數學傳播 30卷3期, pp. 42-52

以微積分方法探討三角函數的性質

賈乃輝・魏文恩・郭倍綸・劉玠玟・ 羅春光*

摘要: 三角函數的性質可分成恆等式、和角公式、週期與對稱性質和微分公式。此研究是嘗試運用微分方法和積分方法來重新推導這些性質, 從而更了解該等函數。這好比一間房子有三道門, 每一道門都可以進入房間, 一窺全貌。

1. 前言

三角函數是高中數學課程中十分重要的一個課題, 共有六個函數。以 $\sin x$ 和 $\cos x$ 兩個函數作爲代表。一方面, 它們能模擬科學上大部分的振盪行爲; 另一方面, 它們與幾何、解析幾何和微積分有非常密切的關係。三角函數的性質大概可分恆等式、和角公式、週期與對稱性質和微分公式。此研究是嘗試運用微分方法和積分方法來重新推導這些性質, 從而更了解該等函數。這好比一間房子有三道門, 每一道門都可以進入房間, 一窺全貌。

令單位圓上一點座標 $P(x_0, y_0)$, 定義 $x_0 = \cos\theta$, $y_0 = \sin\theta$ 其中 θ 爲線段OP (O 爲原點) 和 X 軸的夾角。這是標準高中數學課程裡定義 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的方式, 並可以此推導它們的性質。而其他的函數 $\tan x, \cot x, \sec x$ 和 $\csc x$ 的性質則可由 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的性質一一推導出來。函數 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的性質可分爲以下幾部分:

(A) 恆等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1\ .$$

(B) 和角公式

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x\ ;$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y\ .$$

(C) 微分公式

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x\ ; \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\ .$$

---

*本文作者感謝教育部顧問室及國科會科教處對本研究的補助。

(D) 週期與對稱性質

(i) $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$.

(ii) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$; $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$.

(iii) $\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$.

(iv) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$.

(v) $\sin(2\pi - x) = -\sin x$; $\cos(2\pi - x) = \cos x$.

留意此中 (i), (ii) 和 (iii) 是主要的性質, 因爲從 (iii) 和 (iv) 知 (v) 必然成立; 而從 (ii) 和 (iii) 知:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x \ , \qquad \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x \ .$$

重覆應用即得 (iv)。又從 (iv) 知 sin 和 cos 函數有週期 2π:

$$\sin(2\pi + x) = \sin x \ ; \qquad \cos(2\pi + x) = \cos x \ .$$

本文的目的是運用微分和積分的方法來導出以上這些性質, 事實上, 利用微分方法來推導三角函數的性質, 早已在一些教科書籍討論過, 例如 [1, 3]。考慮函數S和C滿足以下微分關係

$$S'(x) = C(x) \ , \qquad C'(x) = -S(x) \ ;$$

且 $S(0) = 0,\ C(0) = 1$。即可直接推導出恆等式、和角公式和週期與對稱性質。

可是似乎未有看過以積分方法去推導這正弦函數和餘弦函數的性質。本文將以積分和反函數的方法去定義 $\sin x$ 函數和 $\cos x$ 函數, 具體而言, 我們將定義$\mathcal{S} = \mathcal{S}(t)$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$ 乃以下函數的反函數:

$$t = \int_0^{\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds \ , \quad t = \int_{\mathcal{C}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\, ds \ .$$

本文的研究動機來自 [2], 在那篇論文中, $r = \sin(n\theta)$ 是以原點爲底端之n個花瓣的極座標方程式, 令 (R, θ) 代表花瓣之任何一點的極座標, t表和原點至 (R, θ) 的弧長, 即可推出

$$t = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-r^{2n}}}\, dr \ .$$

以此定義出一些新函數 $R = R(t)$ 並研究一些性質, 當 $n = 1$ 時, $t = \sin^{-1} R$, $(0 < R < 1)$, 即 $R = \sin(t)$。本文正是要利用這個定義, 直接推導 $\sin x$ 函數和 $\cos x$ 函數的性質。

在第二節我們討論微分方法, 我們的鋪陳依據 Bartle and Sherbert 的書 ([1]) 第 8.4章節。在第三節我們討論積分方法, 相關的證明雖然較繁瑣, 但脈絡還是很清楚, 而且是獨立於傳統方法和微分方法。

2. 微分方法

以下要用微積分 (其實是微分方程理論) 直接分析C和S的性質。且說明 C 和 S 即三角函數 $\cos x$ 和 $\sin x$。

定理 2.1: 存在唯一函數 $C : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ 及 $S : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ 滿足

(I) $S''(x) = -S(x)$ 對所有$x \in \mathbf{R}$, 且有$S(0) = 0$, $S'(0) = 1$;

(II) $C''(x) = -C(x)$ 對所有$x \in \mathbf{R}$, 且有$C(0) = 1$, $C'(0) = 0$。

概略證明: 此定理是標準的微分方程存在唯一性定理的特例, 證明利用 Picard 迭代法。留意若

$$S'(x) = C(x),\ C'(x) = -S(x), \quad \text{且 } S(0) = 0,\ C(0) = 1\ . \tag{2.1}$$

則 (I),(II) 明顯成立。故定義函數數列 $< C_n >$, $< S_n >$ 滿足以下性質, 且 C_n, S_n 爲連續函數, 對所有$n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$:

(i) 令 $C_1(x) = 1$, $S_1(x) = x$;

(ii) 令 $S_n(x) = \int_0^x C_n(t)dt$;

(iii) 令 $C_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x S_n(t)dt$。

函數列$< S_n >, < C_n >$在 任意區間$[-b, b]$ 上均勻收斂。令 $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$, $C(x) = \lim_{n\to\infty} C_n(x)$, S 和 C 在 $\mathbf{R}$ 上連續。且有 $S(0) = 0$, $C(0) = 1$。函數 S 和 C 滿足以上定理之 (I) 和 (II)。唯一性可用 S 和 C 的泰勒展開式證明。詳見 [1, p.309-312]。

註: 從以上定理知, S 即正弦函數, C 即餘弦函數; 且 S 和 C 滿足 (2.1)。以下我們將運用 (2.1) 和定理 2.1 來推導性質, 不須通過傳統方法。

引理 2.2: 以上函數C, S 滿足恆等式 (A), 即對所有 $x \in \mathbf{R}$,

$$(C(x))^2 + (S(x))^2 = 1\ .$$

證明: 令 $f(x) = (C(x))^2 + (S(x))^2$, 故對所有$x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = 2C(x)(-S(x)) + 2S(x)C(x) = 0\ .$$

故f 是常數, 又 $f(0) = 1$, 所以 $f \equiv 1$。

定理2.3: 若 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, 滿足對所有$x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = -f(x)$, 對所有$x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0)C(x) + f'(0)S(x)$。

證明: 令

$$g(x) = f(0)C(x) + f'(0)S(x) \ .$$

則有

$$g''(x) = -f(0)C(x) - f'(0)S(x) = -g(x) \ .$$

且 $g(0) = f(0)$, $g'(0) = f'(0)$。由於存在唯一性定理2.1, 故 $f(x) = g(x)$。證畢。

以下證明 S 和 C 也滿足和角公式。

定理 2.4: 對所有 $x, y \in \mathbf{R}$,

(a) $S(-x) = -S(x)$; $C(-x) = C(x)$.

(b) $C(x \pm y) = C(x)C(y) \mp S(x)S(y)$;

(c) $S(x \pm y) = S(x)C(y) \pm S(y)C(x)$。

證明: (a) 定義 $\phi(x) = C(-x)$, 則可得

$$\phi''(x) = [C(-x)]'' = -C(-x) = -\phi(x) \ .$$

而且 $\phi(0) = 1$, $\phi'(0) = 0$。從定理 2.1 知 $C(-x) = \phi(x) = C(x)$。同理我們可證明$-S(-x) = S(x)$。

(b) 令 $f(x) = C(x+y)$, 則 $f''(x) = C''(x+y) = -C(x+y) = -f(x)$。且由定理 2.3 可得, $f(x) = f(0)C(x) + f'(0)S(x)$, 其中$f(0) = C(y)$, $f'(0) = -S(y)$。因此

$$f(x) = C(x+y) = C(y)C(x) - S(y)S(x) \ .$$

而若 $f(x) = C(x-y)$時, 即將以上證明中 y 的改爲 $-y$, 即有

$$f(x) = C(x-y) = C(-y)C(x) - S(-y)S(x) = C(y)C(x) + S(y)S(x) \ .$$

(c) 同理, 令 $f(x) = S(x+y)$, 則 $f''(x)) = -f(x)$。由定理 2.3 知 $f(x) = f(0)S(x) + f'(0)C(x)$, 其中 $f(0) = C(y)$, $f'(0) = S(y)$. 即可得證。

定理 2.5: 若 $x \in \mathbf{R}$ 且 $x \geq 0$ 則

(a) $-x \leq S(x) \leq x$,

(b) $1-\frac{x^2}{2} \leq C(x) \leq 1$,

(c) $x-\frac{x^3}{6} \leq S(x) \leq x$,

(d) $1-\frac{x^2}{2} \leq C(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$。

證明: 由引理 2.2 可得 $-1 \leq C(t) \leq 1$, 對 $t \in \mathbf{R}$, 若 $x \geq 0$, 則

$$-x \leq \int_0^x C(t)dt = S(x) \leq x\ .$$

故 (a) 部份成立。再積分可得

$$-\frac{x^2}{2} \leq \int_0^x S(t)dt \leq \frac{x^2}{2}\ .$$

即 $-\frac{x^2}{2} \leq -C(x)+1 \leq \frac{x^2}{2}$。所以

$$1-\frac{x^2}{2} \leq C(x) \leq 1\ .$$

(b) 部份得證。(c) 部份是由 (b) 積分而來的;(d) 部份也是由 (c) 積分而來的。

引理 2.6. 令 r 爲 C 函數的最小正根, 則存在 $r \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 且 2r 爲函數$S$的最小正根。

證明: 由定理 2.5 (d) 知, $r^2-2 \geq 0$ 且 $r^4-12r^2+24 \geq 0$, 則 $r < \sqrt{6-2\sqrt{3}} < \sqrt{3}$。由定理 2.4 (b) 得 $S(2r)=2S(r)C(r)=0$, 即 $2r$ 是函數S的正根。設$2\delta > 0$ 是 函數S最小的正根, 利用相同的等式, $C(\delta)=0$, 即$\delta = r$。

令 $\omega = 2r$, 因爲 $\sqrt{2} < r < \sqrt{6-2\sqrt{3}}$, 故有 $2.828 < \omega < 3.185$。

定理 2.7: 對所有 $x \in \mathbf{R}$,

(a) $C(\frac{\omega}{2}-x) = S(x)\ ; \qquad S(\frac{\omega}{2}-x) = C(x)\ .$

(b) $S(\omega-x) = S(x)\ ; \qquad C(\omega-x) = -C(x)$,

(c) $S(\omega+x) = -S(x)\ ; \qquad C(\omega+x) = -C(x)$,

證明: 已知 $C(\frac{\omega}{2})=0$, $S(\frac{\omega}{2})=1$, 故此從和角公式 (定理 2.4(b)) 知,

$$C(\frac{\omega}{2}-x)=C(\frac{\omega}{2})C(-x)+S(\frac{\omega}{2})S(x)=S(x).$$

同理可得 $S(\frac{\omega}{2}-x)=C(x)$。(a) 部份得證。

從和角公式知

$$C(\omega)=C(\frac{\omega}{2})^2-S(\frac{\omega}{2})^2=-1\ .$$

而 $S(\omega)=0$。故

$$S(\omega-x)=S(\omega)C(x)-C(\omega)S(x)=S(x)\ .$$

又

$$S(\omega+x)=S(\omega)C(x)+C(\omega)S(x)=-S(x)\ .$$

(b), (c) 其餘部份類似。

推論 2.8: 函數S和C滿足以下週期與對稱性質

(a) $S(2\omega+x)=S(x)$; $C(2\omega+x)=C(x)$.

(b) $S(2\omega-x)=-S(x)$; $C(2\omega-x)=C(x)$.

(c) $S(\frac{\omega}{2}+x)=C(x)$; $C(\frac{\omega}{2}+x)=-S(x)$.

3. 積分方法

定義

$$t=\int_0^{\mathcal{S}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\ , \qquad \text{其中 } -1\le\mathcal{S}\le 1\ . \tag{3.1}$$

並令

$$\frac{\omega}{2}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\ .$$

從 (3.1) 可得知

$$\frac{dt}{d\mathcal{S}}=\frac{1}{\sqrt{1-\mathcal{S}^2}}\ .$$

因此, 函數 $t=t(\mathcal{S})$ 在 $[-1,1]$ 連續且嚴格遞增, 在 $(-1,1)$上可微。根據反函數定理, 在 $t\in[-\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{2}]$ 上, $\mathcal{S}=\mathcal{S}(t)$ 也是一嚴格遞增函數, 且

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt}=\sqrt{1-\mathcal{S}^2}\ .$$

並有 $\mathcal{S}(0)=0$, $\mathcal{S}(\frac{\omega}{2})=1$, $\mathcal{S}(-\frac{\omega}{2})=-1$.

同理, 若

$$|t|=\int_{\mathcal{C}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds\ .$$

其中 $0\le\mathcal{C}\le 1$, 則 t 在 $(-\frac{\omega}{2},0)\cup(0,\frac{\omega}{2})$ 也是 $\mathcal{C}$ 的一個連續可微函數。因此, 根據反函數定理, $\mathcal{C}=\mathcal{C}(t)$, 滿足$\frac{d\mathcal{C}}{dt}=-\mathrm{sgn}(t)\sqrt{1-\mathcal{C}^2}$。故當$t\in(0,\frac{\omega}{2})$時, $\mathcal{C}$嚴格遞降, 當$t\in(-\frac{\omega}{2},0)$時卻是嚴格遞增。並有 $\mathcal{C}(0)=1$, $\mathcal{C}(\pm\frac{\omega}{2})=0$。

另外, 爲了將函數延拓至 $\mathbf{R}$ 上, 我們 定義, 對任意 $t\in(-\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{2})$, $k\in\mathbf{Z}$.

$$\mathcal{S}(t+k\omega)=(-1)^k\mathcal{S}(t)\ ;\qquad \mathcal{C}(t+k\omega)=(-1)^k\mathcal{C}(t)\ . \tag{3.2}$$

定理 3.1: 對所有 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$\mathcal{S}(-t)=-\mathcal{S}(t)\ ;\qquad \mathcal{C}(-t)=\mathcal{C}(t)\ .$$

證明: 當 $t\in[-\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{2}]$ 時, 從定義知 $\mathcal{C}(-t)=\mathcal{C}(t)$. 令$\mathcal{S}=\mathcal{S}(t)$, 利用轉換 $r=-s$,

$$\int_0^{-\mathcal{S}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds=-\int_0^{\mathcal{S}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,dr=-t\ .$$

因此 $-\mathcal{S}(t)=\mathcal{S}(-t)$. 一般而言, 令 $t=\bar{t}+k\omega$, 其中 $\bar{t}\in(-\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{2})$, $k\in\mathbf{Z}$, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(-t)&=\mathcal{S}(-\bar{t}-k\omega)=(-1)^{-k}\mathcal{S}(-\bar{t})\ ,\\ &=(-1)^{k+1}\mathcal{S}(\bar{t})=-\mathcal{S}(t)\ .\end{aligned}$$

同理,

$$\mathcal{C}(-t)=(-1)^k\mathcal{C}(-\bar{t})=(-1)^k\mathcal{C}(\bar{t})=\mathcal{C}(t)\ .$$

定理 3.2: 對所有 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$\mathcal{S}(t)^2+\mathcal{C}(t)^2=1\ . \tag{3.3}$$

證明: 先考慮 $t\in[0,\frac{\omega}{2}]$。令 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(t)$, $\mathcal{C}=\mathcal{C}(t)$, 只須證明 $\mathcal{S}^2+\mathcal{C}^2=1$, 現有 $t=\int_0^{\mathcal{S}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}ds$. 令 $r=\sqrt{1-s^2}$, 則

$$t=\int_{\sqrt{1-\mathcal{S}^2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\ .$$

因此 $\sqrt{1-\mathcal{S}^2}=\mathcal{C}(t)=\mathcal{C}$。即恆等式 (3.3) 成立。

若 $t \in [-\frac{\omega}{2}, 0]$ 時, $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C}$ 只是符號有變化而已, 因此 (3.3) 也是成立。又當 $t = \bar{t} + k\omega$時。利用延拓 (3.2),

$$\mathcal{S}(t) = (-1)^k \mathcal{S}(\bar{t}) \ , \qquad \mathcal{C}(t) = (-1)^k \mathcal{C}(\bar{t}) \ .$$

故此, (3.3) 成立. 證畢.

定理 3.3: 對所有 $t \in \mathbf{R}$, 有

$$\mathcal{S}'(t) = \mathcal{C}(t) \ , \qquad \mathcal{C}'(t) = -\mathcal{S}(t) \ .$$

證明: 若$t \in (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2})$, 應用反函數定理和(3.3), 得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{S}(t) = \sqrt{1 - \mathcal{S}(t)^2} = \mathcal{C}(t) \ .$$

當$t = \frac{\omega}{2}$時, 則運用洛必達原理, $\mathcal{S}(t)$ 在 $t = \frac{\omega}{2}$ 的左微分等於0; 右微分方面, 令$t = \bar{t} + \omega$, 再用洛必達原理,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to (\omega/2)^+} \frac{\mathcal{S}(t) - 1}{t - \frac{\omega}{2}} &= \lim_{\bar{t} \to (-\omega/2)^+} \frac{-\mathcal{S}(\bar{t}) - 1}{\bar{t} + \frac{\omega}{2}} \ , \\ &= -\lim_{\bar{t} \to (-\omega/2)^+} \mathcal{C}(\bar{t}) = 0 \ . \end{aligned}$$

因此, $S'(\frac{\omega}{2}) = 0 = \mathcal{C}(\frac{\omega}{2})$。一般而言, 可令 $t = \bar{t} + k\omega$, 其中 $\bar{t} \in (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$, $(k \in \mathbf{Z})$, 則

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{S}(\bar{t} + k\omega + h) - \mathcal{S}(\bar{t} + k\omega)}{h} \ , \\ &= (-1)^k \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{S}(\bar{t} + h) - \mathcal{S}(\bar{t})}{h} \ , \\ &= (-1)^k \mathcal{C}(\bar{t}) = \mathcal{C}(t) \ . \end{aligned}$$

同理, 在 $(-\frac{\omega}{2}, 0)$ 和 $(0, \frac{\omega}{2})$ 的區間上, $\mathcal{C}'(t) = -\mathcal{S}(t)$。當$t = 0$時, 求左右極限並運用洛必達原理, 得 $\mathcal{C}'(0) = 0 = \mathcal{S}(0)$。又 $\mathcal{C}'(\frac{\omega}{2}) = -1 = -\mathcal{S}(\frac{\omega}{2})$。這樣, 對於 $t \in (-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$時, 有 $\mathcal{C}'(t) = -\mathcal{S}(t)$。將之延拓至$t \in \mathbf{R}$時, 結果依然成立。

引理 3.4: 若 $t \in [0, \frac{\omega}{2}]$, 有

$$\mathcal{S}(\frac{\omega}{2} - t) = \mathcal{C}(t) \ ; \qquad \mathcal{C}(\frac{\omega}{2} - t) = \mathcal{S}(t) \ .$$

證明: 令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t)$, 則

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2} - t &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds - \int_0^{\mathcal{S}} \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds \ , \\ &= \int_{\mathcal{S}}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}} \, ds \ . \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{C}(\frac{\omega}{2}-t)=\mathcal{S}(t)$. 另外, 若 $\mathcal{C}=\mathcal{C}(t)$,

$$\frac{\omega}{2}-t=\int_0^{\mathcal{C}}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\ .$$

因此 $\mathcal{S}(\frac{\omega}{2}-t)=\mathcal{C}(t)$。

定理 3.5: 對所有 $t\in\mathbf{R}$, 有

(a) $\mathcal{S}(t_1+t_2)=\mathcal{S}(t_1)\mathcal{C}(t_2)+\mathcal{C}(t_1)\mathcal{S}(t_2)$.

(b) $\mathcal{C}(t_1+t_2)=\mathcal{C}(t_1)\mathcal{C}(t_2)-\mathcal{S}(t_1)\mathcal{S}(t_2)$.

證明: (a) 令 $\mathcal{S}_i=\mathcal{S}(t_i)$, $\mathcal{C}_i=\mathcal{C}(t_i)$, $(i=1,2)$. 先設 $-\frac{\omega}{2}\le t_1,t_2\le\frac{\omega}{2}$, 且 $-\frac{\omega}{2}\le t_1+t_2\le\frac{\omega}{2}$, 則 (a) 等價於

$$t_1+t_2=\int_0^{\mathcal{S}_1\mathcal{C}_2+\mathcal{S}_2\mathcal{C}_1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\ , \tag{3.4}$$

由於定理 3.2, 有

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}(t)=-\mathcal{S}(t)\ ,\qquad \frac{d}{dt}\mathcal{S}(t)=\mathcal{C}(t)\ .$$

固定 $t_1\in[-\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{2}]$, 定義函數

$$f(t)=t_1+t-\int_0^{\mathcal{S}_1\mathcal{C}(t)+\mathcal{C}_1\mathcal{S}(t)}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\ .$$

有 $f(0)=t_1-\int_0^{\mathcal{S}_1}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds=0$, 並且

$$f'(t)=1-\frac{\mathcal{S}_1\mathcal{C}'(t)+\mathcal{C}_1\mathcal{S}'(t)}{\sqrt{1-(\mathcal{S}_1\mathcal{C}(t)+\mathcal{C}_1\mathcal{S}(t))^2}}=0\ ,$$

因爲從定理 3.2,

$$\begin{aligned}
&1-(\mathcal{S}_1\mathcal{C}+\mathcal{S}\mathcal{C}_1)^2-(\mathcal{S}_1\mathcal{C}'+\mathcal{S}'\mathcal{C}_1)^2\\
&=1-(\mathcal{S}_1\mathcal{C}+\mathcal{S}\mathcal{C}_1)^2-(\mathcal{C}\mathcal{C}_1-\mathcal{S}_1\mathcal{S})^2\ ,\\
&=1-(\mathcal{S}_1^2\mathcal{C}^2+\mathcal{C}_1^2\mathcal{S}^2+\mathcal{S}_1^2\mathcal{S}^2+\mathcal{C}_1^2\mathcal{C}^2)\ ,\\
&=0\ .
\end{aligned}$$

故此, 對所有 t 滿足 $t_1+t\in[-\frac{\omega}{2},\frac{\omega}{2}]$者, 有$f(t)\equiv 0$, 即 (3.4) 成立。

若 $\frac{\omega}{2} < t_1 + t_2 \le \omega$, 令 $\bar{t}_2 = t_2 - \frac{\omega}{2}$, $\bar{t}_1 = t_1 - \frac{\omega}{2}$, 則 $-\frac{\omega}{2} < \bar{t}_1 + \bar{t}_2 < 0$, 由於定理 3.1 及引理 3.4,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(t_1+t_2) &= \mathcal{S}(\bar{t}_1+\bar{t}_2+\omega)\ ,\\
&= -\mathcal{S}(\bar{t}_1+\bar{t}_2)\ ,\\
&= -\mathcal{S}(\bar{t}_1)\mathcal{C}(\bar{t}_2) - \mathcal{C}(\bar{t}_1)\mathcal{S}(\bar{t}_2)\ ,\\
&= \mathcal{S}(-\bar{t}_1)\mathcal{C}(-\bar{t}_2) + \mathcal{C}(-\bar{t}_1)\mathcal{S}(-\bar{t}_2)\ ,\\
&= \mathcal{S}(\frac{\omega}{2}-t_1)\mathcal{C}(\frac{\omega}{2}-t_2) + \mathcal{C}(\frac{\omega}{2}-t_1)\mathcal{S}(\frac{\omega}{2}-t_2)\ ,\\
&= \mathcal{C}(t_1)\mathcal{S}(t_2) + \mathcal{S}(t_1)\mathcal{C}(t_2)\ .
\end{aligned}$$

另外, 由於定理 3.1, 當 $-\omega \le t_1 + t_2 < \frac{\omega}{2}$ 時, (a) 還是成立。最後, 設 $t_1 = \bar{t}_1 + k\omega$, $t_2 = \bar{t}_2 + l\omega$, 其中 $-\frac{\omega}{2} < \bar{t}_1, \bar{t}_2 \le \frac{\omega}{2}$, 則

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(t_1+t_2) &= \mathcal{S}(\bar{t}_1+\bar{t}_1+(k+l)\omega)\ ,\\
&= (-1)^{k+l}\mathcal{S}(\bar{t}_1+\bar{t}_2)\ ,\\
&= (-1)^{k+l}\left(\mathcal{S}(\bar{t}_1)\mathcal{C}(\bar{t}_2) + \mathcal{C}(\bar{t}_1)\mathcal{S}(\bar{t}_2)\right)\ ,\\
&= \mathcal{S}(t_1)\mathcal{C}(t_2) + \mathcal{S}(t_2)\mathcal{C}(t_1)\ .
\end{aligned}$$

對函數$\mathcal{C}$, 先考慮 $t_1, t_2 \in [0, \frac{\omega}{2}]$ 且 $t_1 + t_2 \in [0, \frac{\omega}{2}]$. 令

$$f(t) = t_1 + t - \int_{\mathcal{C}_1\mathcal{C}(t)-\mathcal{S}_1\mathcal{S}(t)}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds\ .$$

即可證明 (b) 式成立. 參照 (a) 部份的證明, 不難拓展至 $t_1 + t_2 \in [\frac{\omega}{2}, \omega]$ 和 $t_1, t_2 \in (-\frac{\omega}{2}, 0)$ 的情況。若 $-\frac{\omega}{2} < t_1 < 0 < t_2 < \frac{\omega}{2}$時, 不妨設 $t_2 + t_1 > 0$, 則以上函數f 滿足 $f(-t_1) = 0$, 且對$t > t_1$,

$$f'(t) = 1 - \frac{\mathcal{C}_1\mathcal{C}' - \mathcal{S}_1\mathcal{S}'}{\sqrt{1-(\mathcal{C}_1\mathcal{C}-\mathcal{S}_1\mathcal{S})^2}} = 0\ .$$

故 (b) 部份對任意$t_1, t_2 \in [-\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{2}]$ 成立。然後延拓至 $\mathbf{R}$ 上。

定理 3.6: 對所有 $t \in \mathbf{R}$, 有

(a) $\mathcal{S}(\frac{\omega}{2} - t) = \mathcal{C}(t), \quad \mathcal{C}(\frac{\omega}{2} - t) = \mathcal{S}(t)$;

(b) $\mathcal{S}(\omega - t) = \mathcal{S}(t), \quad \mathcal{C}(\omega - t) = -\mathcal{C}(t)$;

(c) $\mathcal{S}(\omega + t) = -\mathcal{S}(t), \quad \mathcal{C}(\omega + t) = -\mathcal{C}(t)$;

(d) $\mathcal{S}(2\omega - t) = -\mathcal{S}(t), \quad \mathcal{C}(2\omega - t) = \mathcal{C}(t)$;

(e) $\mathcal{S}(2\omega + t) = \mathcal{S}(t), \quad \mathcal{C}(2\omega + t) = \mathcal{C}(t)$;

(f) $\mathcal{S}(\frac{\omega}{2} + t) = \mathcal{C}(t), \quad \mathcal{C}(\frac{\omega}{2} + t) = -\mathcal{S}(t)$.

後記

微分方法和積分方法美中不足之處, 即不能直接確定ω 即單位圓的面積 π, 在微分方法中, 我們只能定義 $\omega/2$ 是 $\cos x$ 的第一個正根. 在積分方法中,

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds \ .$$

另外, 在證完定理 3.5 後, 函數 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{C}$ 即滿足第二節的微分條件, 並由唯一性知它們就是熟悉的三角函數 $\sin x$ 和 $\cos x$; 但我們還是利用積分方法來完成定理 3.4 至定理 3.6 的證明。

參考文獻

1. R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, 2nd ed., Wiley, New York, 1992.
2. M. Cuko and P. Belcher, We need some new functions, *Mathematical Spectrum*, vol 26, no.3, 55-60, 2003/2004.
3. M. Spivak, 微積分 (中譯本), 科學出版社。

—本文作者賈乃輝、魏文恩是高雄中學高三學生, 郭倍綸是高雄中學高二學生, 劉玠玟是成功大學數學系大一學生, 羅春光是中山大學應用數學系教授—