2\pi t}-\frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}+\frac{1}{6}$$

Kac 嘗試過證明此結果, 但是沒有成功。爲了得到關於此問題的一些想法, 他先假設鼓的邊界是多邊形。在那情況下他的計算證明 Pleijel 漸近的預測是正確的。假如這鼓有 h 個洞, Kac 的計算似乎暗示著

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\sim\frac{|\Omega|}{2\pi t}-\frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}+\frac{1}{6}(1-h)+O(\sqrt{t}).$$

因此我們可以聽出一個鼓的“連通性 (Connectivity)”。注意到這常數項在連續形變下是一個不變量, 因此是一拓樸不變量。

1967年, McKean 和 Singer 證明 Kac 的漸近公式, 也就是說他們證明常數項是 $\frac{1}{6}(1-h)$。當時我是一個年輕的博士生正嘗試做數學研究。特別是我想以解析的方法導出一個橢圓偏微分算子 index 的 Atiyah-Singer 公式。最終我做不到, 但是我卻爲拋物形的邊界值問題建構出一套擬微分計算法 (pseudodifferential calculus); 換句話說, 我導出一代數的過程來構造更一般的熱核。現今它被稱做是 Volterra 積分算子計算法 (Volterra integral operator calculus)。當我完成時, 我開始尋找它的應用並且找到 Kac 的論文。

爲了描述這個計算法, 我先討論 Green 函數的建構。也就是尋求邊界問題的解算子。爲了讓事情簡單一點, 我討論給定 Neumann 邊界條件的二階橢圓算子的 Green 函數。下面說的也將適用於更一般的橢圓或拋物邊界問題。給定一個函數 f, 我們找 u, 滿足

$$Pu=\sum_{j,k=1}^{n+1}a_{jk}(x)\partial_{x_j}\partial_{x_k}u=f,\quad x\in\Omega,\qquad \frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_\Gamma=0,$$

這裡 ρ 表示在 Ω 裡的 x 到 Γ 的距離。而我們要找一個函數 $G(x,y)$,

$$u(x)=\int_\Omega G(x,y)u(y)dy.$$

G 就是 Green 函數。

我們寫成

$$P = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \Delta_\Gamma,$$

其中 Δ_Γ 是正切於 Γ。假定 P 是橢圓, 也就是說

$$P(x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{n+1} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k = 0 \;\Rightarrow\; \xi = 0.$$

那麼 Δ_Γ 也是橢圓算子並且我們可以將它視爲在 Γ 上的 Laplace-Beltrami 算子。我把問題化約到構造 Δ_Γ 的反算子, 以此來構造 G。

首先, 我找到 Δ 的一個基本解 (Fundamental solution) F, 意思是說對於任意固定的 y, $\Delta F(x,y) = \delta(x-y)$。那麼

$$\Delta \int F(x,y)f(y)dy = \int (\Delta F)(x,y)f(y)dy = \int \delta(x-y)f(y)dy = f(x),$$

所以 $\omega = \int F(x,y)f(y)dy = Ff$ 是 $\Delta\omega = f$ 的一個解。讓 $v = u - Ff$, 所以在 Ω 上

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \Delta_\Gamma v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \rho}\Big|_\Gamma = -\frac{\partial (Ff)}{\partial \rho}\Big|_\Gamma = g.$$

v 是調和的, 所以 $v = e^{-\rho\sqrt{-\Delta_\Gamma}}\varphi$, 是某一在 Γ 上的函數。注意到 $\frac{\partial v}{\partial \rho}\Big|_\Gamma = -\sqrt{-\Delta_\Gamma}\varphi = g$, 因此 $\varphi = -(-\Delta_\Gamma)^{-1/2}g$。利用 gamma 函數, 我們得到 $(-\Delta_\Gamma)^s = \int_0^\infty e^{\Delta_\Gamma t}t^{s-1}\frac{dt}{\Gamma(s)}$。將這些放在一起我們得到

$$u = v + Ff = Ff + e^{-\rho\sqrt{-\Delta_\Gamma}}(-\Delta_\Gamma)^{-1/2}\frac{\partial(Ff)}{\partial \rho}\Big|_\Gamma$$

和

$$G = F + \text{kernel } e^{-\rho\sqrt{-\Delta_\Gamma}}(-\Delta_\Gamma)^{-1/2}F_\rho\Big|_\Gamma.$$

這算子的核 $e^{-\rho\sqrt{-\Delta_\Gamma}}$ 是 Poisson 核。這些公式得到所有橢圓算子的橢圓邊界值問題的 Green 函數。

什麼是 F (積分算子的核, Δ 的反算子) 呢? 什麼是 Δ 呢? 什麼是 $(-\Delta_\Gamma)^{-1/2}$ 呢? 什麼又是 $e^{t\Delta_\Gamma}$ 呢? 注意到 $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_\Gamma\right)e^{(t-s)\Delta_\Gamma} = \delta$。所以要計算 Green 函數, 只要計算微分算子的反算子就夠了。我將構造出一種機制, 能夠生產出所有橢圓和拋物形微分算子的反算子。它將能製造出基本解、熱核、波核、量子力學中的傳播者等等。我們甚至可以在電腦上做這些事情。

我先問這樣的問題: “什麼是導數? ” 讓我從 Heaviside 函數 $H(x)$ 開始,

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

我們定義 $H'(x)$ 爲滿足

$$\int_{\mathbb{R}} H'(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}} H(x)g'(x)dx=-\int_0^\infty g'(x)dx=g(0).$$

我也需要兩函數的卷積 (convolution) 作用,

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy=\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

這表示當給定一個函數 f, 我們得到一個算子 $f*$, 透過卷積來作用

$$f*: g\to f*g.$$

我們也有 Dirac 的 δ 函數, 此函數滿足

$$\begin{aligned}&\delta(x)=0, && \text{當} \quad x\neq 0,\\ &\textstyle\int_{\mathbb{R}}\delta(x)dx=1,\end{aligned}$$

所以

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}}\delta(x-y)g(y)dy,$$

並且

$$\frac{dg}{dx}=\int_{\mathbb{R}}\delta'(x-y)g(y)dy,$$

其中 δ' 的意義在於下列式子

$$\int_{\mathbb{R}}\delta'(x)g(x)dx=-\int_{\mathbb{R}}\delta(x)g'(x)dx=-g'(0).$$

因此我們可以設

$$\frac{d}{dx}=\delta' * .$$

同時注意 $H'(x)=\delta(x)$。所以導數、微分算子都是卷積算子。那他們的反算子呢?

給定 f, 要找 u, 滿足 $du/dx=f$。如果 $u(x)=\int_{\mathbb{R}}K(x-y)f(y)dy$, 那麼

$$\frac{du}{dx}=\int_{\mathbb{R}}K'(x-y)f(y)dy=f(x),$$

並且我們可以推得到 $K'(x) = \delta(x)$, 或是 $K(x) = H(x)$, 而且

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} H(x-y)f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

這是正確的。因此

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} = H * .$$

相同的, 我們可以得到

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1} = (x_+)*,$$

其中

$$x_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

最後再舉一個例子, Laplace 算子

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

它的反算子是牛頓位能

$$N(x) = -\frac{1}{4\pi|x|},$$

經由卷積, 得到

$$\Delta\Big(-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)dy}{|x-y|}\Big) = f(x).$$

因此

$$\Delta^{-1} = N * .$$

這似乎意味著微分算子和他們的反算子都是卷積算子。那又怎樣呢? 我們一開始是在尋找一個解決微分方程的方法, 也就是尋找反微分算子。到最後尋找積分算子的反算子, 這樣應該更困難。但是, 卷積算子比較特別。我們不難想到應用數學當中重要的工具之一 —— 富氏轉換:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx,$$
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

則

$$(\varphi * \psi)\wedge(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi).$$

如此經富氏轉換後空間裡的卷積算子就變成了乘積算子。而反算子就可以由倒數找到。舉個例子來說,

$$\Delta f(x)=\Delta\Big(\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi\Big)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\cdot\xi}(-|\xi|^2)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

所以在富氏轉換空間裡 Δ 變成乘以 $-|\xi|^2=(i\xi_1)^2+(i\xi_2)^2+(i\xi_3)^2$, 而它在 $\hat{f}$ 上的反算子就應該是與 $(-|\xi|^2)^{-1}$ 的乘積。這是正確的, 因爲

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(-\frac{1}{|\xi|^2}\Big)=-\frac{1}{4\pi|x|},$$

即是所要的牛頓位能。所以在富氏轉換空間裡,

$$P(\partial_x)\rightarrow\ \text{乘以}\ P(i\xi),$$

其中 $\partial_x=(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_n})$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$。在一般的情況,

$$P(x,\partial_x)=\sum_{j=1}^{m}p_j(x,\partial_x),$$

其中 $p_j(x,i\xi)$ 是 $P(x,i\xi)$ 中 $i\xi$ 的 j-階齊次多項式, 所以它的反算子的富氏轉換應有下列的形式

$$q(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}q_{-m-j}(x,i\xi),$$

其中 $q_k(x,i\xi)$ 是 $q(x,i\xi)$ 中 $i\xi$ 的 k-階齊次多項式。一個有 $q(x,i\xi)$ 符號的算子根據下面規則作用於函數上:

$$Qf(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{2n}}e^{i(x-y)\cdot\xi}q(x,i\xi)f(y)dyd\xi.$$

Q 稱作一個有 $q(x,i\xi)$ 符號的擬微分算子。我們仍然需要知道兩個擬微分算子合成後的符號。稍微證明一下, 給定兩微分算子 $P_1(x,\partial_x)$, $P_2(x,\partial_x)$ 以 $\sigma(P_1)=p_1(x,i\xi)$ 和 $\sigma(P_2)=p_2(x,i\xi)$表示各自的符號 (symbol), 他們的合成 $P_1\circ P_2$ 有下列的符號 (symbol):

$$\sigma(P_1\circ P_2)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial(i\xi)}\Big)^{\alpha}p_1(x,i\xi)\Big]\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha}p_2(x,i\xi),$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ 是一個 n 元組自然數, $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$。所以很自然的可以定義兩擬微分算子 Q_1, Q_2 合成後的符號爲

$$\sigma(Q_1\circ Q_2)=\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\Big[\partial_{i\xi}^{\alpha}p_1(x,i\xi)\Big]\partial_x^{\alpha}p_2(x,i\xi);$$

注意到當 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \to \infty$ 時, 右邊項齊次性的遞減。現在我們可以算出橢圓微分算子的反算子或是基解, 這裡橢圓意思是說他們的主要符號 (principal symbol) 沒有零點。明確地說, 令 $P(x, \partial_x)$ 有符號

$$p(x, i\xi) = p_m(x, i\xi) + p_{m-1}(x, i\xi) + \cdots .$$

因爲 P 是橢圓算子,

$$p_m(x, i\xi) \neq 0, \qquad \xi \neq 0.$$

假定

$$q(x, i\xi) = q_{-m}(x, i\xi) + q_{-m-1}(x, i\xi) + \cdots$$

代表 $Q = P^{-1}$ 的符號; 根據合成公式

$$\sigma(P \circ Q) = p_m q_{-m} + p_m q_{-m-1} + p_{m-1} q_{-m} + \sum_{j=1}^{n} (\partial_{i\xi_j} p_m) \partial_{x_j} q_{-m} + \cdots ,$$

這裡 $+\cdots$ 表示較低次的齊次項。我要得到 $\sigma(P \circ Q) = 1$。所以我應該選擇 $p_m q_{-m} = 1$, 而使其它部份相乘爲零:

$$\begin{aligned} q_{-m} &= \frac{1}{p_m}, \\ q_{-m-1} &= -\frac{1}{p_m}\Big(p_{m-1} q_{-m} - \sum_{j=1}^{n} (\partial_{i\xi_j} p_m) \partial_{x_j} q_{-m}\Big), \\ &\vdots \end{aligned}$$

這樣得到其他所有的 q_{-k} 項, 而且我們也得到 $\sigma(P^{-1})$。注意到對橢圓的 P_m, m 是偶數。如此, 我們就建構出了橢圓算子的基本解, 也就是說反算子的核。

爲了得到 Green 函數, 我們仍然需要構造高次算子 P^s。如果我們有 P 的熱核, 也就是說熱算子 $\frac{\partial}{\partial t} - P(x, \partial_x)$ 的基本解, 那我們就可以從 gamma 函數的尤拉積分得到我們要的結果。我們注意到熱算子的主要符號是

$$i\tau - p_m(x, i\xi) \neq 0, \qquad (\tau, \xi) \neq 0.$$

因此, 延續上述的過程我們就可以建構一個熱算子的擬微分算子微積分, 進而得到他們的基本解或熱核。因此我們可以找到橢圓和拋物形的邊界質問題的 P^s 和 Green 函數。

六零年代末我完成解橢圓邊界值問題的算子熱核的計算法 (calculus), 這類計算法現今被稱作 Volterra 積分算子計算法, 之後我到處尋找例子來做, 因而找到了 Kac、McKean 以及

Singer 的論文。由於我不懂機率 (McKean) 也不懂微分幾何 (Singer), 我想用我的熱核微積分來證 Kac 的猜想。經過一段冗長但明確的計算, 我的確發現

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1}{6}(1-h) + O(\sqrt{t}),$$

跟 Kac 的猜想是一樣的。這裡的常數項最是有趣。在這邊的計算當中, 這一個特別的項是由下面形式獲得的:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\Gamma K(s)ds,$$

這裡 $K(x)=y''(s)x'(s)-y'(s)x''(s)$ 是 Γ 的測地曲率, s 是弧長 (Arclength), 而 $(x(s),y(s))$ 代表 Γ。那麼 Gauss-Bonnet 公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma K(s)dx = 1-h$$

得出 Dirichlet 級數在時間很小的漸近 (small time asymptotic) 常數項。Kac 文章中最後提到下面的問題: “我們當然可以推測是否一般情況下可否聽出 Euler-Poincaré 特徵值並且引發各種有趣的問題。”

$\chi(\Omega)=1-h$ 是 Ω 的 Euler 特徵值。對於一個平面上的多邊形區域, 我們得到

$$V-E+F=1-h,$$

其中 V 是頂點數, E 是邊數, F 是面的個數。這是可以簡單的看出來的, 如果我們取三角形的區域跟三角形的洞。用多邊形來逼近平滑區域, 取極限我們得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma K(s)ds = \chi(\Omega),$$

跟剛剛提到的一樣。

如果考慮三維空間一連通的平面多邊形, 我們得到尤拉定理

$$V-E+F=2.$$

對於正立方體這是很明顯的。尤拉的多面體定理在尤拉之前就已經知道了, 但是似乎是尤拉第一個明確的指出“正負相間和 (alternating sum)” 的重要性。對於這個結果有十七種已知的證明。尤拉首次提到這個公式是在一封1750年給 Goldbach 的通信, 而在1752年對凸多面體給出了證明。

給定任一封閉緊致 (closed compact) 曲面 S, 將它三角化, 再令 $\chi(S)=V-E+F$。那麼我們得到 Gauss-Bonnet 定理:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dS = \chi(S).$$

K 是高斯曲率, 是 Carl Friendrich Gauss 於1818年在他主持一項德國漢諾威王國的調查工作當中發現的。

這些三角形可能看來有點隨意, 但是請容我將它與分析做一連結。就讓我從 Poincaré 對於 Kac 最後的注解所提到的 Euler-Poincaré characteristic 的貢獻開始。對於高維度的體我們仍然可以用高維度的三角形, 稱之爲單形 (Simplexes), 來對它進行三角化。因此, 頂點就代表0維的單形, 邊就代表1維的單形, 一個面就是一個2維的單形, 以此類推。給定一個 n 維的體 Ω, 我們可以將它三角化並且定義 Euler-Poincaré characteristic

$$\chi(\Omega) = b_0 - b_1 + b_2 - \cdots + (-1)^n b_n,$$

其中 b_k 表示 k 維面的個數; b_k 稱作 Betti 數, 是爲紀念義大利幾何學家 Enrico Betti (1823-1892) 所取名的。如果 Ω 的維數是奇數 $\chi(\Omega) = 0$。當維數是偶數時, 陳省身 (可能是最有名的中國數學家) 於1944年證明下面 Gauss-Bonnet 公式的推廣:

$$\chi(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_D C,$$

其中 C 是曲率張量分量中的 $n/2$ 階的齊次多項式, C 屬於不變量 Chern classes。這最後一個公式現在稱爲 Gauss-Bonnet-Chern 公式。

下一步來自於1930年代的 Hodge。他證明了 Δ_k 的零空間 (null space) 的維度跟第 k 個 Betti 數 b_k 是一樣的。這邊 Δ_k 是一個 $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k}$ 的二階微分算子組, 更精確的來說, Δ_k 是 George de Rham 於1931年定義的 Laplace-Beltrami 算子, 此算子將 n 維面的 k-form 送到 k-form:

$$\Delta_k : \sum a_{j_1\cdots j_k} dx_{j_1} \cdots dx_{jk} \to \sum \Delta_k(a_{j_1\cdots j_k} dx_{j_1} \cdots dx_{j_k})$$

因此, 我們可以將 Euler-Poincaré characteristic 寫成下列形式:

$$\chi(\Omega) = d_e - d_o,$$

這邊 d_e 代表偶數次調合形 (harmonic forms) 空間的維度, 而 d_o 代表奇數次調合形空間的維度。注意到零維的調和形即是一調和函數, 因此我們是延續古典位勢論的研究。

令

$$d_k \sum a_{j_1,\ldots,j_k} dx_{j_1} \cdots dx_{j_k} = \sum \Big(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1,\ldots,j_k}}{\partial x_\ell} dx_\ell\Big) dx_{j_1} \cdots dx_{j_k}.$$

因此 d 將 k 形送到 $k+1$ 形。讓 δ_k 代表 d 的伴隨 (adjoint), δ_k 由部份積分得到, 即

$$\int (d_k f) g = \int f(\delta_{k+1} g),$$

它將 k 形送到 $k-1$ 形。因此 $d_k+\delta_k$ 是一個一階微分算子, 將偶數形送到奇數形, 奇數形送到偶數形。在多變數微積分裡 d 是梯度算子, 而 δ 是散度算子。以矩陣形式表之 $\Delta_k = d_k\delta_k+\delta_k d_k=(d_k,\delta_k)\binom{\delta_k}{d_k}$, 令

$$
\begin{aligned}
d &= d_0\oplus d_1\oplus\cdots\oplus d_n\\
\delta &= \delta_0\oplus \delta_1\oplus\cdots\oplus \delta_n\\
D &= d+\delta,
\end{aligned}
$$

D 的零空間全部都是偶數維度的調和形, 而 D^* (D 的伴隨) 的零空間全部都是奇數維度的調和形。因此,

$$\chi(\Omega)=\text{Null } D-\text{Null } D^*.$$

定義: $P(x,\partial_x)$ 是一個微分算子的橢圓系統, 如果 Hamiltonian 矩陣的行列式 $P(x,i\xi)$ 當 $\xi\neq 0$ 時不爲零。

定義: 一個微分算子 P 的橢圓系統的 index 即是 P 的零空間的維度減去 P^* 零空間的維度,

$$
\begin{aligned}
\text{ind } P &= \dim\ker P-\dim\ker P^*\\
&= \dim\ker P-\text{codim range } P.
\end{aligned}
$$

D 是一個橢圓算子, 所以

$$\chi(\Omega)=\text{ind } D.$$

一個有名的例子是 Neumann 問題。讓 Ω 是平面上簡單連通區域。此問題爲在 Ω 裡滿足

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Big)f=F \qquad \text{且 } \frac{\partial f}{\partial\rho}\Big|_\Gamma=0,$$

所以

$$\Delta^{(N)}: f\to F.$$

它的零空間是 Ω 上的所有常數函數, 是一維的, 而它的值域是所有的 F 滿足

$$\int_\Gamma F=0,$$

所以值域的餘維數也同樣是一維的。因此,

$$\text{Ind }(\Delta^{(N)})=0.$$

Index 的研究源自於1921年 Fritz Noether 的一篇論文。在研究潮汐運動時他發現一個問題, 而這個問題是 Poincaré 在他1910天體力學的著作裡所忽略的。Noether 爲這個問題提供了解答。假設 L 是一平面上簡單封閉曲線, φ 和 f 代表 L 上的函數, 滿足

$$a(t)\varphi(t)+b(t)\frac{1}{i\pi}\int_L\frac{\varphi(s)}{s-t}ds=f(t).$$

讓 A, B 和 H 代表下列算子

$$\begin{aligned}A\varphi(t)&=a(t)\varphi(t),\\ B\varphi(t)&=b(t)\varphi(t),\\ H\varphi(t)&=\frac{1}{i\pi}\int_L\frac{\varphi(s)}{s-t}ds.\end{aligned}$$

H (Hilbert 轉換) 是由下列 Cauchy principle value singular integral 來定義

$$\int_L\frac{\varphi(s)}{s-t}ds=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|s-t|>\varepsilon}\frac{\varphi(s)}{s-t}ds.$$

爲了回答 Poincaré 所忽略的這個問題, 必須研究 $A-BH$ 這算子的零空間和餘值域 (corange)。Noether 的回答如下: 讓 χ 表示延著 L 曲線 $-\frac{1}{2\pi}\frac{a+b}{a-b}$ 的增量, 那麼

(1) $\chi\geq 0\Rightarrow A-BH$ 是一蓋射, 並且有 χ 維的零空間,

(2) $\chi\leq 0\Rightarrow A-BH$ 是一嵌射, 並且有餘秩 (corank) $-\chi$。

因此,

$$\text{ind }(A-BH)=\chi.$$

在1951年, F. V. Atkinson 證明算子在連續形變的情況下, index 保持不變。對於一個橢圓微分算子

$$P=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(x)\partial_\alpha,$$

所有 $|\alpha|<m$ 的係數 $a_\alpha(x)$ 可以連續形變到0而不改變此算子的特徵。所以 P 的 index 就只跟它主要部份

$$\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\partial_\alpha$$

有關, 而它的符號

$$p_m(x,i\xi)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha,$$

是一個相空間裡的函數。這一點是在50年代中期被 Israel Gelfand 所指出。Michael Atiyah 被 Gelfand 的文章所啓發, 於是說服 Isadore Singer 找一般橢圓偏微分算子的 index。在1963年, 他們發表了下列公式:

$$\text{ind } P=\int_{\Omega} A(p_0).$$

A 類似於陳類 C 和二維高斯曲率 K。這時候這就是 Gauss-Bonnet-Chern 公式的終極的形式。讓我們將它與 Kac 的文章做一連結。我們引進下列算子

$$\Delta_1=I+P^*P,\qquad \Delta_2=I+PP^*,$$

讓 $E_{1,\lambda}$ 和 $E_{2,\lambda}$ 表示 Δ_1 和 Δ_2 以 λ 爲特徵值時的特徵空間。$E_{1,1}$ 和 $E_{1,2}$ 是 Δ_1 和 Δ_2 的零空間。如果 $\lambda>0$, 且

$$\Delta_1\varphi=\varphi+P^*P\varphi=\lambda\varphi,$$

那麼

$$\Delta_2(P\varphi)=P\varphi+PP^*P\varphi=P(\lambda\varphi)=\lambda(P\varphi),$$

所以

$$\dim E_{1,\lambda}=\dim E_{2,\lambda},\quad \lambda>1.$$

因此, 如果 λ_n 是 Δ_1 的特徵值而 μ_n 是 Δ_2 的特徵值, 我們得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\mu_n t}&=(\dim E_1)e^{-t}-(\dim E_2)e^{-t}\\&=(\text{ind } P)e^{-t},\end{aligned}$$

所以

$$\text{ind } P=\lim_{t\to 0}\left[\operatorname{trace} e^{-(I+P^*P)t}-\operatorname{trace} e^{-(I+PP^*)t}\right].$$

這個結果此刻即是對於 Kac 最後問題的最終答案。此問題我引申爲: 我們可以寫下 Euler-Poincaré characteristic 的熱核公式嗎?

Index 一個重要的例子是 Riemann-Roch Theorem, 這是 Euler-Poincaré characteristic 的複空間的模擬。精確的來說, $\chi(\Omega)$ 就是 de Rham complex 的 index, 而 Riemann-Roch 公式就是 Dolbeault complex 的 index。

在物理裡整數的不變量是重要的, 因爲對於小的擾動他們是維持常數的, 這是重要的。Maslov index 就是其中一個例子。在 Aharonov-Bohm 效應中的 Berry 相位是一拓樸不變量, 因此應該一定有類似於 Gauss-Bonnet-Chern-Singer 公式的 index 公式。

在結束討論前我要對 Kac 問題做稍稍不同的解釋。在 Kac 的問題中我們有一個固定的微分算子 (Laplace-Beltrami 算子), 讓曲面變化, 然後問這個問題: 已知算子的特徵頻率, 關於這個曲面我們知道多少? 這裡我們處理的是幾何與物理。另外一種可能性是我們固定曲面、體或是流形, 給定一個在它上面的微分算子, 然後問下面的問題: 知道這算子的特徵值, 我們對於算子本身又能有什麼了解? 這似乎有很少的幾何但是大量的物理。這方面最早的結果是在1940年來自於 Göran Borg。他固定流形爲 [0, 1] 區間並假設知道下面微分算子的特徵值:

$$-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

其邊界條件爲

$$u(1)+au(0)=0.$$

Borg 問了下面的問題: 位能 $q(x)$ 是唯一決定的嗎? 答案是"不"。之後他繼續證明出當有兩組獨立的邊界條件時, 如果我們可以知道特徵值, 那答案就是對的。

在1953年的一篇有名的論文中, Gelfand 和 Levitan 研究在實數軸上同樣的問題。這裡因爲可能有連續的 specturm, 因此我們處理的是 spectral 函數而不是特徵值。給定一算子 A, 它的 spectral 函數是 $e(\lambda,x,y)$, 因此

$$f(A)=\int f(\lambda)de(\lambda,x,y).$$

Gelfand 和 Levitan 證明 spectral 函數唯一決定位能 $q(x)$ 而且他們甚至給出一個方式造出 $q(x)$。他們的方法爲研究偏微分算子的 Marcenko 萃取至遞變算子 (transmutation operators) 理論中。

在物理學裡, 我們並不知道 spectral 函數, 但我們可以經由實驗獲得 Heisenberg 所發明的散射矩陣 (scattering matrix)。因此, 問題就變成: 已知散射矩陣, 我們是否可以區別出是怎樣的位能或是分辨什麼樣的物體所造成的散射產生給定的矩陣? 這些逆問題在物理與應用數學裡有很重要的應用, 而我們對他們理解是非常少的。

—本文演講者任教於加拿大多倫多大學數學系, 整理者當時爲中央研究院數學所助理—