數學傳播 30卷4期, pp. 20-31

微積分五講——
第四講 微積分的三個發展階段

龔　昇・張德健

一. 微積分的前驅工作

Richard Courant (1888-1972) 在 1949 爲 Carl B. Boyer 寫的一本書「微積分概念史」[1] 之前言說道:「微積分學, 或者數學分析, 是人類思維的偉大成果之一」; 他還說:「這門學科乃是一種憾人心靈的智力、奮鬥的結晶; 這種奮鬥已經經歷了兩千五百多年之久, 它深深札根於人類活動的許多領域之中」。美國一位著名的數學史學家與數學教育家 M. Kline 先生在他著的「西方文化中的數學」一書中曾經說過:「一個擁有牛頓處於頂峰時期所掌握的知識, 在今天不會被認爲是是一位數學家。因爲數學是從微積分開始, 而不是以之爲結束。」吳文俊教授在他的文章 [2]中提到 M. Kline 先生對微積分的推崇或許有些過分, 但微積分的發明對於數學歷史發展過程具有無與倫比的巨大作用, 這是無庸置疑。

這樣一個 "撼人心靈" 以及 "對於數學歷史發展過程具有無與倫比的巨大作用" 的微積分, 當然會有很多人去深入地研究它的歷史與發展過程, 並且已有了很多本寫得很好的書, 如 [1], [3], [4] , [6]等等。在這一講中, 我們並不想也沒有必要詳細地講述微積分的發展史, 只是對此作了十分粗略的回顧。前面提到的微積分歷史的書往往都是講了 Newton-Leibniz 創立微積分與微積分嚴格化這兩個發展階段, 就到此爲止。以我們的淺見, 除了這兩個發展階段外, 還應有第三個發展階段, 即外微分形式建立的階段, 將在這一講論述。在微積分嚴格化之後, 微積分本身往何處發展? 這將在下一講中討論。

儘管在古希臘時代有 Euclid, Archimedes 等, 在中國有劉徽 (公元163年左右)、祖沖之 (公元429-500) 等偉大的數學家, 對數學作出了傑出的貢獻。之後在東、西方, 數學都得到了種種發展。但是從公元五世紀到十一世紀, 是歐洲歷史上的黑暗時期, 中國也長時期地處在封建社會, 文明處於凝滯狀態, 在東、西方, 數學的進展甚微。一直到了十五世紀初, 情況才有了根本性的變化。同樣吳文俊教授在文章 [2]中, 也十分簡明扼要地說明早在大約從十五世紀初開始的文藝復興時期起, 工業、農業、航海與商賈貿易的大規模發展, 形成了一個新的經濟時代; 宗教

改革與東方先進科學技術通過阿拉伯的傳入, 以及拜占庭帝國覆滅後希臘大量文獻的流入歐洲, 在當時的知識層前面呈現出一個完全嶄新的面貌, 等待著他們充分發揮聰明才智。無數偉大的思想家在這種大時代氣息的培育下應運而生, 現代科學也應運而生, 與新時代的要求相適應的新數學也因之應運而生。

文藝復興初期一位多才多藝具有代表性的思想家 Leonando da Vince (1452-1519) 是現代科學的先驅者之一。他提倡尋找數量關係, 認爲“除非通過數學上的說明和論證, 人們的探討不能稱爲是科學的”。時代的要求促成數學上一個空前活躍和富有創造性時期的誕生。例如測量、航海與地圖繪製等促成幾何學的發展; 而繪畫對透視深入認識的要求成爲射影幾何發展的出發點。更爲重要的是, 解決各種問題的普通科學方法的研究, 導致 P.de Fermat 與 R. Descares 創造了坐標幾何, 或所謂的解析幾何, 爲微積分的創造提供了必要的技術條件。

微積分誕生於十七世紀上半葉, 這是微積分醞釀產生的半個世紀。在這個時期, 在自然科學的各個領域都發生了重大事件, 以天文、力學爲例, 有如下的重大事件。

伽利略 (Galileo Galilei, 1564-1642) 製造了第一架天文望遠鏡, 由對天空的觀察獲得了大量的天文發現。之後, 刻卜勒 (Johannes Kepler, 1571-1630) 經過長期對行星運動的觀察, 得到了行星運動的三大定律。大意爲:

(1) 行星運動的軌道是橢圓, 太陽位於該橢圓的一個焦點;

(2) 由太陽到行星的矢徑在相等的時間內掃過的面積相等;

(3) 行星繞太陽公轉週期的平方, 與其橢圓軌道的半長軸的立方成正比。

對於這樣的經驗定律, 如何來“通過數學上的說明和論證?” 在力學方面, Galileo 建立了自由落體定律、動量定律等, 爲動力學奠定了基礎。但這些定律有待於“通過數學上的說明和論證”。

凡此種種, 標誌著從文藝復興以來自然科學的蓬勃發展, 到了十七世紀開始進入綜合突破的階段。這些發現所面臨的數學困難, 最後匯總成四個核心問題, 並最終導致微積分的產生。這四個問題是:

(a) 運動中速度、加速度與距離之間的互求問題, 尤其是非勻速運動, 使瞬時變化率的研究成爲必要;

(b) 曲線求切線的問題, 例如要確定透鏡曲面上任意一點的法線等;

(c) 由確定砲彈最大射程, 求到行星軌道的近日點與遠日點等問題提出的 求函數的極大值、極小值問題;

(d) 當然還有千百年來人們一直在研究 如何計算長度、面積、體積與重心等問題。不過此時由於計算行星沿軌道運動的路程, 行星矢徑掃過的面積等問題的提出而顯得格外引起人們的興趣。

在微積分創立之前, 在 Fermat, Descartes, B. Pascal (1623-1662), J.Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677), B. Cavalieri (1598-1647), Galileo 等難以計數的十六、十七世紀的先驅數學家們的不斷探索下, 第一、二、三問題導致微分的概念, 第四個問題導致積分的概念。雖然微分與積分在當時還是在摸索的階段, 而且是獨立發展的, 但在這個時期成就了許多重要的工作, 爲微積分的誕生作了奠基石。例如: Kepler 爲了求一個酒桶的最佳比例於 1615 年發表了「測量酒桶的新立體幾何」一書, 論述了如何求圓錐曲線圍繞其所在的平面上某直線旋轉而成的立體如何計算體積。他實際上用了無窮小元素之和來確定曲邊形的面積及旋轉體的體積, 對後來積分概念的產生起了很大的作用。Fermat 與 Descartes 創立了解析幾何後, 成爲將坐標方法引進微積分學問題研究的前鋒。Descartes 於 1637 年在「幾何學」一書中提出了求切線的一種方法, 他的方法實際上是一種代數方法, 但這對推動微積分的早期發展有很大的影響。1637 年 Fermat 提出了求極大値與極小値的方法是一樣的。在第二講第二節中, 求 $\int_0^a x^n dx$, n 爲正整數的方法是 Fermat 給出的。而 Cavalieri 在1635年的著作「用新方法促進的連續不可分量的幾何學」一書中, 利用他的“不可分量” 的“Cavalieri 原理”, 給出了另一個證明。但是最爲重要的, 也許是 Barrow 的貢獻, 他在 1669 年出版的「幾何講義」一書對微積分的創立起了巨大的作用。他以幾何的面貌, 用語言表述了 “求切線”和 “求面積”是兩個互逆的命題。而他本人對於這個接近於微積分基本定理的重大發現並不重視。Barrow 是 Newton 的老師, 是英國劍橋大學第一任“路卡斯 (Lucas) 教授”, 也是首批英國皇家學會會員。當他發現 Newton 的學識已超過自己時, 便主動於 1669 年將此 “Lucas教授”讓位於年僅廿七歲的 Newton, 這種高風亮節的品德與風格, 實在令人欽佩, 這件事也成爲科學史上的一段佳話, 其實也是值得我們這些後輩學習的。Barrow 對求曲線的切線的問題與求曲線下所圍面積的問題之間關係的論述, 不僅是作爲他學生的 Newton 親受其益, 即使是 Leibniz, 據說也曾研究過他的著作。

從以 Barrow 等人爲代表的這些微積分的先驅們的貢獻, 可以看出: Newton 與 Leibniz 是生長在微積分誕生前的水到渠成的年代, 也可以說他們占了天時、地利、人和。Newton 與 Leibniz 之所以能完成微積分的創立大業, 正是由於他們站在前輩人們的肩膀上, 才能居高臨下, 才能高瞻遠矚, 終於獲得了劃時代的貢獻。我們也可以這樣說: 微積分的產生是量變 (先驅們的大量工作的積累) 到質變 (Newton 與 Leibniz 指出微分與積分是一組對立的運算) 的過程, 是當時的歷史條件 (文藝復興運動時期) 下的必然產物。

二. 微積分的創立

微積分基本定理的建立標誌著微積分的誕生, 這正是 Newton 與 Leibniz 的功勞, 是他們創立了微積分。Newton 於1642年出生在英國的一個農民家庭, 是早產遺腹子, 勉強存活。

十七歲時, 母親召他從中學回田莊務農, 由於他舅父及中學校長的竭力勸說, 他的母親在九個月後終於允許他返校學習。中學校長對他母親所說的話:「在繁雜的農務中埋沒這樣的天才, 對世界來說將是多麼巨大的損失! 」成了偉大的預言。Newton 於1661年進入劍橋大學, 受業於 Barrow 教授門下。1665 年 8 月, 因英倫地區發生瘟疫, 劍橋大學關閉, Newton 回家鄉避疫兩年, 在這期間, 他制定了研究與發現微積分、萬有引力及光學的藍圖。這三項偉大貢獻中的任何一項, 都足以使他名留青史。

Newton 對微積分的研究始於 1664 年, 他鑽研 Galileo, Kepler, Wallis, 尤其是 Descartes 的著作, 深受他們的影響。於 1665 年 5 月發明 "正流數術"(微分法)。1666 年 5 月發明"反流數術"(積分法)。1666年10月將此整理成文, 名爲「流數間論」(Tract on Fluxions)。此文雖未發表, 卻是歷史上第一篇系統的微積分文獻。他以動力學爲背景, 以速度形式引進 "流數" (即微商)。他在此文中陳述了微積分基本定理。他是這樣推導的。在圖4.1中, $ab = x$, 函數 $q = f(x)$ 描繪曲線爲 acf。記曲邊三角形 Δabc 的面積爲 y。$de \parallel ab \perp ad \parallel be = p = 1$。當垂線 abe 以單位速度向右移動時, eb 掃出面積 $abed = x$ 的變化率 $\frac{dx}{dt} = p = 1$, cb掃出面積 $\Delta abc = y$ 的變化率 $\frac{dy}{dt} = q$, $\frac{dx}{dt} = p$, 由此得到

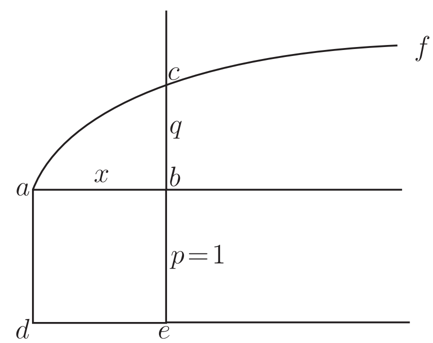

圖 4.1

$$\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{q}{p} = q = f(x).$$

這就是說, 面積 y 在點 x 處的變化率是曲線在該處的值 q, 這就是微積分的基本定理, 也就是積分後再微商就是函數自己。作爲例子, 他計算出 $y = x^n$ 從 0 到 x 的曲線掩蓋的面積爲 $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的曲線的斜率爲 x^n 等。

Newton 一反過去將面積看作無窮小不可分量之和的觀點來算面積, 而是明確提出計算面積與求切線是兩個互逆問題。他說:「一旦反微分問題可解, 許多問題都將迎刃而解。」他將從古希臘以來用無窮小的方法來解各種問題的特殊技巧統一爲兩類算法, 正、反流數術, 即微分與積分, 並指出兩者是互逆關係, 即是一組對立運算。這就標誌著微積分的誕生。由此可見, 微積分的誕生的確是 "數學中眞正的進展", 它是 "更有效的工具和更簡潔的方法之發現", 並且 "有助於理解已有的理論", 如古希臘以來用無窮小的方法來解各種問題的特殊技巧, 並把這些內容都可以 "拋到一邊"。

在「流數簡論」中還應用了已建立起來的統一算法, 用來求曲線切線、曲率、拐點、曲線求長、求面積、求引力與引力中心等十六類問題, 顯示了這種算法的普遍性、系統性及強大威力。

「流數簡論」標誌著微積分的誕生, 當然還不成熟, 之後 Newton 花了四分之一世紀的時間來不斷改進與完善他的學說, 爲此他先後寫了三篇微積分的論文, 它們是:

(A)「運用無限多項方程的分析」(De analysi per acquationes numero terminorum infinitas), 1669;

(B)「流數法與無窮級數」(Methodus Fluxionum et sevierum infinitarum), 1671;

(C)「曲線求積術」(Tractatus de quadratura curvarum), 1691.

這三篇到了十八世紀才發表的論文, 反映了其微積分學說的發展過程, 對微積分的基礎不同時期的不同認識。

在文 (A)、(B) 中都有以無窮小量作爲微積分算法論證基礎。例如在 (A) 中, 敍述了曲線 $y=f(x)$ 下面積的求法, $y=ax^{\frac{m}{n}}$

$$z=\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$$

他是這樣做的: 取 x 的無窮小增量爲 h, 以$x+h$ 替代 x, 以 $z+hy$ 替代 z, 則

$$z+hy=\frac{na}{m+n}(x+h)^{\frac{m+n}{n}}.$$

用二項式定理展開後, 以 h 除兩邊, 略去 h 的項, 即得 $y=ax^{m/n}$, 反過來就知道曲線 $y=ax^{m/n}$ 與 x 軸之間的區域面積是

$$\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}.$$

在文 (C) 中, Newton 改變了 (A) 、(B) 文中的做法, 他說:「在數學中, 最微小的誤差也不能忽略, ... 在這裡, 我們認爲數學的量不是由非常小的部份組成的, 而是用連續的運動來描述的。」在此基礎上定義了流數, 並提出 “首末比方法”。例如: 求 $y=x^n$ 的流數, 將 x 變成 $x+h$, x^n 則變爲

$$(x+h)^n=x^n+nhx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2}+\cdots$$

構成這兩變化的“最初比”爲

$$\frac{(x+h)-x}{(x+h)^n-x^n}=\frac{1}{nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}hx^{n-2}+\cdots}$$

然後設增量 h 消逝, 它們的“最終比” 就是 $\frac{1}{nx^{n-1}}$。也就是 x 的流數與 x^n 的流數之比, 這種 “首末比方法”, 相當於求函數自變量變化與應變量變化之比的極限, 成爲極限方法定義微分的先導。

Newton 於 1687 年出版的「自然哲學的數學原理」(Philosophiae naturalis principia mathematica) 是他的代表作, 是一部力學名著, 也是數學史上劃時代著作。全書從三條基本力

學定律出發, 以微積分爲工具, 嚴格地推導證明了包括 Kepler 行星運動三大定律、萬有引力等一系列結論, 並用微積分於流體運動、聲、光、潮汐、彗星以至宇宙體系, 充分顯示了微積分的威力。以至被 Einstein 稱之爲 “*無比輝煌的演繹成就*”。在此書中, 既用了 “首末比方法”, 也保留了無窮小量來講述微積分, 成爲後來對微積分的基礎產生爭議的伏筆。實際上, Newton 時代, 微積分嚴格化的條件並不成熟, 他一面大膽創新, 廣泛應用的同時, 對微積分的基礎作不斷探索, 說明他對基礎存在的困難的深刻理解與謹慎態度。毫無疑問的, Newton 是一位科學巨人, 在科學的很多領域都有傑出的成果。在數學上, 除了微積分, 他在代數方程論、幾何、數值分析、幾何概率等等都有傑出的貢獻, 都有大量以他命名的公式、定理與理論。

Leibniz 於1646年出生在法國的一個教授家庭。在萊比錫大學學習法律, 1667 年獲阿爾特多夫大學法學博士學位, 之後一生從政。他也學習了 Galileo, Kepler, Pascal, Descartes 以及 Barrow 的著作, 深受他們的影響。1672年至 1676 年, 他在巴黎工作期間, 他的許多科學成就, 包括微積分的創立都在此期間完成或奠定了基礎。與 Newton 的流數論以動力學爲背景不同, Leibniz 創立微積分是從幾何問題的思考出發的。他從受到 Pascal 工作的啓發, 於 1673 年提出了 *特徵三角形*。所謂特徵三角形是: 對一條曲線上的一點 P, 取與 P 相鄰在曲線上的點 Q, 則曲線上的短弧 PQ, 長度爲 ds, 在 x 軸上投影的長度爲 dx。在 y 軸上投影的長度爲 dy, 這樣, ds, dx 與 dy 組成了特徵三角形。Leibniz 對特徵三角形進行研究, 得到了很多結果包括前人已經得到的結果, 更爲重要的是, 他通過對特徵三角形的研究認識到: 求曲線的切線依賴於縱坐標的差值與橫坐標的差值變成無窮小時之比, 而求曲線下的面積則依賴於無窮小區間上的縱坐標之和, 且看出了這兩類問題的互逆關係。

Leibniz 是如何發現微積分基本定理的? 他在 1666 年, 研究了數列問題, 他討論了平方序列 $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36 \dots$ 及其一階差 $1, 3, 5, 7, 9, 11$ 及其二階差 $2, 2, 2, 2, 2$, 他注意到一階差數列, 前幾項之和, 就是平方數列的最後一項, 這裡序列求和運算與求差運算有互逆關係。他利用解析幾何, 把曲線的縱坐標用數值表示出來, 且看成是一個由無窮多個縱坐標 y 組成的序列, 其對應 x 值的序列, x 被看作確定縱坐標序列的次序。考慮任意兩相繼的 y 值之差的序列, 他發現, 求切線不過是求差, 求面積不過是求和。他從簡單的 $y = x$ 開始, 經過不斷的艱苦努力, 一直到 1676 年, 他計算出 $dx^\mu = \mu x^{\mu-1} dx$ 以及

$$\int x^\mu \, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$

這裡 μ 不一定是正整數 $(\mu > 0)$。1677年, 他給出了微積分基本定理, 給定一條曲線, 其縱坐標爲 y, 求該曲線下的面積。Leibniz 假設可以求出一條曲線, 其縱坐標爲 z, 使得 $\frac{dz}{dx} = y$, 即 $ydx = dz$。於是曲線下的面積是 $\int ydx = \int dz = z$ (假設曲線通過原點)。於是將求積問題

化爲反切線問題, 即: 爲了求出縱坐標爲 y 的曲線下的面積, 只需求出一條縱坐標爲 z 的曲線, 使得其切線的斜率爲 $\frac{dz}{dx}=y$。

1684年, Leibniz 發表了他的第一篇微分學文章「一種求極大與極小值和求切線的新方法」(Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus,quae nec irrationals quantiquantitetes moratur , et singulaze pro illi calculi genus), 這是歷史上第一篇正式發表的微積分論文。1686年, 他發表了他第一篇積分學文章「深奧的幾何與不可分量及無限的分析」(De geometria recondite et analysi indivisibilium atque infinitorum)。Leibniz 引入了符號 dx, $\int$ 等一直沿用至今, 他給出了函數的加、減、乘、除、乘方及開根, 以及複合函數的微分公式。著名的 Leibniz 公式是函數乘積的微分公式

$$d^n(uv)=\sum_{j=0}^{n} C_j^n(d^j u)(d^{n-j}v)$$

在積分學的文章中明確論述了積分與微分互爲逆運算。

Leibniz 也是一位數學巨人, 他對數學、力學、機械、地質、邏輯甚至哲學、法律、外交、神學和語言都作出了傑出的貢獻。在數學上, 他除了是創立微積分者之一, 還是數理邏輯的奠基人, 二進記數制的發明人, 製造計算機的先驅, 行列式發現者之一等等。Newton 與 Leibniz 是他們時代的偉大科學家。他們創立了微積分, 儘管在背景、方法與形式有所不同, 各有特色, 但他們給出了微積分基本定理等一整套微積分的理論, 並將它廣泛應用於天文、力學、物理等學科, 獲得了豐碩的成果, 給整個自然科學帶來了革命性的影響。

不幸的是, 由於局外人的插手, 挑起了 Newton 與 Leibniz 之間關於微積分發明的優先權之爭。這時 1699 年一位瑞士數學家 N. F. de Duillier 提出了 "Newton 是微積分的第一發明人, Leibniz 是微積分的第二發明人" 以及 "曾從 Newton 那裡所借鑒所引起的" 之說法。理所當然, 立即遭到 Leibniz 的反駁。這場爭論一直到 Newton 與 Leibniz 去世後才逐漸平息。經過調查, 尤其對 Leibniz 手稿的分析, 證實他們兩個的確是相互獨立完成微積分的發明。就發明時間 Newton 早於 Leibniz; 就發表時間 Leibniz 早於 Newton。這場爭論是一場悲劇, 對整個十八世紀英國與歐洲大陸國家在數學發展上分道揚鑣而產生了嚴重影響。使英國數學家由於固守 Newton 傳統而逐漸遠離分析主流, 而在 Leibniz 的微積分基礎上, 分析在十八世紀的歐洲大陸有了重大的進展。

三. 微積分的嚴格化和外微分形式的建立

微積分的創立, 爲數學的進一步發展提供了廣闊的天地。由於微積分解決問題的特殊能力, 數學家們致力於微積分的多種多樣的應用, 於是建立了不少以微積分方法爲主的分支學科, 如

常微分方程、偏微分方程、積分方程、變分法等等, 因而形成了數學的三大分支之一的分析。應用微積分方法於幾何開拓一個新的幾何分支——微分幾何; 應用於力學上, 就有理論力學; 應用於天文上就有了天體力學等等。於是十八世紀成了分析的時代。常微分方程、偏微分方程及微分幾何現在也已成爲大學數學的基礎課。微積分本身在這時期, 也在不斷地成熟, 形成了萬紫千紅的局面, 人們將一元微積分推廣到多元微積分, 無窮級數的理論因而有了極大的發展, 積分技巧有很大突破, 建立與研究了不少特殊函數等等。對十七、十八世紀推進微積分及其應用有卓越貢獻的英國數學家有 B. Taylor, C. Maclaurin (1698-1746), A. de Moivre (1667-1754), J. Stirling (1692-1770) 等人。由於微積分發明權的爭論助長了不列顚數學家的民族保守情緒, 使英國數學在 Maclaurin 後長期限於停滯狀態。而在歐洲大陸, Leibniz 的後續者們推動了分析學科的發展, 形成了欣欣向榮的局面。哲學後續者中有: Jacob Bernoulli (1654-1705) 和 John Bernoulli (1667-1748) 兄弟, L. Euler, A. C. Clairaut (1713-1765), J. B. L. R. D'Alembert (1717-1783), J. L. Lagange, G. Monge (1746-1818), P. S. M. de Laplace (1749-1827) 和 A. M. Legendre (1752-1883) 等。在這裡尤其以 Euler 的貢獻影響最大。我們不可能也不必要在此一一介紹這些偉大數學家的光輝成就, 可參閱數學史的書, 如 [5]及 [6]。

Newton 與 Leibniz 的微積分的基礎是不牢固的, 是不嚴格的。尤其在使用無窮小概念上的隨意與混亂, 一會兒說不是零, 一會兒說是零, 這引起了人們對他們的理論的懷疑與批評。如果說 Newton 與 Leibniz 創立微積分是微積分發展的第一階段, 那麼由於微積分的基礎不牢固而引起人們的指責與批評, 從而引出了人們對微積分基礎嚴格化的努力就成爲微積分發展的第二階段。從微積分的建立, 到 "分析算術化"於1872年完成, 使微積分建立在一個穩固的基礎上, 而平息了對微積分基礎的爭論, 歷時二百餘年。

從微積分誕生之後, 就有人指責它, 如: 1695年荷蘭物理學家 B. Nieuwentyt 就說 Newton 的流數術敍述 "模糊不淸", Leibniz 的高階微分 "缺乏根據"等。最有名的抨擊來自英國哲學家、牧師 G. Berkeley (1685-1753)。1734 年, 他寫的小册子「分析學家, 或致一位不信神的數學家」(The analyst, a discourse addressed to an infidel mathematician), 他說的 "不信神的數學家" 是指幫 Newton 出版那本「自然哲學的數學原理」的 E. Haley。Berkeley 說:「數學家們以歸納代替演繹, 用的方法沒有合法的證明。」他集中攻擊 Newton 的無窮小量, 如上一節中提到的, Newton 用 "首末比方法"求得函數 x^n 的流數的過程, 先設 x 有一增量 h, 並用它去除 x^n 的增量後得到

$$nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2+\cdots,$$

然後又讓 h 消失, 得到 x^n 的流數爲 nx^{n-1}。Berkeley 說這裡關於增量 h 的假設前後矛盾, 是 "分明的詭辯"。他說:「這些消失的增量究竟是什麼呢? 它們既不是有限量, 也不是無窮小,

又不是零, 難道我們不能稱它們爲消逝的鬼魂嗎? 」他對 Leibniz 的微積分也大加抨擊, 認爲那些正確的結論, 是從錯誤的原理出發通過 "錯誤的抵消" 而得到的。Berkeley 對微積分的攻擊雖不是完全正確, 但的確也揭露了微積分初建時的邏輯缺陷, 於是激發了數學家們爲建立牢固基礎而奮鬥的決心。D' Alembert, Euler 與 Lagrange 的確是企圖用代數化的途徑來克服微積分基礎上的缺陷的先鋒。他們的努力成了微積分嚴格化的前奏, 而微積分的嚴格化正是在他們工作的影響下到了十九世紀才完成。在十八世紀, 數學家們也許花更多的力氣於將微積分應用到各個方面, 致力於建立起一個又一個以微積分方法爲主的各種新的分支學科。

經過百年努力, 微積分嚴格化到了19世紀就見到效果。捷克數學家 B. Bolzano (1781-1848), 在 1817 年的著作中, 已經給出了連續函數處處不可微的例子。由於種種原因, 他的工作長期不爲人所注意, 湮沒無聞。而開始有重大影響的微積分嚴格化的第一人是法國大數學家 A. L. Cauchy (1789-1851)。他對微積分巨大的貢獻是引進嚴格的方法, 發表在他的三大著作:「工科大學分析教程」(Cours d' analyse de l'Ecole polytechnique 1821),「無窮小計算教程概述」(Résume des leçons sur le calcul infinitesimal, 1823) 以及「微分學講義」(Leçons sur le calcul differential 1929)。通過這些著作, 他賦予微積分以今天大學教科書中的模型, 作出較任何人更多的貢獻。他給出了 "變量"、"函數" 正確的定義, 即是 "當同一變量逐次所取的值無限趨向於一個固定的值, 最終使它的值與該定值差要多小就多小, 那麼最後這個定值就稱爲所有其他值的極限"。他的 "無窮小量" 不再是一個無窮小的固定數, 而定義爲: "當同一變量逐次所取的絕對值無限減小, 以致比任意給定的數還要小, 這個變量就是所謂的無窮小或無窮小量"。並用無窮小量給出了連續函數的定義、並用極限正確定義了微商, 微分和定積分。他的定積分的定義後來被 Riemann 推廣成 Riemann 積分, 其差別在於求 Riemann 和時, Cauchy 用的是小區間端點上的函數之值, 而 Riemann 用的是小區間內任意點上函數之值。

在上述這些定義的基礎上, Cauchy 正確地表述並嚴格地證明了微積分基本定理, 中值定理等微積分中一系列重要定理。他還對無窮級數進行了認眞的處理, 明確用極限的概念定義了級數的收斂性, 還給出了大家所熟悉的收斂判別準則。

Cauchy的工作是微積分走向嚴格化的極爲關鍵的一步。他的這些定義、定理與論述與現在微積分教科書中的形式相當接近。儘管 Cauchy 的工作在很大程度上澄清了微積分的基礎問題上長期存在的混亂與模糊不淸之處, 但他的理論也仍存在著要進一步釐淸的地方。例如前面提到的他在定義 "極限" 時, 用到的 "無限趨近"、"想要多小就多小" 等描述性的語言。微積分是在實數域上進行討論的, 但到了 Cauchy 時代, 儘管已是十九世紀的中葉, 對於什麼是實數, 依然是沒有作過深入的探討, 仍然是用直觀的方式來理解實數。在 Cauchy 論證的微積分的種種定理中都任意使用了實數的完備性。

前面已說到 Bolzano 第一個給出了連續函數處處不可微的例子, 他的例子是用幾何方法來構造的, 但長期不爲人們所注意。當1861年 K. Weierstrass (1815-1897) 用式子具體寫出一個連續函數卻處處不可微的例子時, 引起了當時數學界的震驚。他的例子是:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n\pi x)$$

這裏a是奇數, $b\in(0,1)$爲常數, $ab>1+\frac{3\pi}{2}$。人們用直覺來觀察函數已成了習慣, 但要用直覺來觀察上述例子是描繪怎樣一條曲線幾乎是不可能。這個例子不僅告訴我們連續函數與可微函數是兩種不同的函數, 還告訴人們 要徹底來研究微積分以及分析的基礎是十分必要的了。於是在19世紀後半葉有了著名的 "分析算術化" 運動, 如極限、連續等都是建築在實數的概念上, 因之實數是分析之源。要使微積分嚴格化, 必須從源頭做起, 首先要使實數嚴格化。

1857年 Weierstrass 給出了實數的嚴格定義, 大意是: 先從自然數出發定義正有理數, 然後由無窮多個有理數的集合來定義實數。而他對微積分嚴格化最突出的貢獻是他創造了一整套 $\varepsilon-\delta$ 語言、$\varepsilon-N$ 語言, 用這套語言重新建立了微積分體系。重新定義了極限、連續、導數等微積分中所有的基本概念, 用以取代 Cauchy 的 "無限趨近"、"想要多小就多小" 等描述的語言。並因此而引入了 "一致收斂" 概念, 消除了微積分中以前出現的錯誤與混亂。現在大學微積分教科書中所寫的第一個實數的定義一直未發表, 到了1872年, R. Dedekind (1831-1916)、G. Cantor (1845-1918)、H. C. R. Meray (1835-1911) 和 H. E. Heine (1821-1881)。幾乎同時發表了各自的包括有實數完備性的實數理論, 這也標誌著由 Weierstrass 分析算術化運動的完成。當然後來 G. Peano (1858-1932) 用公理化來定義自然數系, 也可以看作是分析算術化的餘波。還必須提到的是 1834 年 Riemann 在他的就職論文中定義了 Riemann 積分, 這使微積分嚴格化更加完美。

這是微積分發展的第二階段, 但是分析算術化的完成並未結束微積分發展的歷史。還有一個微積分發展的第三階段, 這就是外微積分形式的建立。因爲有了外微積分形式的建立, 而且只有用了外微積分, 才能眞正說清楚微分與積分在高維空間中是一組對立運算, 這就是第二講第三節的 Stokes 公式:

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}d\omega.$$

有了這個公式, 才使微積分最終劃上一個句號, 到達終點, 而同時也成爲了近代數學入口處之一。是否可以這樣說: 一元微積分的微積分基本定理的建立標誌著微積分的誕生; 分析算術化的勝利標誌著微積分嚴格化的完成; 外微積分形式的產生, 建立了多元微積分的微積分基本定理, 標誌著微積分的完成, 並從古典走向近代。

十九世紀末, Poincaré 指出多重微積分的體積元素有一個正負定向, 這個重大發現, 導致了外微積分形式的出現。1899 年, Elie Cartan (1869-1951) 明確定義了外微分。形式、外導

數等 [7], 1922 年, 他十分明確地寫出了第二講第二節中的 Stokes 公式 (本刊, 30卷2期, 民95年 6月, pp.23-24)。1899 年 Poincaré 給出了著名的 Poincaré 引理及其逆定理 [8]。後經他們及 F. C. Frobenius (1849-1917)、E. J. B. Goursat (1858-1936) 等人的發揚光大, 尤其將它應用於微分幾何、微分方程等學科上獲得了很大的成功, 成爲近代數學的重要篇章。外微分形式是近代數學中必不可少的工具和方法。

這裡還要簡單地說一下非標準分析。在前面說到, 在 Newton 與 Leibniz 建立微積分的階段, 他們往往任意使用無窮小, 但在實數域中是沒有無窮小的位置的。實際上, 對任給得一個非零實數 a, 其絕對值的整數倍構成的數列

$$\big\{|a|,\, 2|a|,\, \ldots,\, n|a|,\, \ldots\big\}$$

可以超過任何界限, 及任給 $m > 0$, 不論 m 有多大, 一定可以找到充分大的正整數 n, 使得 $n|a| > m$, 這個性質叫做 Archimedes 性質。實數域 $\mathbb{R}$ 就是具有這個性質的數域。在微積分中, 按照 Cauchy 的定義, 無窮小量是指無限接近於零的變量, 因此乘以任一整數 n 以後, 仍爲一無窮小量, 即無窮小量不具有 Archimedes 性質。所以不屬於 $\mathbb{R}$。Newton 與 Leibniz 當時進行實數運算時, 任意運用一個在實數域中不存在的無窮小, 以至產生了一會是零, 一會又不是零, 對 “$\frac{0}{0}$”的解釋也不能令人滿意。也正因爲如此, 那時的微積分就遭到一些人的非難與攻擊。經過了近二百年的努力, 分析算術化的成功, 有了 $\varepsilon-\delta$, $\varepsilon-N$ 這一套語言, 爲微積分打下了牢固的基礎, 這時候的無窮小量被完全拋棄了, 而與此同時, 無窮小方法所具有的直觀、簡潔、生動活潑的優點也一起被拋棄了。例如: 瞬時速度本來人們直觀可以理解的概念, 且客觀存在。但是爲了嚴格定義它, 不得不使用$\varepsilon-\delta$語言, 費些口舌去定義它。

但是天道好還! 在 Newton 與 Leibniz 建立微積分三百年後, 已經被趕出微積分一百多年的無窮小又回到了微積分中。1960年, A. Robinson (1918-1974) 運用現代數理邏輯的方法與新成果, 主要是模型論的理論, 將實數域擴充到包含數不清的無窮小及無窮大等非標準數的超實數域$\mathbb{R}*$。而 $\mathbb{R}*$ 與 $\mathbb{R}$ 一樣, 其中的元素可以進行四則運算, 且遵循一些算術法則。在 $\mathbb{R}*$ 上重新討論微積分、度量空間及拓樸空間等, 以及應用這種思想於別的數學領域, 就構成了一門新的學科—— 非標準分析。從某種意義上講, 他的工作復活了三百年前 Newton, Leibniz 的無窮小分析。

非標準分析的產生告訴我們: 分析算術化不是微積分嚴格化的唯一途徑。但是由於用非標準分析來講微積分往往要用到很多的數理邏輯的知識, 這又爲多數數學家所不熟悉, 所以在微積分的教材中普遍使用非標準分析恐怕一時不易做到。但是用非標準分析講微積分的教材確實是有的。對非標準分析有興趣的讀者可參閱 [9]。

最後還要說一下微積分在中國的傳播。由於中國封建社會的長期鎖國政策, 以致人們在此期間對西方的數學了解甚少。直到明末, 才由徐光啓 (1562-1633) 與意大利傳教士利瑪竇 (

Metteo Ricci) 合作翻譯了歐幾里德的「原本」前六卷成中文, 並正式刊刻出版, 定名爲「幾何原本」。數學名詞 “幾何” 由此而來。這是西方數學輸入中國的一個標誌。之後還通過傳教士輸入了西方文藝復興以來產生的數學。

在我國最早引入微積分的是清代的李善蘭 (1811-1882)。1859年, 他與英國傳教士 A. Wylie (1815-1887) 一起翻譯了美國人 E. Loomis (1811-1899) 於1851年所著的 “Elements of analytic geometry and of differential and integral calculus” 一書成中文, 取名「代微積拾級」。李善蘭首先引入了微分與積分這兩個中譯名, 他大約是取自我國古代成語 “積微成著” 而來, 這個譯名確切地反映了 “微分” 與 “積分” 的涵義, 而 “積微成著” 的想法也正好反映了微分與積分的辨證關係。他在翻譯過程中, 還創造了大量中文數學名詞, 其中有許多, 如: 函數、級數、切線、法線、漸進線、拋物線、雙曲線、指數、多項式、代數等被普遍接受而一直沿用至今。他還與當時的其他學者一起翻譯了不少西方數學著作, 有助於西方數學在中國的傳播。他本人在數學上也有所創造, 如他建立了著名的 “李善蘭等式”

$$\sum_{k=0}^{n}(C_k^n)^2C_{2n}^{2n+r-1}=(C_n^{n+r})^2$$

等。由於他對當時西方數學的眞正了解及繼承了淸代乾嘉學派的影響, 所以才能翻譯出十分恰當以至一直沿用至今的那麼多的中文數學名詞。

参考文獻

1. C. B. Boyer, *The Concepts of the Calculus, A Critical and Historiacal Discussion of the Derivative and the Integrals*, Hafner Pub. Com. 1949. 中譯本: 微積分概念史, 上海: 上海人民出版社
2. 吳文俊, 龔昇教授, 「簡明微積分」讀後感。數學通報, 2000(1), 44-45。
3. 李文林, 數學史概論 (第二版), 高等教育出版社, 北京, 2002。
4. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Vol. II, Oxford University Press , 1972。中譯本: 古今數學思想, 卷2, 上海科學技術出版社, 上海, 1980。
5. 吳文俊, 世界著名數學家傳記, 科學出版社, 北京, 1995。
6. 王懷權, 數學發展史, 協進圖書有限公司, 台北, 1981。
7. E. Cartan, Sur certains express differentielles et le problem de Pfaff, *Ann. Sci. Ecole Norm.* (3) *T.* 16, 239-322.
8. H. Poincaré, *Les Methods Nourelles de la Mecanique Caleste*, 1899.
9. A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, North-Holland Pub. Com. 1974. 中譯本: 非標準分析, 北京: 科學出版社, 1980。

—本文作者龔昇任教於中國科技大學; 張德健任教於美國 Georgetown University 數學系—