數學傳播 30卷3期, pp. 31-41

微積分五講——
第三講 微積分的各種對立

龔 昇・張德健

一. 微分與積分的公式及定理的對應

在上一講中, 根據微分與積分是微積分這門學科中的主要對立運算的觀點, 闡述了微積分這門學科的內容是由三部分組成, 即微分、積分、指出微分與積分是一組對立運算的微積分基本定理, 並且著重 (講了) 多元微積分中指出微分和積分是一組對立運算的微積分基本定理, 即 Stokes 公式, 這時用了外微分形式才把這點說清楚。對這個公式, 我們還強調這是微積分的頂峰, 是從古典走向近代的公式, 即使在微分流形上, 這個公式依然成立, 且是其中最重要的公式之一。

在微積分中, 除了微分與積分這組對立運算外, 還有沒有其他一些次要的對立? 這當然有。例如: 離散與連續、局部與整體、有限與無限、數與形、特殊與一般等, 這些對立幾乎在數學的所有分支中都扮演著重要的角色, 在微積分這門學科中當然也是這樣。在這一講中, 我們將繼續用對立統一的觀點來考察與認識微積分中的一些主要內容, 爲了易於說清楚, 這裡著重講的是一元微積分。

在這一節中, 我們由微分與積分是微積分這門課程的主要對立的觀點, 來梳理清楚微積分的一些定理與公式。在這個觀點下, 原則上講, 微分中的一個定理或公式, 在積分中也應有相應的定理與公式。反之亦然, 即它們之間是相互對應的。也就是說, 它們之間, 既是對立的 (一個是微分的形式, 一個是積分的形式), 又是統一的 (它們表達的往往是同一件事, 是同一件事物的兩種不同的表達形式)。在數學中引入一個概念或運算之後, 往往就要討論作用到被作用之對象的算術 (arithemetic), 即加、減、乘、除, 作用到被作用之對象的合成 (composition), 作用到被作用之對象的逆 (inverse) 等等, 這幾乎是例行公事。在微積分中, 運算是微分與積分, 被作用之對象是函數, 於是就有了雙方的相應的公式。

對於微分運算來講, 我們有如下的公式 (寫成導數形式, 假設函數都是可微的):

(1) $\big(u(x)+v(x)\big)'=u'(x)+v'(x)$;

(2) $\big(u(x)-v(x)\big)'=u'(x)-v'(x)$;

(3) $\big(u(x)v(x)\big)'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(4) $\Big(\frac{u(x)}{v(x)}\Big)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$;

(5) 假設 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 則

$$\frac{dy}{dx}=f'(g(x))g'(x);$$

(6) 假設$x=g(y)$是 $y=f(x)$的逆函數, 且 $f'(x)\neq 0$, 則

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)};$$

等等。其中 (1)–(4) 是算術運算, 公式 (5) 是對合成的運算, 公式 (6) 是對逆的運算。這是一般的微積分書中必列的公式。

對積分運算來講, 可以將公式 (1)–(6) 寫成積分形式。如與 (1)、(3)、(5) 相應的是 (寫成不定積分形式, 假設函數都是可積的):

$(1')$ $\int\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$;

$(3')$ $\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\,dx$;

$(5')$ $\int f'(g(x))g'(x)\,dx=f(g(x))+C$, C爲不定常數。

當然也可寫出與 (2)、(4)、(6) 相應的 $(2')$、$(4')$、$(6')$。但只要仔細分析一下, 公式 (2) 可由 (1) 推出, 只要將 $u(x)-v(x)$ 寫成 $u(x)+(-v(x))$ 即可; 公式 (4) 可由公式 (3) 推出, 只要對

$$\Big(\frac{u(x)}{v(x)}\Big)v(x)=u(x)$$

兩邊求導數即可; 公式 (6) 可由 (5) 推出, 只要對 $g(f(x))=x$ 兩邊求導數即可, 所以在微分運算中, 重要而具有本質性的公式是 (1)、(3) 及 (5)。

同樣的, 在積分運算中, 重要的具有本質性的公式是其相應的公式 $(1')$、$(3')$ 及 $(5')$, 而這三個公式, 就是微積分書中必講的積分計算的三種主要方法。其中公式 $(1')$ 之用途非常之廣, 尤其用於求有理函數的積分

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 均爲多項式, 將 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分拆成多個有理分式之和, 每個有理分式的分母爲一次或二次多項式, 分子爲次數低於分母的一次多項式或常數, 然後逐個求積分; 公式 $(3')$ 就是部分積分法; 公式 $(5')$ 就是換元法 (即變換變數法)。所以微分運算中的三個主要公式(1)、(3)

及 (5), 在積分運算中就對應求積分的三個主要方法, 即: 將被積函數分拆成幾個易於求積分的函數之和, 然後分別求積分; 部分積分法和換元法, 而這些組成了一元微積分中的微分運算與積分運算的主要內容。微分運算中的三個主要公式, 與積分運算中的三個主要方法, 說的實際上是一件事, 不過用不同形式表達而已。

在微積分的教科書中, 都會列上兩張表, 一張是微分的公式表, 一張是積分的公式表, 而這兩張表, 實際上是初等函數的微分與積分公式表。在這兩張表中, 微分公式與積分公式往往是一一對應的, 即說的是同一件事, 不過用不同形式來表達而已。例如: 微分公式表 (寫成導數的形式) 大致上都會包括以下的這些公式:

(a) $(C)' = 0$, C爲一常數;

(b) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 其中$\alpha$爲一實數;

(c) $(\sin x)' = \cos x$;

(d) $(\cos x)' = -\sin x$;

(e) $(\tan x)' = \sec^2 x$;

(f) $(\cot x)' = -\csc^2 x$;

(g) $(\sec x)' = \sec x \tan x$;

(h) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$;

(i) $(\log_e x)' = \frac{1}{x}$;

(j) $(e^x)' = e^x$;

(k) $(a^x)' = a^x \log_e a$;

(l) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(m) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;;

(n) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

(o) $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

等等。

對積分公式來講, 可以將公式 (a)−(o) 寫成積分形式, 如與 (b), (c), (i), (j) 相應的公式是 (寫成不定積分形式):

(b′) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, C爲一常數 ;

(c′) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

(i′) $\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C$;

(j′) $\int e^x dx = e^x + C$;

當然也可以寫出與微分公式表中其餘的公式相應的公式。

但再仔細分析一下, 在微分公式表中, 最最重要的是公式 (b), (c), (i) , (j), 因爲所有其他的公式都可以很容易從公式 (b), (c), (i) , (j) 以及 (1)−(6) 中推導出來。而積分公式 (b′), (c′), (i′), (j′) 與微分公式 (b), (c), (i), (j) 實際上說的是同一件事, 只是用不同形式表達而已。

從上面論述中還可以看到, 在學習中往往會遇到很多公式, 但這許多公式中, 不是每一條同樣重要的, 有的很重要, 有的不很重要, 那些從這些公式中可以導出其他的公式的, 往往是重要的、本質的, 例如前面說到的 (1), (3), (5), (b), (c), (i), (j) 等。這些最重要的公式往往是十分簡單, 易於記憶的。這樣在學習過程中只要記住這幾個最簡單, 但卻是最重要的公式就可以了。大可不必要去記一大堆公式, 而這是難於做到的。實在要用時, 去查一下就可以了。再加上由於微分公式與積分公式是相互一一對應的, 是同一件事的兩種不同表達方式, 明白了這點就可以知其一而立即知其二, 這樣要記住的東西就更少了。實際上, 要記住的東西愈少愈易記住, 愈多愈難記住。

在一元微積分中, 有兩個重要的定理, 叫中值定理 (Mean Value Theorem)。

微分中値定理: *若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 則在 $[a,b]$ 中一定存在一點 ξ, 使得*

$$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a).$$

積分中値定理: *若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的連續函數, 則在 $[a,b]$ 中一定存在一點 ξ, 使得*

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

這兩個中値定理有十分明確的幾何意義。微分中値定理表示在 $[a,b]$ 中一定存在一點 ξ, 曲線 $y=F(x)$ 在這點的切線平行於連結點 $(a,F(a))$ 與 $(b,F(b))$ 的割線 (見圖3.1); 而積分中値定理表示在 $[a,b]$ 中一定存在一點 ξ, 曲線 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上覆蓋的曲線梯形的面積等於以 $b-a$ 及 $f(\xi)$ 爲邊長的長方形面積 (見圖3.2)。因此, 從表面上看, 這兩個中値定理是兩個完全不同的幾何定理, 一個定理說的是切線 (即微分), 一個說的是面積 (即積分), 而已知“求切線”(微分) 與“求面積”(積分) 是互爲逆運算, 所以當我們令

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)$$

時, 就可發現, *這兩個中値定理實際上說的同一件事, 只是一個用微分形式來表達, 一個用積分形式來表達而已。*

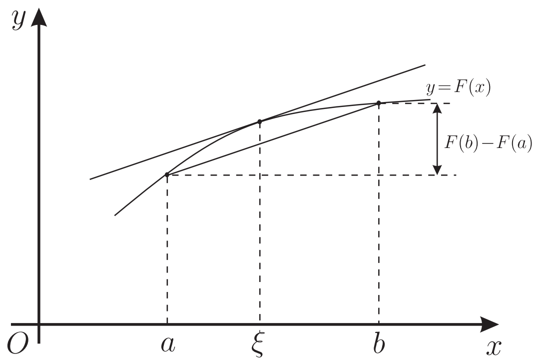

圖 3.1

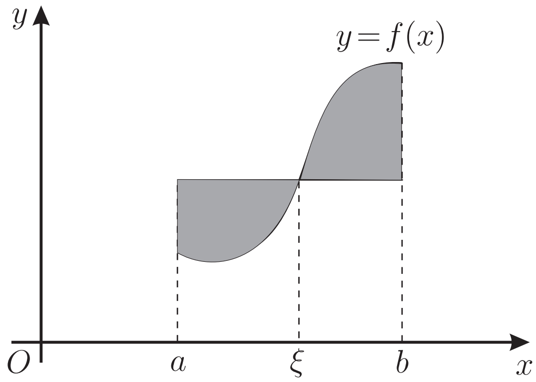

圖 3.2

當然還有在第二講第一節中說到最爲重要的一元微積分的基本定理, 它有微分形式, 也有積分形式, 而這兩種形式說的是同一件事。

在一元微積分中, 還有重要的泰勒 (Broox Taylor, 1685-1731) 展開式: 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 點附近是 $n+1$ 次可微的, 則 $f(x)$ 在 $x=a$ 的附近可以寫成

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)$稱爲 Taylor 展開式中的餘項。

這個公式可以用多次求導數得到, 也可用多次分部積分法得到, 而餘項 $R_n(x)$ 既可表達成微分形式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

式中ξ位於a與x之間, $R_n(x)$也可表成積分形式:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

我們可以證明: 這兩個餘項公式, 利用中值定理是相互可以推導的, 這些都是微分與積分這組對立運算在 Taylor 展開式上的體現。順便說一下, Taylor展開式在一元微積分中是很重要的, 因爲求極值的問題, 中值定理, G.F.A.L'Hospital (1661-1704) 法則等都是它的簡單推論。

作爲一元微積分的理論部分 (還有應用部分), 上述論及的那些結果, 雖然不是它的全部, 卻也是其中極爲重要的部分。所以, 如果我們緊緊抓住微分與積分是微積分中互爲對立運算的觀點, 那麼, 理解一元微積分就顯得十分自然、容易與簡單了。

二. 三個初等函數

在微積分課程中的定義、公式及定理, 往往說的是一般的連續函數、可微函數或可積函數。但是, 例題與習題的大部份卻是討論以下三個大家十分熟悉的初等函數以及它們的合成函數。甚至可以說, 微積分教材中有很大的篇幅是用來討論初等函數的, 所謂的初等函數是指由下列初等函數及其合成函數所組成, 這三個初等函數爲:

(1) 冪函數以及它的反函數, 如 x^μ, 而 μ 爲任意實數

(2) 三角函數以及它的反函數, 如 $\sin x$, $\cos x$, $\ldots$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\ldots$;

(3) 指數函數以及它的反函數, 如 e^x, $\log x$, $\ldots$;

微積分中這三個不同的初等函數, 在複分析的觀點下, 這三個初等函數實際上是同一個函數。這是因爲我們有前面已屢次提到的 Euler 公式 $e^z = \cos z + i\sin z$. 於是這三個函數是可以相互表達的, 三角函數可以用指數函數來表達:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

冪函數也可以用指數函數及它的反函數對數函數來表達: $z^\mu = e^{\mu \ln z}$, 這裡z爲複變數, μ 爲複常數。這時, 三個初等函數就成爲一個初等函數 — 指數函數及它的反函數了。但是在微積分課程中, 它們仍爲三個不同的初等函數。由於初等函數的重要性, 在微積分的教學中, 如果對這三個初等函數掌握好了, 那麼有關一般函數的定義、公式與定理也就易於掌握與理解了。例如: 在上一節中列舉的微分公式表和積分公式表實際上是這三個初等函數的微分公式表與積分公式表, 同樣的對於 Taylor 級數, 對富立葉 (J. Fourier, 1768-1830) 級數與富立葉積分, 首先要講清楚的也是這三個初等函數的 Taylor 級數、Fourier 級數與 Fourier 積分。

初等函數爲什麼這樣重要? 可以至少從以下幾點來加以說明: 首先, *人們熟悉的大量自然現象與社會現象是可以用初等函數來描述或近似描述*。最最簡單的如: 自由落體、人口增長、利息計算等等。在這方面, 美國的有些微積分教材就寫得比較詳盡, 在微積分教學一開始就讓同學通過計算機認識這些初等函數及其合成函數的圖形, 並有大量的實際的 (不全是虛構的) 例題與習題來認識這些初等函數, 讓同學們認識到大量的自然現象與社會現象的模型 (或近似的模型) 是用初等函數描述的, 並通過對初等函數的討論, 可以得到對這些現象的進一步認識。

不是初等函數及其合成函數的函數稱爲特殊函數或超越函數, 這往往是爲了討論某一個特定的問題而產生的。這在微積分教材及以後有關課程中會不斷地遇到。但這些特殊函數實際上往往都是從初等函數演化過來的, 並且由初等函數來表達的, 而這些特殊函數的一些性質, 也可以由初等函數的性質得到。例如, 大家十分熟悉的 Γ 函數

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt \qquad (s > 0)$$

和 $\mathcal{B}$ 函數

$$\mathcal{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad (p>0,\quad q>0)$$

都不是初等函數, 但卻是初等函數的積分, 所以, 它們的一些性質都可以從初等函數的性質導出。因此, 初等函數了解得愈清楚, 我們就愈能掌控非初等函數的性質, 這是初等函數重要性的第二點說明。更爲重要的是以下的第三點說明。

在微積分中, 有一個非常重要的部分就是級數理論。可以這樣來理解: 由於對一般函數的研究與討論並非那麼容易, 於是有了用初等函數來表示或逼近的想法, 這是因爲對初等函數是很易於討論與研究。這樣的表示或逼近是在一點附近展開的, 且清楚地刻畫了這個函數在這一點附近的行爲, 所以這是很有用的做法, 也可以說, 爲什麼微積分以前也被稱作爲: “無窮小分析”的原因。用冪級數來表示一般函數 $f(x)$ 在點 $x=a$ 處的級數爲

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

這是大家熟悉的 Taylor 級數, 如果在右邊只取二項, $y=f(a)+f'(a)(x-a)$, 這是 $f(x)$ 在$x=a$處的切線, 也就是用切線來近似 $f(x)$ 在 $x=a$ 附近的行爲, 這是將函數在一點附近局部線性化。在 $x=a$ 附近用上式右邊的有限項, 即多項式來逼近 $f(x)$, 這就是前面提到的 Taylor 多項式。同樣, 用三角函數的級數來表示一般函數$f(x)$, 這就是 Fourier 級數

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big)$$

這裡

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

$n=0,1,2,\ldots$被稱爲 Fourier 係數。由於三角函數的週期性, $f(x)$ 也要假設是週期函數 (這個假設其實並不重要)。

用 Fourier 級數的有限項來逼近 $f(x)$, 這就是 Fourier 三角多項式。如同 Taylor 級數、Taylor展開式一樣, Fourier 級數及 Fourier 三角多項式也是局部性質, 即在一點的附近進行研究與討論。至於爲什麼沒有用指數函數的級數或多項式來表示或逼近一般的函數, 一方面當然可以用函數系統的正交性、完備性等來解釋, 但也可以用前面所說的複分析的觀點來解釋。因爲在此觀點下, 指數函數與三角函數是可以相互表達的。事實上, 用 Euler 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 上述 Fourier 級數也可以寫爲

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

這裡

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

在這種認識下, 在微積分中, Taylor 級數及展開式與 Fourier 級數及展開式成爲最基本的內容之一, 其實這也是十分自然的事, 而這實質上就是用初等函數來表示與逼近一般的函數。

這種想法, 到了高維空間, 也一樣的重要, 例如: $x = [x_1 \ldots x_n]^T$ 是在 n 維 Euclid 空間中一個區域 D 中的點,

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

是D上定義的無窮次可微函數, $a = [a_1, \ldots, a_n]^T \in D$, 則$f(x)$ 在$x = a$ 點附近可展開成 Taylor 級數

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_n(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} + \cdots$$

這也可以寫成

$$f(x) = f(a) + J_f(a)(x - a) + \cdots$$

此處 J_f 爲 f 的 Jacobi 矩陣在 a 點取值, 如果在上式只取二項 $f(a) + J_f(a)(x - a)$, 則這是將函數在 $x = a$ 點的局部線性化。而對它進行討論, 就化爲對矩陣 $J_f(a)$ 進行討論。但這是線性代數的事了, 因此, 大致上可以說, 微積分將函數進行局部線性化, 之後是線性代數的工作了。

從上述的討論中可以看出: 三個初等函數與一般的連續函數、可微函數及可積函數的關係是特殊與一般的關係。人們通過用特殊的函數 (三個初等函數) 的表示與逼近來認識一般的函數 (連續函數、可微函數及可積函數); 另一方面, 在微積分中幾乎所有的定義、定理與公式都是對一般的函數說的, 但大部分的例題與習題卻是討論這特殊的三個初等函數以及它們的合成函數的, 通過對這些特殊函數的討論來認識這些一般的函數的定義、定理與公式。

三. 其他一些對立

在微積分這門學科中, 還存在著很多對立。它們是在微分與積分這對主要對立運算下存在和發展, 並且也起著重要作用。在本講一開始, 就列舉了一些這樣的對立。在這一節中, 將就離散與連續這組對立多做一些介紹, 而對其他的對立只略略地介紹。

關於離散與連續這組對立在微積分中的體認, 最易說明的例子是級數與積分, 數項級數$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$與無窮積分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, 就是離散與連續的關係; 函數項級數$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$與含參變量的無窮積分$\int_0^{\infty} f(u,x)du$, 就是離散與連續的關係; Fourier 級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\big(a_n\cos nx+b_n\sin nx\big)$$

與 Fourier 積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-\lambda)}d\xi$$

也是離散與連續的關係。無窮級數、函數項級數與 Fourier 級數都是離散地求和, 且它們發展起來的理論、定理與公式, 都是離散形式的理論、定理與公式; 而無窮積分、含參變量的無窮積分與 Fourier 積分都是連續地求和, 且它們發展起來的理論、定理與公式, 都是連續形式的理論、定理與公式。*在離散與連續是一組對立的觀點下, 這些微積分的定理與公式, 往往是有一個離散形式的定理與公式, 就會有一個連續形式的定理與公式, 反之亦然。*這是離散與連續這組對立在微積分中的具體體認。現在舉幾個極爲簡單的例子來說明之。

例 1: 對無窮級數, 有如下一個大家十分熟悉的 Cauchy 判別準則 (Cauchy Criterion): 無窮級數

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$$

收斂的充分必要條件爲: 對任一給定的 $\varepsilon>0$, 一定存在一自然數 $N(\varepsilon)$, 當 $n>m>N$ 時,

$$\big|S_n-S_m\big|<\varepsilon$$

成立, 即

$$\big|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n\big|<\varepsilon$$

成立, 這裡$S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$, $n=1,2,\ldots$ 是無窮級數的 n 項部分和。

對於無窮積分, 有如下一條與之對應的 Cauchy 判別準則: 積分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收斂的充分必要條件爲: 對任一給定的 $\varepsilon>0$, 一定存在$X>a$, 只要 x, $x'>X$ 時,

$$\Big|\int_x^{x'} f(x)dx\Big|<\varepsilon$$

比較這兩條判別準則, 其差別只是: 一個是離散地求和, 一個是連續地求和 (即積分), 兩者本質上完全一樣, 這是離散與連續這組對立在收斂判別準則上的體認。

例2. 對函數項級數, 有如下的 Cauchy 判別準則: 函數項級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上一致收斂的充分必要條件是: 對任一給定的 $\varepsilon>0$, 一定有不依賴於 x 的自然數 N 存在, 使得當 $n>N$ 時,

$$\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)\right|<\varepsilon$$

對所有 $m>0$ 都成立。

對於含參變量的無窮積分, 有如下一條與之對應的 Cauchy 判別準則: $\int_0^{\infty} f(u,x)du$ 在 $[a,b]$上一致收斂的充分必要條件爲: 對任一給定的 $\varepsilon>0$, 總存在一個僅與 ε 有關的 A_0, 使得當 A, $A'>A_0$ 時,

$$\Big|\int_A^{A'} f(u,x)du\Big|<\varepsilon$$

對所有 $[a,b]$ 上的 x 都成立。

比較這兩條判別準則, 其差別仍然是: 一個是離散地求和, 一個是連續地求和 (即積分), 儘管表面上看來有差別, 但本質上完全一樣, 這也是離散與連續這組對立在收斂判別準則上的體認。

例3. 在 Fourier 級數中, 有這樣一條定理, 若 $f(x)$ 是在 $[0,2\pi]$ 上 H. L. Lebesgue (1875-1941) 平方可積的函數 (將在第五章中論及這種積分), 則 Parsevel 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$$

成立, 這裡 $a_n\,b_n$ 爲 $f(x)$ 的 Fourier 級數

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

的 Fourier 係數。

在 Fourier 積分中, 有與 Parsevel 等式相當的普朗歇爾 (Plancherel) 等式: 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上 Lebesgue 平方可積函數, 稱

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx$$

爲 f 的 Fourier 變換 (與 Fourier 級數中的 Fourier 係數相當) , 則

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx$$

成立。

比較 Parsevel 等式與 Plancherel 等式, 在等式的右邊, 一個是離散地求和 (級數), 一個是連續地求和 (即積分) , 但它們都是用來表達 $\int f^2(x)dx$ (即 f 的范數的平方) 與 f 的 Fourier 係數之間的關係的。所以本質上是一樣的。這是離散與連續這組對立在 Fourier 分析中的體現。當然, 在微積分中, 這樣離散與連續這組對立的種種體現, 還可以舉出很多來。

不僅如此, 離散與連續這組對立是可以相互轉化的。例如: 求函數所描繪的曲線覆蓋下的曲邊梯形的面積 (連續求和) 是通過 Riemann 和 (離散求和) 取極限過程得到的。而一些級數求和 (離散求和) 是通過積分求和 (連續求和) 得到的, 反之亦然。再例如: 函數 $f(x)$ 的微分 $df = f'(x)dx$ 是連續的差, 差分

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

是離散的差。因此, 從原則上講, 有微分的公式或定理, 也應有與之相對應的差分的公式或定理。反之亦然, 且微分與差分之間可相互表達、相互轉化。

離散與連續在數學的其他分支中都有所體現, 可以舉出更多這樣的例子, 這裡只說一個。由 V. Volterra (1860-1940)、E.I. Freholm (1866-1927) 以及 Hilbert 等建立起來的積分方程理論的一個基本想法是將積分方程 (連續) 化爲線性方程組 (離散) 來考慮, 然後再回到積分方程中來。

關於離散與連續這組對立就說到這裡, 對於其他的對立, 只是十分簡略地介紹一下。我們知道, 微分是局部性質, 積分是整體性質, 微積分的基本定理刻畫了局部性質 (微分) 與整體性質 (積分) 之間的關係。數學中的無限的概念是由現實中的有限建立起來的。如級數求和、無窮積分、Taylor 級數等等都是從求級數的部分和、有限的上、下限的積分、Taylor展開式等有限的量, 通過求極限而得到的。反之, 一些有限的量是可以通過求無限的量而得到的。有限和無限這組對立, 在微積分中可以說是貫徹始終的。同樣, 數與形這組對立也是這樣。如函數表示了曲線、曲面等, 曲線、曲面可以用函數來表達。如二次方程表示了二次曲線、二次曲面。反之, 一些幾何的量可以用數的關係表達出來, 如曲率等。一些數量關係的推導可以導出幾何圖形的意義。反之, 一些幾何圖形的考察與研究可以導出數量關係。至於導數表示切線方向, 積分表示面積等, 更是在微積分一開始就體現了數與形這組對立的例子。至於特殊與一般這組對立在上一節中已討論過的三個初等函數與一般函數之間的關係就是一個例子。

—本文作者龔昇任教於中國科技大學; 張德健任教於美國 Georgetown University 數學系—