數學傳播 30卷2期, pp. 81-90

說 3

吳振奎

古代哲人老子說: “道生一, 一生二, 二生三, 三生萬物”。3也許眞的是一個奇特的數。

《說文》中認爲 “三是天、地、人之道也”。試想: 人能感知的現實世界維數是3維; 物質存在形式有3態 (固態、液態和氣態); 中國傳統宗教有3教 (儒教、道教、佛教); 基督教有3聖 (聖文、聖子、聖靈),《論語》中有 “三人行, 必有我師焉”, 如此等等。

數學中也有許多與3關聯的事實: 幾何中多邊形以三角形最穩 (不在同一直線上的三點可確定一張平面); 具有下面形式的連續自然數的方冪和 (注意冪指數與項數關係)

$$1+2=3, \quad (\text{自然數唯一的一組三個相繼數列和式})$$
$$3^2+4^2=5^2, \quad (\text{《周髀算經》中 “勾三股四弦五”})$$
$$3^3+4^3+5^3=6^3, \quad (\text{兩個世紀前Euler 發現的})$$

人們至今僅找到上述三個; 不定方程

$$\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2=\frac{y(y-1)}{2}$$

的解有且僅有 (1,1)、(2,2) 和 (4,9) 三組。

又數學中兩個重要常數 π 和 e 它們的近似 (按四捨五入) 值也均爲3:

$$\pi=3.141592654\ldots\approx 3,$$
$$e=2.718281828\ldots\approx 3.$$

凡此種種, 人們或許耳濡能詳、或許熟視無睹; 然而下面的一些與3有關的數學問題似乎更耐人尋味了。

1. 整數的一種分拆

把一個正整數拆分成若干正整數以使它們的乘積最大, 如何拆?

結論是: 盡量多的拆成3 (4除外)。下面用數學語言描述且證明該事實。

令 $S=\sum_{i=1}^{m}a_i$ (a_i 爲正整數), 若 $I=\prod_{i=1}^{m}a_i$ 最大, 則必有 $2\le a_k\le 4$。

首先, 若 $a_k\ge 5$, 則 $3(a_k-3)>a_k$, 故至少可將 a_k 拆成3和 a_k-3, 這時 S 不變, 而 I 增大。

又若 $a_k<2$, 則 $a_k=1$, 這時可將 a_k 與某個 a_i 合併成 a_i+1, 這樣 S 不變, 而 I 增大。

最後, 若 $a_k=4$, 則 a_k 不動或換成 $2+2$, 此時 S 與 I 皆不變。但2的個數不能多於2個, 否則可將3個2換成2個3, 此時和 S 不變, 而乘積 I 變大。

綜上, 對於整數 S 按下面方式分拆可使其積最大:

若 $S=3k$, 則將 S 拆成 k 個3; 若 $S=3k+1$, 則將 S 拆成 $k-1$ 個3和1個4 (或兩個2); 若 $S=3k+2$, 則將 S 拆成 k 個3和1個2。

這個問題其實也與 Euler 常數 e 的解析性質有關 (對於實數分拆而言, 盡量多地將其拆成 e 可使它們的乘積最大)。

2. $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ 的最大値

在數列 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ 中, $\sqrt[3]{3}$ 最大。

今令 $y=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$, 有 $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln x$, 兩邊求導有

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x^2}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln x \quad\Rightarrow\quad y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

由 $y'=0$, 可得 $x=e$。

當 $0<x<e$ 時, $y'>0$, 知 y 單增; 當 $e<x<+\infty$ 時, $y'<0$, 知 y 單減。

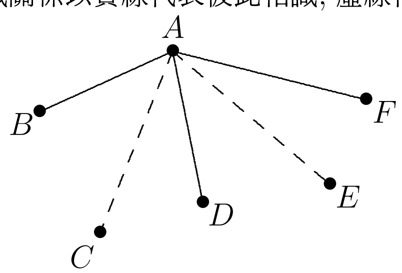
又因 $2<e<3$, 且 $1<\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\ldots$ 及 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$, 知在 $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ 中 $\sqrt[3]{3}$ 最大。

此外我們還可以證明: 對於任意正整數m,n, 根式$\sqrt[n]{m}$ 和 $\sqrt[m]{n}$ 之一不大於$\sqrt[3]{3}$。

3. 六個人中的三位

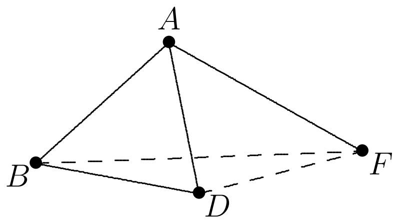
在任何人群中任找6個人, 他們中必存在3個人要麼彼此都相識, 要麼彼此都不相識。

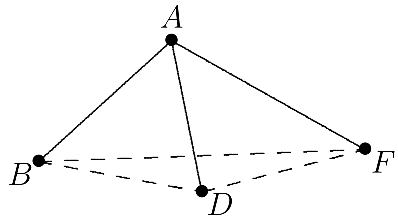
以點 A, B, C, D, E, F 代表6人, 他們彼此間相識關係以實線代表彼此相識, 虛線代表彼此不相識。



先考慮其中某人 (例如 A) 與其他5人相識的情況: 這其實相當於1點與其他5點用兩類線聯結, 由抽屜原理知: 其中至少有一種聯線條數不少於3條, 無妨設實聯線爲3條, 它們分別爲 AB, AD 和 AF。

再考慮 B, D, F 間的聯線情況:





若 B, D, F 間至少有一條實線, 比如 BD, 則 $\triangle ABD$ 爲實線三角形, 此時 A, B, C 3人彼此皆相識。若 B, D, F 間皆由虛線相聯, 則 $\triangle BDF$ 爲虛線三角形, 此時 B, D, F 3人彼此皆不相識。

綜上, 問題得證。

其實問題還可再加強與推廣:

① 在上面的6人中的3人組, 至少存在兩組;

② 若記 k_n 爲 n 階完全圖 (兩點間皆有連線的 n 個結點的圖), 又記 k'_n, k''_n 分別爲 n 階實線、虛線完全圖, 且 $R(k'_n, k''_m)$ 爲出現 n 階實線、m 階虛線完全圖的最少結點數, 即所謂拉姆賽 (F. D. Ramsey) 數, 上述問題即爲 $R(k'_3, k''_3) = 6$。

人們還知道 $R(k'_3, k''_4) = 9$, $R(k'_3, k''_5) = 14$, $R(k'_4, k''_4) = 18, \ldots$。上個世紀九十年代人們算得 $R(k'_3, k''_8) = 28$。

計算 $R(k'_n, k''_m)$ 是一件十分複雜的事情, 比如儘管人們知道

$$25 < R(k'_4, k''_5) \leq 27,$$

但它到底是多少, 人們至今尚未得知。

4. 三工廠的水、電、氣管線

這是 "圖論" 中的一個問題, 通俗化後即爲: 今有 A, B, C 三家工廠, 欲打算與電、水、氣廠用地下管線聯通, 可否存在使得全部管線皆彼此不相交的聯結法?

答案是否定的, 它的證明方法有二: 一是利用約當 (Jordan) 定理, 一是利用歐拉 (I. Euler) 公式。前者稍繁, 今用後者稍加論述。

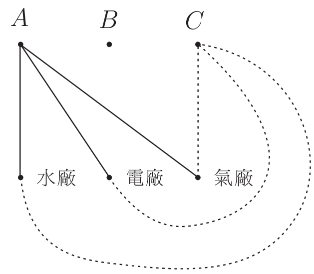
用反證法。若不然, 設符合題目要求的聯法存在。由 Euler 公式 $n + m + f = 2$ (n 表示圖形的點數、m 表示邊數、f 表示面數) 有

$$f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5,$$

又每一面的周界至少有4條邊, 這樣一方面邊的條數不大於 $2m$; 另一方面邊的條數不少於 $4f$, 可有

$$2m = 18 \geq 4f = 20,$$

矛盾! 從而題目要求的聯法不存在。



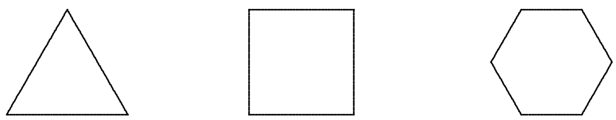
順便講一句: 這個問題是波蘭數學家庫拉道夫斯基 (Kuratowski) 研究不可平面圖形時給出的。

顯然, 廠子數是2時適合要求的聯法存在, 但廠子數是4時的聯法更不會存在, 但此時問題便會感到乏味。

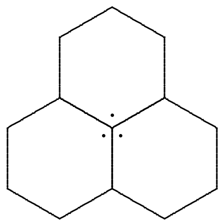
5. 可鋪滿平面的正多邊形僅有3種

各邊長皆相等、各內角也相等的多邊形稱爲正多邊形。什麼樣的正多邊形可以既不重疊, 又無縫隙地鋪滿平面?

答案是只有3種: 正三角形、正四邊形 (正方形)、正六邊形。



據說早在畢達哥拉斯 (Pythagoras) 時代已對此問題有所研究。下面我們給出一個詮釋。若設可鋪滿 (無重疊、無縫隙) 平面的正 n 邊形內角爲 α_n, 對於鋪滿而言必有 k 使 $k\alpha_n = 360°$。

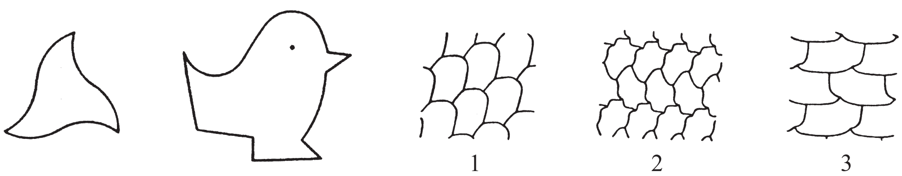


又由正 n 邊形內角公式有

$$\alpha_n = \frac{(n-2)180°}{n},$$

代入上式得 $k = \dfrac{2n}{n-2}$, 當且僅當 $n = 3, 4, 6$ 時 k 爲整數。即 $n = 3, 4, 6$ 時的正 n 邊形可以鋪滿平面。

其實, 任意三角形、四邊形皆可鋪滿整個平面, 甚至某些非直線圖形也能鋪滿整個平面:



埃舍爾 (M. C. Escher) 的名畫 “騎士” 中用黑白兩色騎士圖案佈滿整個畫面。

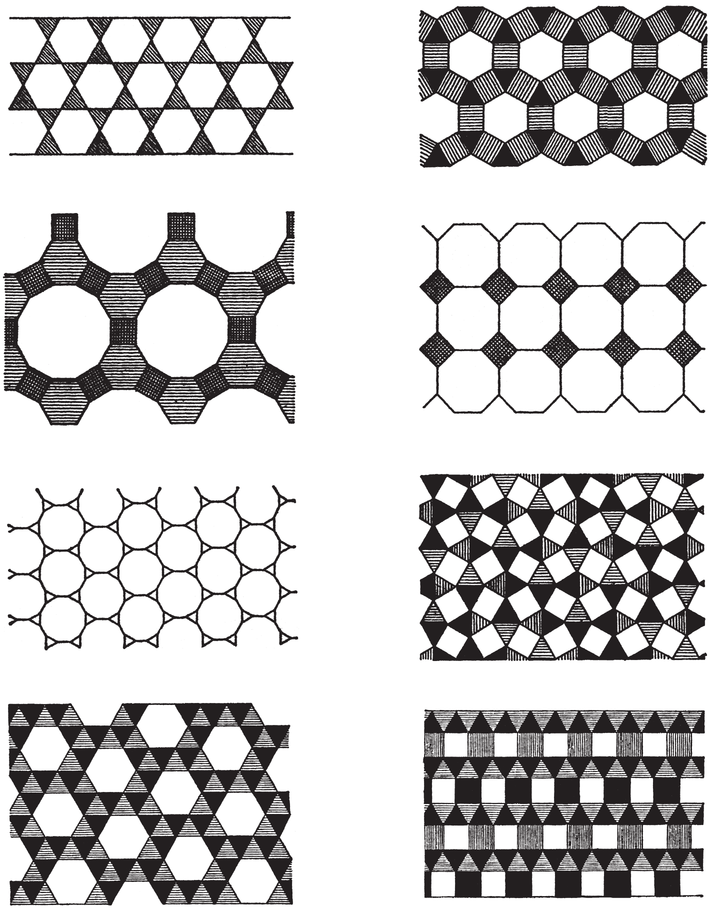
順便一提, 若允許同時用正三、正四、正五、. . .、正 k 邊形等 $k-2$ 種不同正多邊形鋪設 (下設能在平面鋪砌中的所用正多邊形邊數分別爲 $n_1, n_2, \ldots, n_r$), 則有下面結果:

正多邊形種類數	所建立的代數式 (由內角關係)	解 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$
三種	$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{n_i} = \frac{1}{2}$ 這裡 n_i 爲正 n_i 邊形的邊數 (下同)	$(3,7,42)*, (3,8,24)*$ $(3,9,18)*, (3,10,15)*$ $(3,12,12), (4,5,20)*$ $(4,6,12), (4,8,8)$ $(5,5,10)*, (6,6,6)$
四種	$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{n_i} = 1$	$(3,3,4,12)$, $(3,3,6,6)$, $(3,4,4,6)$, $(4,4,4,4)$
五種	$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{n_i} = \frac{3}{2}$	$(3,3,3,3,6)$, $(3,3,3,4,4)$
六種	$\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{n_i} = 2$	$(3, 3, 3, 3, 3)$

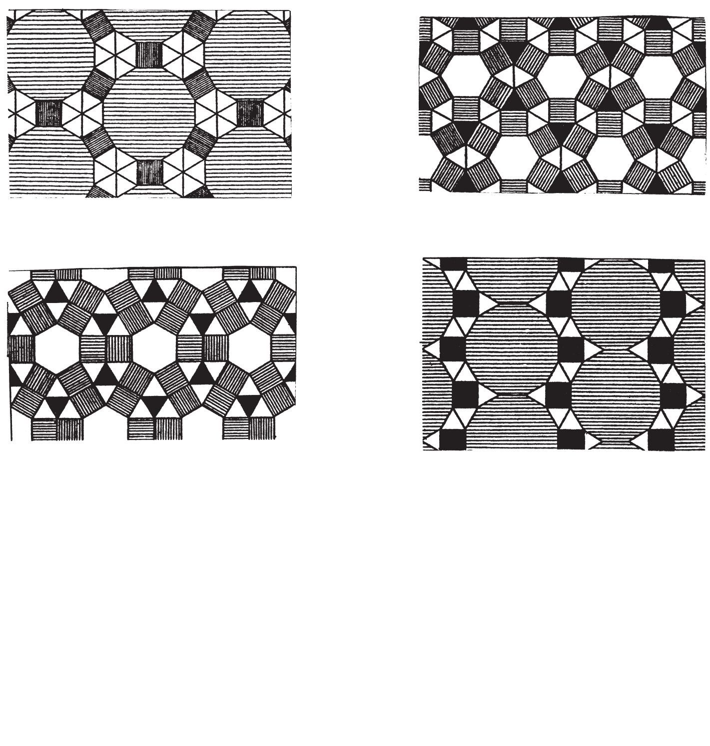
注意表中解裡帶 $*$ 號者, 爲不能擴展到整個平面者, 故眞正的解共11組。顯然, 多於六種

的正多邊形鋪設不存在 (三角形爲據有最小內角的正多邊形, 其內角爲 $60°$)。

一些解的鋪設圖案



若允許在空隙中添加其他正多邊形, 則花樣 (種類) 無窮無盡:



6. $3x+1$ 問題

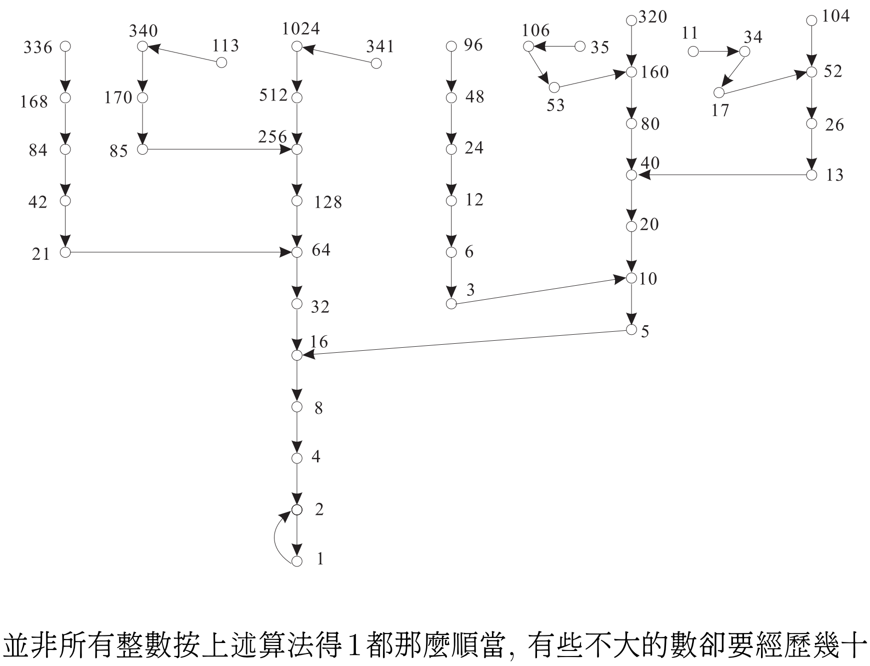
任給一個整數, 若它是偶數則將它除以2, 若它是奇數則將它乘3再加1。重覆上述步聚, 經有限步驟運算之後結果必爲1。

此問題常稱卡拉茲 (Callatz) 問題, 它是德國漢堡大學的卡拉茲率先研究且提出的 (從函數置換角度), 且於1950年在美國坎布里奇 (Cambridge) 召開的數學家大會上得以傳播。而後又有了角谷 (Kakutani) 問題、海色 (Hasse) 算法、烏拉姆 (Ulam) 問題等稱謂。

1952年蒂外費斯 (B. Thwaifes) 將該問題稱爲 “$3x+1$ 問題”。

這個貌似簡單的問題證明起來卻十分困難 (甚至不知從何處下手), 儘管有人已將它驗算至 6.3×10^{13} 以內的數而未發現例外。還有人設立獎金徵解 (從50美元升至1000英鎊)。

下圖是一些整數經上述運算後的情形:



當然, 並非所有整數按上述算法得1都那麼順當, 有些不大的數卻要經歷幾十甚至幾百步運算才能達到目的, 比如27要經過111步運算, 6171要經過261步運算才能得到最終結果1。

下面兩表分別給出部分整數經歷 $3x+1$ 運算時所達峰值 (運算中出現的最高值) 及最後到達1時的路徑 (運算次數) 表:

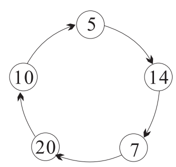
$1 \sim 10^6$ 中 $3x+1$ 運算峰值表

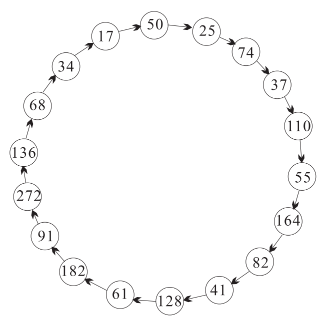
x	路徑數	峰值
1	0	1
2	1	2
3	7	16
7	16	52
15	17	160
27	111	9232
255	47	13120
447	97	39364
639	131	41524
703	170	250504
1819	161	1276936
4255	201	6810136
4591	170	8153620
9663	184	27114424
20895	255	50143264
26623	307	106358020
31911	160	121012864
60975	334	593279152
77671	231	1570824736

$1 \sim 10^6$ 中 $3x+1$ 運算最長路徑數表

x	路徑數	峰值	x	路徑數	峰值
1	0	1	871	178	190996
2	1	2	1161	181	190996
3	7	16	2223	182	250504
6	8	16	2463	208	250504
7	16	52	2919	216	250504
9	19	52	3711	237	481624
18	20	52	6171	261	957400
25	23	88	10971	267	957400
27	111	9232	13255	275	497176
54	112	9232	17647	278	11003416
73	115	9232	23529	281	11003416
97	118	9232	26623	307	106358020
129	121	9232	34239	310	1897192
171	124	9232	35655	323	41163712
231	127	9232	52527	339	10635020
313	130	9232	77031	350	21933016
327	143	9232			
649	144	9232			
703	170	250504			

該問題還有一些變形和推廣, 比如: 若將遇到奇數時 “乘3加1” 改成 “乘3減1”, 而遇偶數時仍除以2, 則它將或得到1或步入下面兩個循環之一:





有人也已驗算至 10^8 而未發現例外。如前文所述, 這個貌似簡單的問題, 證明起來難度極大, 因而有人認爲: 它是在人們解決了費馬 (P. de Fermat) 大定理後 (見後文), 下一個極富挑戰的課題。

有趣的是: 當 $3x+1$ 運算換成 “$5x+1$” 或 “$7x+1$”, 問題便沒那麼美妙了, 比如

$13 \xrightarrow{\times 5+1} 66 \xrightarrow{\div 2} 33 \to 166 \to 83 \to 416 \to 208 \to 104 \to 52 \to 26 \to 13$ (循環),

從15開始的運算結果是1, 而從17開始的運算又是另一個循環:

$17 \to 86 \to 43 \to 216 \to 108 \to 54 \to 27 \to 136 \to 68 \to 34 \to 17$。

7. 費馬 (Fermat) 大定理

早在兩千多年前古希臘學者畢達哥拉斯 (Pythagoras) 已發現在我國稱爲 "勾股定理" 的著名定理, 且由此引出所謂 "畢達哥拉斯數" 或 "勾股數", 即滿足

$$x^2 + y^2 = z^2$$

的正整數組 (x, y, z), 其實它有無窮多組, 比如若 m, n 爲正整數時:

$$a = 2mn, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

便給出無窮多組勾股數 (當然還有其他形式的表示式)。但問題稍作推廣, 比如有無滿足

$$x^3 + y^3 = z^3$$

的正整數 x, y, z? 答案卻是否定的 (這裡僅將冪指數 2 換爲 3)。

1637 年費馬在其讀過的丟番圖 (Diophantus) 的名作《算術》一書關於畢達哥拉斯數的論述空白處寫到:

> 將一個立方數分爲兩個立方數, 一個四次方數分爲兩個四次方數, ... 或者一般地將一個高於二次的冪分爲兩個同次冪, 這是不可能的。關於此, 我確信已發現一種美妙的證法, 可惜這裡空白太小, 寫不下它。

這段話用現代數學術語和符號來描述即"不可能有正整數 x, y, z 滿足 $x^n + y^n = z^n$, 這裡 $n \geq 3$" (注意這裡 3 是一個界)。它便被稱爲"費馬大定理", 直到 1994 年 10 月, 該定理才爲數學家威爾斯 (A. J. Wiles) 和泰勒 (R. Taylor) 共同證得。

此前 350 多年裡, 不少數學家做了一些局部的工作, 比如: 歐拉 (L. Euler) 證明了 $n = 3, 4$ 的情形, 勒讓德 (A. M. Legendre) 等證明了 $n = 5$ 的情形, 拉梅 (G. Lame) 證得 $n = 7$ 的情形, 庫默爾 (E. E. Kummer) 證明了除 37 以外的所有 $n < 100$ 的情形。此外德國青年數學家法爾丁斯 (G. Faltings), 日本人宮崗譽市等人對該問題研究也做出過貢獻。[2]

8. 三等分任意角與尺規作圖三大難題

在歐幾里得 (Eulclid) 幾何中, 只允許有限次地使用直尺 (沒有刻度)、圓規作圖。

據稱公元前五元世希臘雅典城中有一個囊括各類學者的巧辯派, 他們首次提出且研究下面三個尺規作圖問題 (還有一些傳說故事與之相伴):

(1) 三等分任意角問題 (任給一個角 α 將其三等分);

(2) 立方倍積問題 (求做一個立方體使其體積爲給定立方體體積的兩倍);

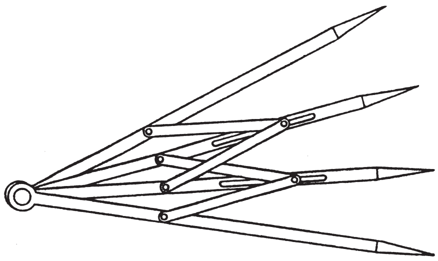
(3) 化圓爲方問題 (求做一個正方形使其與某個給定圓等積)。

這便是數學史上著名的幾何作圖三大難題, 它們是古希臘人在研究幾何作圖問題的延伸。乍看上去, 它們似乎並不困難 (正因爲此才引來無數愛好者的關注), 但其實這三個問題均不可解, 換言之, 它們均系 “不可能問題”。

1837年萬茲爾 (P. L. Wantzel) 在研究阿貝爾 (N. H. Abel) 定理化簡時, 意外地證明 “三等分任意角” 和 “立方倍積” 這兩個問題不能用尺規作圖完成。1882年林德曼 (F. Lindemann) 在厄爾米特 (C. Hermite) 證明了 e 的超越性後, 證明了 π 亦爲超越數, 從而證明了 “化圓爲方” 也是尺規作圖不能問題。

而後, 克萊茵 (F. Klein) 於1895年在德國數理教學改進社一次會議上給出 “尺規作圖三大難題不可能性” 的一個簡證。

順便一說: 借助某些曲線或尺規以外的其它工具, 以上三個問題可以獲解。



一種三等分角儀

數學中與3有關的有趣話題還有不少 (比如自然數皆可表爲3個三角數和問題[5] 等等), 僅從上面諸例中我們已經有了體味, 更多的故事你會從細心的檢索中發現。

參考文獻

1. 吳振奎, 吳旻, 數學中的美, 上海教育出版社, 2002。(九章出版社即將出版)。
2. 吳振奎, 吳旻, 數學的創造, 上海教育出版社, 2003。
3. D. J. 阿伯斯等著, 袁向東等譯, 國際數學家大會百年圖史, 江蘇教育出版社, 2002。
4. 吳振奎, 高等數學解題方法和技巧, 遼寧教育出版社, 1986。
5. 吳振奎, 幾個與 “形數” 有關的問題, 數學傳播, 2005(1)。

—本文作者任教於中國天津商學院—