數學傳播　30卷3期, pp. 53-65

以費氏數列表示的無窮級數和與收斂半徑

林智勇・易正明・許天維

壹. 前言

筆者在閱讀日文期刊時, 讀到一篇「$\dfrac{1}{89}$ 的不可思議」(註1), 本文作者萱場 修老師利用無窮級數對消, 推證出 $\dfrac{1}{89}$ 可以以費氏數列的無窮級數來表示。首先, 利用電算機可計算出 $\dfrac{1}{89}$ 的值:

$$\frac{1}{89}=0.011235955056179 77\ldots$$

此數字的小數第二位是1, 第三位是1, 而其第四位是2, 剛好是第二位與第三位的相加, 而第五位是3, 剛好也是第三位與第四位的相加, 因此萱場 修老師推測 $\dfrac{1}{89}$ 可以用費氏數列的一種無窮級數來表示:

	0	1	1	2	3	5	9	5	5	0	5	6	1	7	9	7
F_1		1														
F_2			1													
F_3				2												
F_4					3											
F_5						5										
F_6							8									
F_7							1	3								
F_8								2	1							
F_9									3	4						
F_{10}										5	5					
F_{11}											8	9				
F_{12}											1	4	4			
F_{13}												2	3	3		
F_{14}													3	7	7	
F_{15}														6	1	0

最後萱場 修老師證明了 $\dfrac{1}{89}$ 可以用下列的無窮級數來表示:

$$\frac{1}{89}=\sum_{k=1}^{\infty}F_k\Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1}$$

筆者利用類似的方法, 發現了 $\dfrac{1}{71}$ 這個分數也可以用費氏數列的無窮級數來表示。首先, 利用電算機可算出 $\dfrac{1}{71}$ 的值:

$$\frac{1}{71}=0.01408450704225352\,11\ldots$$

而筆者將此值用表格表示:

	0	1	4	0	8	4	5	0	7	0	4	2	2	5	3	5
F_2		1														
F_4			3													
F_6				8												
F_8				2	1											
F_{10}					5	5										
F_{12}					1	4	4									
F_{14}						3	7	7								
F_{16}							9	8	7							
F_{18}							2	5	8	4						
F_{20}								6	7	6	5					
F_{22}								1	7	7	1	1				
F_{24}									4	6	3	6	8			
F_{26}									1	2	1	3	9	3		
F_{28}										3	1	7	8	1	1	
F_{30}											8	3	2	0	4	0

於是, 筆者推測 $\dfrac{1}{71}$ 應可以表示爲:

$$\frac{1}{71}=\sum_{k=1}^{\infty}F_{2k}\Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1}$$

然而在筆者用此方法推證出 $\dfrac{1}{71}$ 的型式後, 有試著想找出一般式, 但是在用此推證方法遇到許多困難, 後來參閱了數學傳播季刊第25期林炳炎老師所寫的一篇文章「有關費氏數之無窮級數的分數和」(註2), 其中有關一般式的介紹, 筆者嘗試融合了萱場 修老師的方法去推導一般

式的型式。本文一開始先提出費氏數列型式的說明, 後來應用萱場 修老師推證 $\frac{1}{89}$ 的方法導出 $\frac{1}{71}$, 最後順利地推得一般式的型式。在此, 筆者先介紹一般式的型式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)} = \frac{F_a r^{2b}}{1 - L_a r^b + (-1)^a r^{2b}}$$

當 $a=1$, $b=1$, $r=\frac{1}{10}$, $L_1=1$, 我們可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1} = \frac{1}{89}$$

而當 $a=2$, $b=1$, $r=\frac{1}{10}$, $L_2=3$, 我們可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k} \Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1} = \frac{1}{71}.$$

貳. 本文

一. 費氏數列與路卡斯數列

首先, 費氏數列的定義是

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \in N$$

而利用這樣的定義, 我們可以推導出費氏數列的一般式

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big] \tag{1}$$

其次, 路卡斯數列的定義是

$$L_1 = 1 \quad L_2 = 3 \quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad n \in N$$

而利用這樣的定義, 我們也可以推導路卡斯數列的一般式

$$L_n = \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n \tag{2}$$

二. 一般式 $\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)}$ 的推導

筆者參閱了林炳炎老師如何利用費氏數列與路卡斯數列的一般式, 推導出費氏數列的無窮級數的分數和公式:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak}(\frac{1}{10})^{b(k+1)} = \frac{F_a}{(-1)^a - L_a(10^b) + 10^{2b}}.$$

在這個公式, 林老師是推證了在 $r=\dfrac{1}{10}$ 的型式, 筆者現在想要利用林老師的方法來將此式子一般化, 其一般化的型式是:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)} = \frac{F_a r^{2b}}{1 - L_a r^b + (-1)^a r^{2b}} \tag{3}$$

以下, 筆者要來推證 (3) 式。

首先, 我們定義一個級數和

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)}$$

由 (1) 式我們可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{ak} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{ak}\Big] r^{b(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{(1+\sqrt{5})^a}{2^a} r^b\Big)^k - \Big(\frac{(1-\sqrt{5})^a}{2^a} r^b\Big)^k\Big]\end{aligned}$$

又因爲

$$(1\pm\sqrt{5})^a = 2^{a-1}(L_a \pm F_a\sqrt{5})$$

此式是利用(1) 式與 (2) 式推得, 筆者將此推導放在附錄, 有興趣的讀者可以參閱。由此式可得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{2^{a-1}(L_a + F_a\sqrt{5})}{2^a} r^b\Big)^k - \Big(\frac{2^{a-1}(L_a - F_a\sqrt{5})}{2^a} r^b\Big)^k\Big]$$

則

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{(L_a + F_a\sqrt{5})}{2} r^b\Big)^k - \Big(\frac{(L_a - F_a\sqrt{5})}{2} r^b\Big)^k\Big]$$

如此形成兩個無窮等比級數, 令 $\dfrac{(L_a+F_a\sqrt{5})}{2}r^b=x$, $\dfrac{(L_a-F_a\sqrt{5})}{2}r^b=y$, 在公比介在 -1 到 1 之間時, 利用無窮等比級數的公式可得總和爲

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{x}{1-x}\Big)-\Big(\frac{y}{1-y}\Big)\Big]\\&=\frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\frac{x-y}{1-(x+y)+xy}\Big]\end{aligned}$$

利用四則運算與 F_a 和 L_a 的定義可得

$$\begin{aligned}x-y&=\sqrt{5}F_ar^b\\x+y&=L_ar^b\\xy&=(-1)^ar^{2b}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big(\frac{\sqrt{5}F_ar^b}{1-L_ar^b+(-1)^ar^{2b}}\Big)$$

則

$$\sum_{k=1}^{\infty}F_{ak}r^{b(k+1)}=\frac{F_ar^{2b}}{1-L_ar^b+(-1)^ar^{2b}}\qquad\text{(得證)}$$

三. $\sum_{k=1}^{\infty}F_k\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}=\frac{1}{89}$ 的推導

在前面, 筆者介紹了林炳炎老師利用費氏與路卡斯兩個數列的一般式去推導出其無窮級數分數和的一般型式, 而在參閱了萱場 修老師的「$\dfrac{1}{89}$ 的不可思議」文章, 想用另一種角度來推導其一般型式。筆者推測萱場 修老師的想法, 是利用一些技巧, 使得出現可以相消的項。這種技巧, 我們在高中推導等比級數的公式也有用過。現在, 筆者將介紹萱場 修老師的推導方法。

首先, 我們定義一個 n 項的級數和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}F_kr^{k+1}=F_1r^2+F_2r^3+\sum_{k=1}^{n-2}F_{k+2}r^{k+3}\tag{4}$$

其次, 爲了要利用費氏數列的定義 $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$, 我們將 S_n 做下列的處理

$$rS_n=\sum_{k=1}^{n}F_kr^{k+2}=F_1r^3+\sum_{k=1}^{n-2}F_{k+1}r^{k+3}+F_nr^{n+2}\tag{5}$$

$$r^2S_n=\sum_{k=1}^{n}F_kr^{k+3}=\sum_{k=1}^{n-2}F_kr^{k+3}+F_{n-1}r^{n+2}+F_nr^{n+3}\tag{6}$$

如此, 我們出現了可以相消的項, 將 (4) 式減 (5) 式後再減 (6) 式可得

$$(1-r-r^2)S_n = F_1r^2+F_2r^3-F_1r^3+\sum_{k=1}^{n-2}(F_{k+2}-F_{k+1}-F_k)r^{k+3}$$
$$+(-F_nr^{n+2}-F_{n-1}r^{n+2}+F_nr^{n+3}) \tag{7}$$

其中 (7) 式右側的第4項, 因爲費氏數列的定義是 $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$, 故爲0。

再來我們要證明 (7) 式右側的第5項爲0。利用 (1) 式可得

$$F_n\Big(\frac{1}{10}\Big)^{n+1} = \Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{20}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{20}\Big)^n\Big] \tag{8}$$

因爲 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{20}$ 與 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{20}$ 都介在 -1 到 1 之間, 則當 n 趨近於無窮大時, (8) 式會趨近於 0, 所以 (7) 式右側的第5項亦趨近於 0。因此當 r 爲 $\dfrac{1}{10}$ 時, 則

$$\Big(1-\frac{1}{10}-\Big(\frac{1}{10}\Big)^2\Big)\sum_{k=1}^{\infty}F_k\Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1} = F_1\Big(\frac{1}{10}\Big)^2+F_2\Big(\frac{1}{10}\Big)^3-F_1\Big(\frac{1}{10}\Big)^3$$

則

$$\sum_{k=1}^{\infty}F_k\Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1} = \frac{1}{89} \qquad \text{(推證)}$$

我們利用之前的(3) 式, 將 $a=1$, $b=1$, $r=\dfrac{1}{10}$, $L_1=1$代入, 也會得到同樣的結果。

四. $\sum_{k=1}^{\infty}F_{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}=\frac{1}{71}$ 的推導

參閱了萱場 修老師的文章, 筆者試著利用萱場 修老師的方法, 推導當 (3) 式中 $a=2$, $b=1$, $r=\dfrac{1}{10}$, $L_2=3$ 所形成的無窮級數的和。首先定義一個新的 n 項級數和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}F_{2k}r^{k+1}$$
$$= F_2r^2+\sum_{k=1}^{n-1}F_{2k+2}r^{k+2} \tag{9}$$
$$= F_2r^2+\sum_{k=1}^{n-2}F_{2k+2}r^{k+2}+F_{2n}r^n \tag{10}$$

其次將 S_n 做下列的處理

$$rS_n = \sum_{k=1}^{n}F_{2k}r^{k+2} = \sum_{k=1}^{n-1}F_{2k}r^{k+2}+F_{2n}r^{n+2} \tag{11}$$

爲了要產生費氏數列的奇數項, 我們將 (9) 式減 (11) 式可得

$$\begin{aligned}(1-r)S_n &= F_2r^2+\sum_{k=1}^{n-1}(F_{2k+2}-F_{2k})r^{k+2}-F_{2n}r^{n+2}\\ &= F_2r^2+\sum_{k=1}^{n-1}F_{2k+1}r^{k+2}-F_{2n}r^{n+2} \qquad (12)\\ &= F_2r^2+\sum_{k=1}^{n-2}F_{2k+1}r^{k+2}+F_{2n-1}r^{n+1}-F_{2n}r^{n+2} \qquad (13)\end{aligned}$$

爲了利用 $F_{2k+3}-F_{2k+2}-F_{2k+1}=0$, 我們對 (12) 式做下列的處理

$$\begin{aligned}\frac{(1-r)}{r}S_n &= F_2r+\sum_{k=1}^{n-1}F_{2k+1}r^{k+1}-F_{2n}r^{n+1}\\ &= F_2r+F_3r^2+\sum_{k=1}^{n-2}F_{2k+3}r^{k+2}-F_{2n}r^{n+1} \qquad (14)\end{aligned}$$

則用 (14) 式去減 (10) 式再去減 (13) 式可得

$$\begin{aligned}\frac{(1-3r+r^2)}{r}S_n &= F_2r+F_3r^2-F_2r^2-F_2r^2+\sum_{k=1}^{n-2}(F_{2k+3}-F_{2k+2}-F_{2k+1})r^{k+2}\\ &\quad +(-F_{2n}r^{n+1}-F_{2n}r^{n+1}-F_{2n-1}r^{n+1}+F_{2n}r^{n+2}) \qquad (15)\end{aligned}$$

其中 (15) 式右側的第5項, 因爲費氏數列的定義是 $F_{2k+3}=F_{2k+2}+F_{2k+1}$, 故爲0。再來我們要證明 (15) 式右側的第6項爲0。利用 (1) 式可得

$$F_{2n}\Big(\frac{1}{10}\Big)^{n+1}=\frac{1}{10\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}\Big)^{2n}-\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}\Big)^{2n}\Big] \qquad (16)$$

因爲 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$ 與 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}$ 都介在 -1 到 1 之間, 則當 n 趨近於無窮大時, (16) 式會趨近於 0, 所以 (15) 式右側的第6項亦趨近於0。因此當 r 爲 $\dfrac{1}{10}$ 時, 則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-3r+r^2)}{r}S_n=F_2r+F_3r^2-F_2r^2-F_2r^2=r+2r^2-r^2-r^2=r$$

則

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{r^2}{1-3r+r^2}$$

因此可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}F_{2k}\Big(\frac{1}{10}\Big)^{k+1}=\frac{1}{71} \qquad \text{(推證)}$$

同理, 我們將 $a=2$, $b=1$, $r=\dfrac{1}{10}$, $L_2=3$ 代入 (3) 式, 也會得到同樣的結果。

五. 應用

為了利用萱場 修老師方法去推證一般形式時, 筆者要先推證這個關係式:

$$L_aF_{ak}=F_{a(k+1)}+(-1)^aF_{a(k-1)}$$

首先筆者先令兩個參數

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{17}$$

利用 (1) 式與 (2) 式可得

$$\begin{aligned}L_aF_{ak}&=(\alpha^a+\beta^a)\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{ak}-\beta^{ak})\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\alpha^{a(k+1)}-\beta^{a(k+1)}+\alpha^a\beta^{ak}-\alpha^{ak}\beta^a\Big]\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\alpha^{a(k+1)}-\beta^{a(k+1)}+\alpha^a\beta^a\big(\alpha^{a(k-1)}-\beta^{a(k-1)}\big)\Big]\end{aligned}$$

又因為 $\alpha\beta=-1$, 因此可得

$$L_aF_{ak}=F_{a(k+1)}+(-1)^aF_{a(k-1)}. \tag{18}$$

再來, 筆者利用萱場 修老師的方法推導費氏數列在無窮級數的分數和一般式。首先, 我們先定義一個級數和:

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}F_{ak}r^{b(k+1)}\qquad a\in N, b\in N\\&=F_ar^{2b}+F_{2a}r^{3b}+\sum_{k=1}^{n-2}F_{a(k+2)}r^{b(k+3)}\end{aligned} \tag{19}$$

此時筆者對 S_n 做了以下的變化

$$r^bL_aS_n=\sum_{k=1}^{n}L_aF_{ak}r^{b(k+2)}=L_aF_ar^{3b}+\sum_{k=1}^{n-1}L_aF_{a(k+1)}r^{b(k+3)}$$

利用 (18) 式可得

$$\begin{aligned}r^bL_aS_n=F_{2a}r^{3b}&+\sum_{k=1}^{n-2}\Big[F_{a(k+2)}+(-1)^aF_{ak}\Big]r^{b(k+3)}\\&+F_{a(n+1)}r^{b(n+2)}+(-1)^aF_{a(n-1)}r^{b(n+2)}\end{aligned} \tag{20}$$

在 (20) 式中, 筆者透過費氏數列定義, 運算中出現 $F_{a(k+2)}$ 與 F_{ak} 的項, 而 S_n 有 $F_{a(k+2)}$ 項, 爲了要讓 F_{ak} 此項能相互對消, 筆者再對 S_n 做了以下的變化

$$\begin{aligned}(-1)^a r^{2b} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^a F_{ak} r^{b(k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^a F_{ak} r^{b(k+3)} + (-1)^a \left[F_{a(n-1)} r^{b(n+2)} + F_{an} r^{b(n+3)} \right] \end{aligned} \tag{21}$$

此時, 我們將 (19) 式加 (21) 式後再減 (20) 式, 此時 $\sum$ 內的項會彼此相消, 如此可得

$$\left[1-L_a r^b+(-1)^a r^{2b}\right] S_n = F_a r^{2b}+F_{2a} r^{3b}-F_{2a} r^{3b}+\left[(-1)^a F_{an} r^{b(n+3)}-F_{a(n+1)} r^{b(n+2)}\right] \tag{22}$$

同理, 若 (22) 式右側的第 4 項的值在 n 趨近於無窮大時爲 0, 可得

$$\left[1 - L_a r^b + (-1)^a r^{2b}\right] \lim_{n\to\infty} S_n = F_a r^{2b}$$

則可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)} = \frac{F_a r^{2b}}{1 - L_a r^b + (-1)^a r^{2b}} \qquad \text{(得證)}$$

然而並非所有的 r 都符合這個公式的, 例如 $r > 1$ 的值, 會使得 (3) 式中左側與右側不相等, 但是 $-1 < r < 1$ 時, 左側與右側也不一定相等, 這是因爲當 (3) 式左側的 $\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)}$ 收斂, (3) 式才會成立。在下一個章節筆者將會推導 r 的收斂半徑, 也就是推導 r 在什麼範圍內才會使得 (3) 式左側的 $\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak} r^{b(k+1)}$ 收斂, 進而使得 (3) 式成立。在此筆者先提供一個 r 雖然介在 -1 到 1 之間但是依然不合的例子作爲此章節的結束。例如將 $a = 1$, $b = 1$, $r = 0.7$, $L_1 = 1$ 代入公式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k (0.7)^{k+1} = -\frac{49}{19}$$

左邊都是正的數字相加, 得來的結果卻是負的, 這是矛盾的! 可以知道當 $-1 < r < 1$, 這個式子並不一定成立, 可以推測此式子的成立有更小的收斂範圍。

六. 收斂範圍

在推導 (3) 式時, 不論是利用林炳炎老師或是萱場 修老師的方法, 這兩位老師都有在某個條件成立的狀況下才可導出, 並非所有的 r 都可成立。林炳炎老師的方法, 在推導過程中會出現兩個無窮等比級數, 而無窮等比級數的和要收斂的充要條件就是其公比要介在 -1 到 1 之

間; 萱場 修老師的方法, 推導中出現了這個式子, 即前文的 (7) 式

$$(1-r-r^2)S_n = F_1r^2+F_2r^3-F_1r^3+\sum_{k=1}^{n-2}(F_{k+2}-F_{k+1}-F_k)r^{k+3} \\ +(-F_nr^{n+2}-F_{n-1}r^{n+2}-F_nr^{n+3}) \tag{7}$$

而當 n 趨近於無窮大時, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}F_nr^{n+1}=0$, (7) 式右側的第5項就會趨近於0, 而萱場 修老師利用這個想法去推導當 $r=\dfrac{1}{10}$ 時 $\lim\limits_{n\to\infty}F_nr^{n+1}=0$, 進而可得 (7) 式右側的第5項爲0而導出公式。

兩位老師雖然推導的方式不同, 但是筆者分別依循兩位老師的想法所推導出的結果都是一樣的。在此, 筆者以萱場 修老師的想法來嘗試推導 r 的收斂範圍, 而以林炳炎老師的想法的推導, 筆者將其放至附錄, 有興趣的讀者可以參閱。

筆者在推導一般式的過程中, 出現了下列的式子, 即前文的 (22) 式

$$\Big[1-L_ar^b+(-1)^ar^{2b}\Big]S_n = F_ar^{2b}+F_{2a}r^{3b}-F_{2a}r^{3b}+\Big[(-1)^aF_{an}r^{b(n+3)}-F_{a(n+1)}r^{b(n+2)}\Big] \tag{22}$$

當 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{an}r^{b(n+1)}=0$ 時, 我們就可以知道 (22) 式右側的第4項會趨近於0。利用費氏數列定義 (1) 式以及 (17) 式中筆者所令的兩個參數 α 與 β 可得

$$\lim_{n\to\infty}F_{an}r^{b(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\alpha^ar^b\Big)^n-\Big(\beta^ar^b\Big)^n\Big] \tag{23}$$

若 $-1<\alpha^ar^b<1$ 且 $-1<\beta^ar^b<1$ 時, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{an}r^{b(n+1)}=0$。因爲 β 小於零, α 大於零, 因此 $\beta^a=(-1)^a|\beta|^a$ 且 $\alpha^a=|\alpha|^a$, 而分別代入 $-1<\alpha^ar^b<1$ 與 $-1<\beta^ar^b<1$ 式子中, 並利用四則運算可得

$$-\Big(\frac{1}{|\alpha|}\Big)^{\frac{a}{b}}<r<\Big(\frac{1}{|\alpha|}\Big)^{\frac{a}{b}} \qquad -\Big(\frac{1}{|\beta|}\Big)^{\frac{a}{b}}<r<\Big(\frac{1}{|\beta|}\Big)^{\frac{a}{b}}$$

因爲 $\alpha\beta=-1$, 即 $|\alpha|\times|\beta|=1$ 可得

$$-|\beta|^{\frac{a}{b}}<r<|\beta|^{\frac{a}{b}} \qquad -|\alpha|^{\frac{a}{b}}<r<|\alpha|^{\frac{a}{b}}$$

又因爲

$$|\alpha|>|\beta|$$

則同時成立的狀況是在比較小的範圍, 故可得 r 的收斂範圍

$$-|\beta|^{\frac{a}{b}}<r<|\beta|^{\frac{a}{b}}$$

即

$$-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{a}{b}} < r < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{a}{b}} \tag{24}$$

如此可知當 (24) 式成立時, $\lim\limits_{n\to\infty} F_{an}r^{b(n+1)} = 0$, 因此可得 (22) 式右側的第4項在 n 趨近於無窮大時會趨近於0。有了 (24) 式, 就可以探討爲什麼當 $a=1$, $b=1$, $r=0.7$, $L_1=1$ 代入 (3) 式會產生不合, 筆者將這些值代入 (24) 式可得 r 的收斂半徑

$$-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{1}} < r < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{1}}$$

而 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 此值爲 $0.618\ldots$, 因此 $r=0.7$ 超過了收斂半徑, 所以才會使得此不合理的狀況。

參. 結論

本文推導出費氏數列的無窮級數的一般式以及其適用的範圍

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{ak}r^{b(k+1)} = \frac{F_a r^{2b}}{1-L_a r^b + (-1)^a r^{2b}} \tag{3}$$

$$-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{a}{b}} < r < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{a}{b}} \tag{24}$$

其中 $a \in N$, $b \in N$。例如, 當 $a=1$, $b=1$, $L_1=1$, $r=0.3$ 時, 代入 (3) 式可得

$$(0.3)^2 + (0.3)^2 + 2(0.3)^4 + 3(0.3)^5 + 5(0.3)^6 + \cdots = \frac{9}{61}$$

筆者參閱了兩位老師的方法, 一是利用費氏數列的定義去直接求得, 另外一個方法是利用無窮級數的對消方法求得, 後者的技巧, 在高中學習等比級數和的推導, 都有出現, 例如在高中推導等比級數時, 我們先定義一個 n 項級數和, 並對此級數和乘以 r 而得

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ rS_n &= \quad\ + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \end{aligned}$$

如此, 兩式左右各自相減即可對消許多項而使得只留下前後兩項, 而後推導出等比級數公式, 本文所使用的想法即是類似這樣的想法。

而 (3) 式的適用範圍, 並非是一般多數人認爲的 $-1 < r < 1$, 而是有更小的收斂範圍, 也就是筆者所推導的 (24) 式。例如當 $a=2$, $b=1$, $L_2=3$, $r=0.4$ 時, 代入 (3) 式左式可得 $\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(0.4)^{(k+1)}$, 而右式可得 $\dfrac{F_2(0.4)^2}{1-3(0.4)+(-1)^2(0.4)^2}$, 且其值會等於 -4, 一個

正項級數和的結果是負的, 顯然是矛盾的。這是因爲當 $a=2$, $b=1$, $L_2=3$ 時, 收斂半徑爲 $-\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{\frac{2}{1}}<r<\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{\frac{2}{1}}$, 而 $\Big(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{2}$ 近似爲 $0.3819\ldots$, $r=0.4$ 超過其收斂範圍, 因此才會產生矛盾。

上述的題材可以提供高中學習級數和的素材, 並有助於高中生在等比級數的推理訓練; 也能提供一個收斂範圍的例子, 澄清學習者誤以爲只要 r 在 $(-1,1)$ 時, 該類級數和必收斂的迷思。

肆. 附錄

一. $(1\pm\sqrt{5})^a=2^{a-1}(L_a\pm F_a\sqrt{5})$ 的推導

利用兩個數列的一般式

$$F_a=\frac{1}{(\alpha-\beta)}(\alpha^a-\beta^a) \tag{A}$$

$$L_a=\alpha^a+\beta^a \tag{B}$$

利用四則運算將 (A) 式做下列的處理

$$(\alpha-\beta)F_a=(\alpha^a-\beta^a)$$

則

$$\sqrt{5}F_a=(\alpha^a-\beta^a) \tag{C}$$

若我們需要算出 α^a, 則只要讓 (B) 式與 (C) 式左右各自相加可得

$$2\alpha^2=L_a+\sqrt{5}F_a$$
$$\Rightarrow\ (1+\sqrt{5})^a=2^{a-1}(L_a+\sqrt{5}F_a)$$

同理, 若要算出 β^a, 只要讓 (B) 式與 (C) 式左右各自相減可得

$$2\beta^2=L_a-\sqrt{5}F_a$$
$$(1-\sqrt{5})^a=2^{a-1}(L_a-\sqrt{5}F_a)$$

二. 另一個方法求得收斂半徑

在本文中, 筆者利用林炳炎老師的想法來推導費氏數列在無窮級數的分數和的過程中, 會出現兩個無窮等比級數

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{r^b}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{(L_a+F_a\sqrt{5})}{2}r^b\Big)^k-\Big(\frac{(L_a-F_a\sqrt{5})}{2}r^b\Big)^k\Big]$$

因此, 若 S_n 要收斂, 則

$$-1 < \frac{(L_a + F_a\sqrt{5})}{2} r^b < 1$$
$$-1 < \frac{(L_a - F_a\sqrt{5})}{2} r^b < 1$$

又因爲

$$\begin{aligned} & L_a + F_a\sqrt{5} = 2\alpha^a \\ & L_a - F_a\sqrt{5} = 2\beta^a \\ \Rightarrow \quad & -1 < \alpha^a r^b < 1 \\ & -1 < \beta^a r^b < 1 \end{aligned}$$

因爲 β 小於零, α 大於零, 因此 $\beta^a = (-1)^a|\beta|^a$ 且 $\alpha^a = |\alpha|^a$, 而分別代入 $-1 < \alpha^a r^b < 1$ 與 $-1 < \beta^a r^b < 1$ 式子中, 並利用四則運算可得

$$-\Big(\frac{1}{|\alpha|}\Big)^{\frac{a}{b}} < r < \Big(\frac{1}{|\alpha|}\Big)^{\frac{a}{b}} \qquad -\Big(\frac{1}{|\beta|}\Big)^{\frac{a}{b}} < r < \Big(\frac{1}{|\beta|}\Big)^{\frac{a}{b}}$$

因爲 $\alpha\beta = -1$, 即 $|\alpha| \times |\beta| = 1$ 可得

$$-|\beta|^{\frac{a}{b}} < r < |\beta|^{\frac{a}{b}} \qquad -|\alpha|^{\frac{a}{b}} < r < |\alpha|^{\frac{a}{b}}$$

又因爲

$$|\alpha| > |\beta|$$

則同時成立的狀況是在比較小的範圍, 故可得 r 的收斂範圍

$$-|\beta|^{\frac{a}{b}} < r < |\beta|^{\frac{a}{b}}$$

即

$$-\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{\frac{a}{b}} < r < \Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{\frac{a}{b}} \qquad \text{(得證)}$$

伍. 參考文獻

1. 林炳炎, 奇妙的費氏數列之一,「數學傳播」, 第6卷2期 (民71), 34-38。
2. 林炳炎, 有關費氏數之無窮級數的分數和,「數學傳播」, 第7卷1期 (民72), 27-33。
3. 林琦焜, 從等比級數談起,「數學傳播」, 第22卷2期 (民87), 42-53。
4. 萓場修, $\frac{1}{89}$の不思議。「數學セミナ仈 」, 第49卷9號 (2004.9), 53-55。

—本文作者林智勇就讀於台中教育大學數學教育研究所, 易正明任教於台中教育大學數學教育研究所, 許天維任教於台中教育大學教育測驗統計研究所—