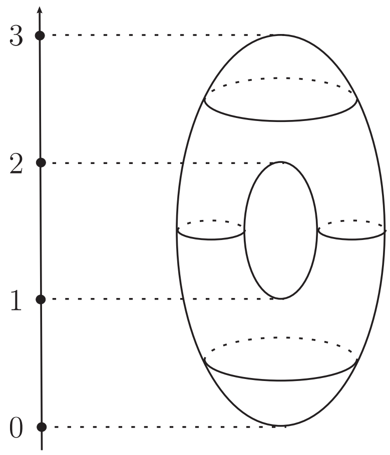
數學傳播 30卷3期, pp. 80-86

“結”論——非結論

謝春忠

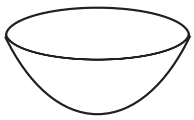
我們先回憶一下小時候的黏土遊戲 (surgery), 並列舉一例。

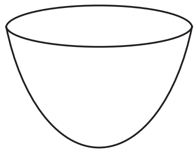
例一: 我們擬用黏土塊 (Building blocks) 來拼成游泳圈或甜甜圈; 想像該游泳圈現在置入泳池中, 形如: 圖一。

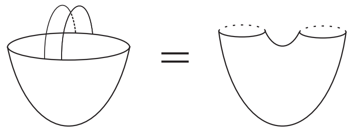


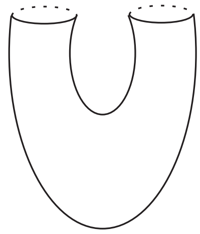
圖一

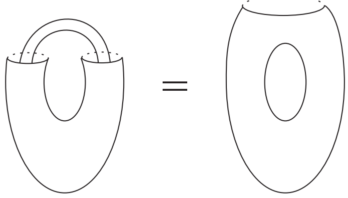
我們的黏土遊戲策略是: 1.先將游泳圈置於水面上, 使得游泳圈恰恰好沾了一小點的水, 即水位高度是一個很小的正數。這時整個水平面下的游泳圈形如圖二。2.再加點力量下壓游泳圈, 我們就發現, 只要水位上升但未達高度1的情況; 各種水平面下的部份都形如圖三。3.當水位恰恰超過高度1時, 則水平面下的游泳圈即形如圖四。4.當水位持續上升, 但都未超過高度2時, 水平面下的部份亦都形如圖五。5.當水位恰好超過2時, 則水平面下的游泳圈則形如圖六。6.當水位持續上升, 但都未超過高度3時, 則水平面下的部份亦都形如圖七。7.當水位恰恰達到3時, 則整個游泳圈剛剛好浸入水中, 此時整個游泳圈可視為: 圖八, 像戴上帽子般。

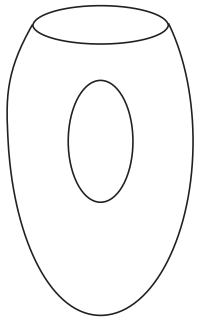

圖二

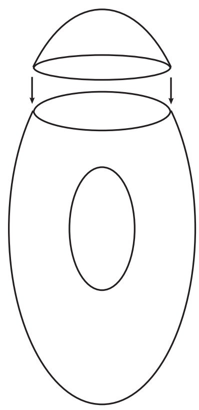

圖三


圖四

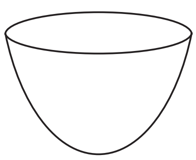

圖五

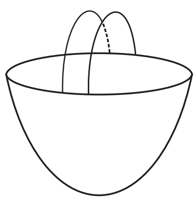

圖六

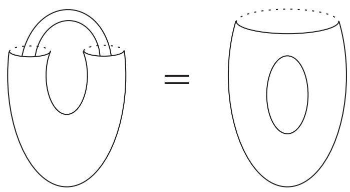

圖七

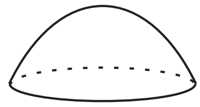

圖八

換言之, 我們的黏土遊戲, 是: (A) 先取一塊黏土捏成 (遊戲規則是, 黏土不可拉斷, 亦不可"自己黏自己") 圖九。(B) 再取另一黏土塊, 捏成長長的條狀, 然後把二端黏在 (A) 步的黏土的邊界上, 故形如圖十。(C) 再取另一黏土塊, 捏成長條狀, 把二端黏在 (B) 步的黏土的邊界上, 形如圖十一。(D) 最後, 再取一黏土塊, 捏成圓帽子形狀圖十二, 而把此帽沿 (註: 帽沿顯而易見, 是一圈圈) 黏在 (C) 步所得形狀之最上邊沿 (亦是一個圈圈)。


圖九


圖十


圖十一


圖十二

上例看似簡單的黏土遊戲 (surgery), 實是近代數學 (拓樸學) 最前端的研究之一 [8]。同樣的黏土遊戲, 可用於三維"流形"(manifold) 之上, 流形是數學專有名詞, 三維流形可簡單的想成像輪胎、球等等具邊界的三維幾何圖形, 而本文所說的三維流形是爲數學家較常用的說法: 無邊界的三維幾何圖形。但礙於篇幅的關係, 只略述相關的定理如下, 有興趣的讀者可參考 [4]。

定理一: (Wallace, Lickorish, Kirby) 任何三維“流形 (manifold)”都可由 $\mathbb{R}^3$ (或三維球, S^3) 沿著一個「結 (knot)」作黏土遊戲 (surgery) 得出。

由此, 顯而易見的, 我們對 $\mathbb{R}^3$ 上的結 (knot) 作些數學研究與探討是十分自然, 且必需的。

$\mathbb{R}^3$ 上的結論 (Knot theory in $\mathbb{R}^3$)

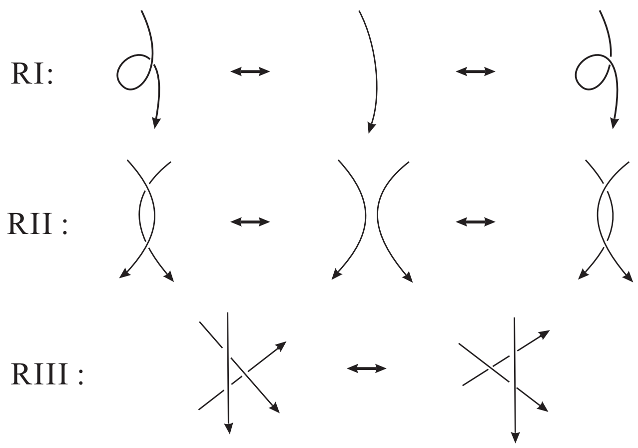
首先, 我們談談一般拓樸學 (topology) 上一個重要的問題, 那就是對“流形”作分類 (classification)。但實際上, 這樣的數學問題是幾乎辦不到的。爲此, 數學家想到了一個偷懶的方式, 那就是研究這些分類的雛形, 亦即“不變量”(invariant); 不變量學問大矣哉, 我們現在只介紹與「結論」(knot theory) 相關的不變量。其次, 我們給出“不變量”的數學定義。

定義: 一個實數值函數, $f:\{\mathbb{R}^3\text{中之任何結}\}\to\mathbb{R}$ 稱作不變量, 若且唯若, f 在任一結的同價類中取同一值。而一結 K 的同價類是由 K 歷經 $\mathbb{R}^3$ 的運動所得出的所有結所成的集合。

註解一: 我們很容易觀察到 $\mathbb{R}^3$ 的運動, 實在是不勝枚舉; 所以, 給定一個非常簡單的結 K, 光是 K 的同價類亦同樣是多且繁雜到難以備載。

悲觀地想, 不變量是天方夜譚。但我們有:

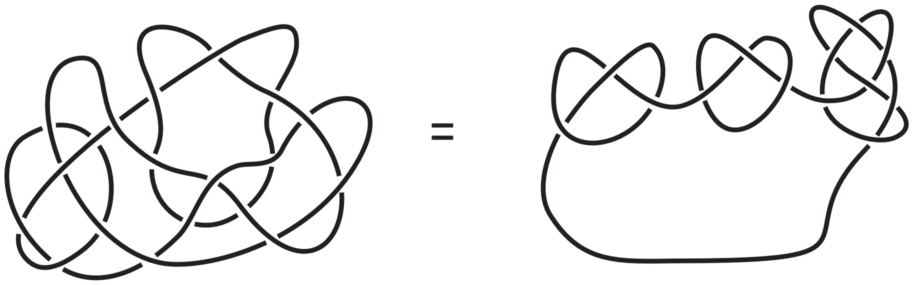
引理 (Reidemeister): 上述定義中的函數 f 是不變量, 若且唯若 f 在下面所列的三種運動下是不變的: 圖十三。



圖十三

證明: 這個引理的證明是粗淺的。我們只給個暗示: 想像, 結 (knot) 的平面表達 (稱: knot diagram) 是太陽照射下的投影。

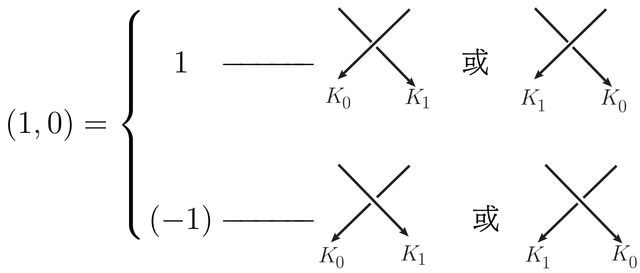
例二: 上述引理雖是粗淺, 但實際操作是趣味橫生的。例舉如下:(見圖十四) 左邊的結經 RI, RII, RIII 可轉換成右結。



圖十四

這樣的 Reidemeister 引理雖是好看, 但還是不夠具體。實言之, 如何先找出一個夠資格的函數呢? 亦即要能先定義出不變量函數, 才能用 Reidemeister 引理來檢驗。爲此, 我們提出:

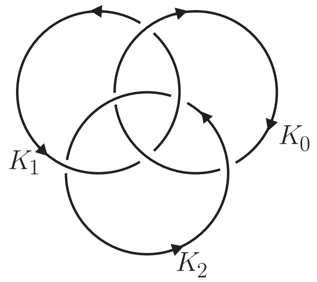
定理二 (Gauss, 1777-1855): 對任一個二分量 (two components) 的結 $K=\{K_0, K_1\}$, 則 $L_{1,0} = \sum_{K_1\cap K_0} (1,0)$ 是不變量 (稱: 高斯扣數, Gauss linking), 其中“$K_1 \cap K_0$”: 表示 K 在平面表達 (knot diagram) 下, K_1 與 K_0 的交錯處 (crossing); 且交錯符號 (1,0) 表示: 圖十五。



圖十五

證明: 這個定理利用上述 Reidemeister 引理, 只需簡單的三分鐘操作即可證得。

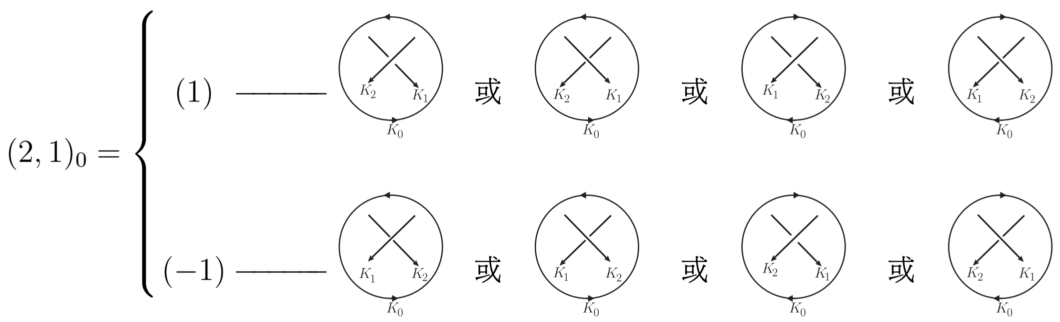
例三: 上述高斯定理雖是漂亮、簡潔, 但一般來說, 還是有點侷限。侷限之一: 它只能計算二分量的結 (knots of 2 components); 侷限之二是: 對三分量之結, 如 Borrowmean ring $K = \{K_0, K_1, K_2\}$, 圖十六, 上述高斯定理並不能說出任何數學內涵: 意即 $L_{i,j} = 0$ for $i \neq j$, 且 $i, j = 0, 1, 2$。但顯而易見的是 K 的連結, 相扣 (linking) 情況是不平凡的 (non-trivial)—— 意即 K 不能利用空間運動, 拉開成三個彼此不相扣的圈圈。



圖十六

基於如 Borrowmean ring 這樣的例子, 我們擬提出一種「高階扣數」(higher linkings) 的概念。例如, 對如同 Borrowmean ring 樣的三分量之結 $K=\{K_0,K_1,K_2\}$; 若假設任何配對的高斯扣數 (Gauss linking) 都等於零: $L_{i,j}=0$ for $i\neq j$, $i,j=0,1,2$, 則我們希望能定義出一個高階的扣數。

定理三 (Hsieh): 對任何一個三分量的結 $K=\{K_0,K_1,K_2\}$, 假設任何配對高斯扣數都是零—— 亦即 $L_{i,j}=0$ for $i\neq j$, 且 $i,j=0,1,2$, 則 $L_{2,1,0}=(2,1)_0+\sum\limits_{1\underset{0}{<}2}(1,0)\cdot(2,0)+\sum\limits_{2\underset{1}{<}0}(2,1)\cdot(0,1)+\sum\limits_{0\underset{2}{<}1}(0,2)\cdot(1,2)$ (稱二階扣數, linking of second degree) 是不變量; 其中 (i,j), 如同高斯定理, 表示分量 K_i 及分量 K_j 的交錯符號, 而 $1\underset{0}{<}2$, (或 $2\underset{1}{<}0$, $0\underset{2}{<}1$) 乃是: 任意選定基點 (Base point) $x_0\in K_0$, $x_1\in K_1$, $x_2\in K_2$ 後, 視 K_0, K_1 及 K_2 如同具二基點的開線段, 亦因之 K_j, $j=0,1,2$ 視成“全序的”(totally ordered), 如此“ $1\underset{0}{<}2$ ”表示 $(1,0)=$“ $K_1\cap K_0$ ”小於 $(2,0)=$“ $K_2\cap K_0$ ” ——在此, 我們如同高斯定理敍述中, 採用“ $K_i\cap K_j$ ”符號共識。最後 $(2,1)_0$ 乃表示: 圖十七。



圖十七

證明: 利用上述 Reidemeister 引理, 即可。

註解二: 對如同上述的三分量結 $K = \{K_0, K_1, K_2\}$, 其中最重要的假設是低階扣數皆是零: $L_{i,j} = 0$ for $i \neq j$ and $i, j = 0, 1, 2$。所以我們稱 $L_{2,1,0}$ 是「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking)。更甚者, 這個低階零扣數假設是用於證明: $L_{2,1,0}$ 是與基點 $\{x_0, x_1, x_2\}$ 選取無關的。

註解三: 這樣故事, 並不止於三分量之結。亦即對任何 $(n+1)$ 分量之結 $K = \{K_0, \ldots, K_n\}$, 若任何低階扣數都是零, 則我們可以定義出第 n 階扣數 (linking of degree n), 不只這樣, 我們還可以算出組合公式 ([1,2])。並且這些「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking), 還可以表達成「擾攝量子場論」中的費因曼圖之和 (sums of Feynman diagrams in Perturbative quantum field theory)。

非結論

「結論」之復興乃是很晚近的事, 尤其是「結論」與物理之關連, 更是近代物理與數學之當前課題。大抵上, 整個理論還是很不成熟的。有鑑於此, 以下, 列出本人對此支近代數學一些不成熟之註解 (非結論), 以作爲本文之結論。

1. 時下流行的「結論」, 乃肇基於 Jones 所發現的多項式不變量 (polynomial invariant)[3] 及其相關之物理意義 [9]。但至今尙欠缺的是: 仍然找不出這些多項式不變量的拓樸意義。有鑑於此, 值得一提的是, 在 [5]一文中, 高斯扣數出現於此類多項式之前二項係數。
2. 一般而言, 擾攝量子場量中的費因曼圖都是算不出來的。上述的「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking) 可在費因曼圖的計算上提供一些助益。
3. 同上所述, 我們只會定義並計算「初啓非零扣數 (first non-vanishing linking)」。現在問: 一般扣數 (linking) 如何定義? 如何計算? 之前, W. Massey 及 J. Milnor 定義出一些相關概念, 可惜發展很是有限 [7]。
4. 最後, 還是要問「初啓非零扣數 (first non-vanishing linking)」如何在一般多項式不變量中出現?
5. Jones 的多項式不變量 (Polynomial invariant) 引發更多類似的研究, 其中較一般性的不變量, 稱“全宇不變量”(universal invariant)[6]。此類不變量, 雖代數、物理意義清楚, 但拓樸內涵仍待研究探討。
6. 用線性代數的對偶 (Duality) 觀點來看「結論」。把整個結 (knot) 的全體當做一個大集合—— 當然, 最好還有其他的數學結構——吾人擬在此大集合上定義不變量, 以進而研究結的分類問題 (classification)。基於上述「初啓非零扣數」(first non-vanishing linking) 之精神, 我認爲, 此量子場論之費因曼圖乃扮演不錯的對偶角色; 亦即, 該能利用費因曼圖之線性組合來建構結的不變量。

参考文獻

1. C. C. Hsieh, Combinatoric and diagrammatic study of knot theory, preprint.
2. C. C. Hsieh, L. Kauffman and M. Tsau, Massey-Milnor linking in knot theory, preprint.
3. L. Kauffman, Knots and physics, 3rd edition, World Scientific, 2001.
4. W. B. R. Lickorish, An introduction to knot theory, Springer Verlag, 1997.
5. H. Murakami, On the derivatives of the Jones polynomials, Kobe J. Math., 3(1986), 61-64.
6. T. Ohtsuki, Quantum invariants-A study of knots, 3-manifolds and their sets, World Scientific, 2002.
7. R. Porter, Milnor u-invariants and Massey products, Trans. Amer. Soc., 257(1980), 39-71.
8. D. Rolfsen, Knots and links, Publish or Perish, 1976.
9. E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Physics, 121(1989), 351-399.

(本文爲作者於民國94年10月29日中央研究院「院區開放日」於數學所演講的部分內容, 原刊載於中央研究院「週報」107期"知識天地", 感謝「週報」編輯委員同意轉載。)

—本文作者任職於中央研究院數學所—