數學傳播 30卷4期, pp. 32-33

舊題新解—根號 2 是無理數

張海潮 · 張鎮華

現行高一的數學教科書中, 有根號2是無理數的證明。本文想換個角度看這個問題, 亦即任何分數的平方都不等於2。

我們不妨假設這個分數介於1和2之間。設此分數爲 x, 並設 $y=x-1$, y 是一個眞分數。分數代表的是兩個整數相除, 進行除法的時候, 如果擴及小數, 就可以一直除下去。有時除得盡, 例如1/4除成0.25; 有時除不盡, 除不盡的情形又因爲在每一次除的時侯, 餘數要小於除數, 所以終會碰到餘數重複出現的時候。一旦餘數重複出現, 商也跟著重複, 因此而得到循環小數, 例如$1/7=0.\overline{142857}$, $2/15=0.1\overline{3}$。記錄的時侯, 在循環的這一段上加一槓, 稱爲循環節。

現在, y 是一個眞分數, 下面根據除得盡, 除不盡的情形分開討論。

第一種是除得盡的情形, 此時y是一個有限小數, $y=0.a_1a_2\cdots a_k$ (註一), $x=1.a_1a_2\cdots a_k$, 顯然 x^2 不能等於2, 因爲 x^2 一定有小數的部份。

第二種情形, y 是一個循環小數, 此時又有兩種情形

(1) $y=0.\overline{b_1b_2\cdots b_l}$

(2) $y=0.c_1c_2\cdots c_m\overline{b_1b_2\cdots b_l}$

先說 (1), 由於 $y=0.\overline{b_1b_2\cdots b_l}$ 可以寫成下面形式的分數 (註二)

$$y=b_1b_2\cdots b_l/99\cdots 9$$

式中 y 的分母是 l 個9連寫, 因此

$$x=1+y=c_1c_2\cdots c_n/99\cdots 9$$

換句話說, x 是一個分母爲$99\cdots 9$的假分數。現在

$$x^2=(c_1c_2\cdots c_n)^2/(99\cdots 9)^2$$

式中 x^2 的分母個位數是1, 但是分子由於是 $(c_1c_2\cdots c_n)$ 自乘, 個位數不可能是2(c_n^2 的個位數只可能是0, 1, 4, 5, 6, 9), 因此 x^2 不可能等於2。

再說 (2), 由於 $0.c_1c_2\cdots c_m\overline{b_1b_2\cdots b_l}$ 可以寫成下面形式的分數 (註三)

$$y=c_1c_2\cdots c_m/10^m+b_1b_2\cdots b_l/99\cdots 9\times 10^m$$

所以 $x=1+y$ 可以寫成

$$x=1+y=d_1d_2\cdots d_s/99\cdots 9\times 10^m$$

如果分子的尾巴有0, 就和分母的0約去, 如此繼續, 又有兩種情形

(3) $x=d_1d_2\cdots d_{s-m}/99\cdots 9$

(4) $x=d_1d_2\cdots d_j/99\cdots 90\cdots 0,\quad d_j\neq 0$

如果是 (3), 和 (1) 的論證一樣, x^2 不可能是2。如果是 (4), 由於 $d_j\neq 0$, x^2也不可能是2。

註一: $0.a_1a_2\cdots a_k$ 表示十進位制小數的記錄, 其中 a_i 是0到9的整數, 以下的紀錄都是指十進位。

註二: 一般教科書對循環小數的分數表示都是通過無窮等比級數求和, 例如將 $0.\overline{3}$ 表成 $3/10+3/100+3/1000+\cdots$ 而得到 $\frac{3/10}{1-1/10}=3/9=1/3$。一個偷巧的辦法是令 $w=0.\overline{3}$, 注意到 $10w=3.\overline{3}$, 因而有 $10w-w=3$, $w=3/9=1/3$。此處 $y=0.\overline{b_1b_2\cdots b_l}$, 如果偷巧, 可以立刻從 $10^ly=b_1b_2\cdots b_l+y$ 而得到 $y=b_1b_2\cdots b_l/99\cdots 9$。如果規規矩矩來, 那就是求首項爲 $b_1b_2\cdots b_l/10^l$ 公比爲 $1/10^l$ 的無窮等比級數, 結論是一樣的。

註三: 由於二, $10^my-c_1c_2\cdots c_m=b_1b_2\cdots b_l/99\cdots 9$。

附記

如果不透過循環小數, 可以直接處理如後。設 P 表一個正整數, 並且在十進位的表示下, P 的個位數是 p 。因爲 P^2 的個位數和 p^2 的個位數一樣, 所以 P^2 的個位數只可能是0, 1, 4, 5, 6, 9。考慮分數 P/Q, 不妨假設 P/Q 是最簡分數, 或至少假設 P 和 Q 不能同時被5整除。

我們以 p (或 q) 表 P(或 Q) 的個位數, 則有下列三種可能:

(一) $q=0$, $p>0$, 可得 $q^2=0$, $p^2>0$, 所以 Q^2 的個位數$=0$, P^2 的個位數$\neq 0$。

(二) $q=5$, $p>0$, 可得 Q^2 的個位數是5, P^2 的個位數$\neq 0$。

(三) $q\neq 0$, $q\neq 5$, 此時 Q^2 的個位數是1, 4, 6, 9, 而 $2Q^2$ 的個位數是2或8, P^2 的個位數只可能是0, 1, 4, 5, 6, 9。

上述三種可能都證明了 $P^2\neq 2Q^2$, 亦即 $P^2/Q^2\neq 2$。

—本文第一作者爲台大數學系退休教授, 第二作者現任教於台大數學系—