數學傳播 30卷2期, pp. 77-80

表示 Euler常數的一個級數的導出和此常數存在性的證明

黃見利

Euler-Mascheroni常數, 有時只稱爲 Euler 常數, 是由數學巨人 Leonhard Euler 在1735年所定義的一個純量 $\lim\limits_{N\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{N-1}\dfrac{1}{k}-\ln N)$。當時他是以字母 C 來表示。而且他認爲此純量 "worthy of serious consideration"。以字母 γ 來表示則是由 Mascheroni 在1790年所使用。Euler在1781年將它計算至16位小數, Mascheroni 則在1790年計算至32位小數。但 Soldner 在1809年計算了24位後, 認爲後者在19位小數以後出了錯誤。終於在1812年, 經由偉大的數學家 Gauss 的指導下, 計算天才 Nicolai 將它算至40位小數, 因而證實了 Soldner 的看法。因此, 爲了避免計算錯誤, 數學家通常用兩個不同的計算方法或公式來互相核對。這個情況在計算圓周率的數值時亦發生過。

至今爲止, 我們尚無法證明 γ 爲有理數或無理數, 超越數則更不用談了。曾有一則軼聞說, 著名的英國數學家 Hardy 宣稱, 只要有人證明它爲無理數, 他願意把在 Oxford 大學的講座職位讓出。另一位著名的德國數學家 Hilbert 則提到, 擺在全世界這麼多無助的數學家眼前, 這個未解的問題似乎沒有任何方法可行。Brent 在 1977 年證明若 γ 爲有理數, 則分母必大於$10^{10,000}$。1997年 Papanikolaou 將此值擴大至 $10^{242,080}$。

很多著名的數學家都計算過 γ 的數值。除了前面提到的 Euler 和 Gauss 外, Legendre 在 1825 年也計算了19位; Shanks 在 1871 年計算了 110位; 數學家兼天文學家, 海王星的發現者之一, Adams 則在1878年計算了263位; Stieltjes 在1887年計算了32位; Knuth 在1962年計算了1,271位; Sweeney 亦在1962年計算了3,566位; Brent 和 McMillan 在 1980年計算了 30,100位; Borwein 在1993年計算了172,000位; Papanikolaou 在 1997年計算了1,000,000位; 目前最高的紀錄是 Gourdon 和 Demichel 在1999年所計算的108,000,000位。本文作者也在1988年時利用一臺8088型個人電腦, 以 Sweeney 的公式爲藍本, 計算至28,800位小數。現在回想起來, 都還感覺與有榮焉。

以上的數學史, 讀者可參考 Weisstein 的網站 [1]及 Gourdon 和 Sebah 的網站 [2], 會有更詳盡的說明。

已知有許多的公式能用來表示 γ。在此我們將導出一條非常簡潔且容易理解, 又涉及 Riemann 的 zeta函數的級數公式, 並由此證明 γ 的存在。

首先, 我們定義 Riemann 的 zeta 函數爲 $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$, $s>1$。其次, 我們知道

$$\frac{x}{1+x}=x-x^2+x^3-\cdots=\sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s x^{s-1},\qquad |x|<1$$

然而, 我們也知道

$$\ln(1+x)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}x^s}{s},\qquad -1<x\leq 1$$

現在, 讓 $G(x)=\ln(1+x)$, 則

$$\begin{aligned}
\ln N&=\ln\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{N-1}{N-2}+\ln\frac{N}{N-1}=\sum_{j=1}^{N-1}\ln\frac{j+1}{j}\\
&=\sum_{j=1}^{N-1}\ln(1+\frac{1}{j})=\sum_{j=1}^{N-1}G(\frac{1}{j})=\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}(\frac{1}{j})^s}{s}=\sum_{s=1}^{\infty}\Big[\frac{(-1)^{s+1}}{s}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j^s}\Big]\\
&=(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1})-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(N-1)^2})\\
&\quad+\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{(N-1)^3})-\cdots
\end{aligned}$$

在第六個等號的地方, 我們利用到 uniform convergence 的概念。

緊接著, 經由移項, 我們有

$$(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1})-\ln N=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(N-1)^2})-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{(N-1)^3})+\cdots$$

讓 N 趨近無限, 則我們得到下列公式:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}-\ln N\Big)=\gamma=\sum_{s=2}^{\infty}\Big[\frac{(-1)^s}{s}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^s}\Big]&=\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{3}\zeta(3)+\frac{1}{4}\zeta(4)-\cdots\\
&=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s\zeta(s)}{s}.
\end{aligned}$$

然而, 我們還有另一種導法:

$$\begin{aligned}
\gamma&=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}-\ln N\Big)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N-1}\Big[\frac{1}{k}-\ln(1+\frac{1}{k})\Big]=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{x}{1+x}dx\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{k}}\Big[\sum_{s=2}^{\infty}(-1)^s x^{s-1}\Big]dx\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{k}}(-1)^s x^{s-1}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s}\cdot\frac{1}{k^s}=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s\zeta(s)}{s}
\end{aligned}$$

在第五個等號的地方, 我們再次利用到 uniform convergence 的概念。

至此, 我們已完成了著名的 Euler 公式的導出: $\gamma=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s\zeta(s)}{s}$。

接下來, 我們給出 γ 存在性的證明:

證明: 從 $2>\zeta(s)>\zeta(s+1)>1$ 和 $\zeta(s)$ 爲有界 $(s\geq 2)$ 兩事實可知 $\lim_{s\to\infty}\frac{\zeta(s)}{s}=0$ 且 $\frac{\zeta(s)}{s}>\frac{\zeta(s+1)}{s+1}$。因此, 利用 Leibniz 的交錯級數審斂定理, 可知 $\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(-1)^s\zeta(s)}{s}$ 爲收斂; 亦即, γ 確實存在。

最後, 我們列出一些較常看見的 γ 的表示公式, 讓讀者品嚐此常數; 或者亦可在 Gourdon 和 Sebah 的網站 [3]找到更多的公式:

$$
\begin{aligned}
\gamma &= -\int_0^\infty e^{-t}\ln(t)dt=-\Gamma'(1)=-\int_0^1 \ln(\ln(\frac{1}{t}))dt\\
&=\int_0^\infty e^{-t}\Big(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\Big)dt=\int_0^1\Big(\frac{1}{\ln(1-t)}+\frac{1}{t}\Big)dt=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{(1+t)t}-\frac{e^{-t}}{t}\Big)dt\\
&=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{(1+t^2)t}-\frac{\cos(t)}{t}\Big)dt=1-\int_0^1\frac{1}{1+t}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}t^{2^k}\Big)dt \qquad \text{(Catalan)}\\
&=\frac{1}{2}+2\int_0^\infty\frac{t}{(1+t^2)(e^{2\pi t}-1)}dt \qquad \text{(Hermite)}\\
&=\int_0^1\frac{1-e^{-t}-e^{\frac{1}{t}}}{t}dt \qquad \text{(Barnes)}\\
&=\lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}-\ln N\Big) \qquad \text{(Euler)}\\
&=1+\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}+\ln(1-\frac{1}{k})\Big) \qquad \text{(Euler)}\\
&=\lim_{N\to\infty}\Big(N-\Gamma(\frac{1}{N})\Big) \qquad \text{(Demys)}\\
&=1-\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(\zeta(s)-1)}{s} \qquad \text{(Euler)}\\
&=\sum_{s=2}^{\infty}\frac{(\zeta(s)-1)(s-1)}{s} \qquad \text{(Euler)}\\
&=\ln 2-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\zeta(2s+1)}{4^s(2s+1)} \qquad \text{(Euler)}\\
&=1-\ln\frac{3}{2}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\zeta(2s+1)-1}{4^s(2s+1)} \qquad \text{(Euler-Stieltjes)}\\
&=1-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\zeta(2s+1)}{(s+1)(2s+1)} \qquad \text{(Glaisher)}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s \zeta(s)}{s} \qquad \text{(Euler)}$$

$$\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\infty e^{-t} \ln^2(t) dt = \Gamma''(1) \qquad \text{(Euler-Mascheroni)}$$

$$e^\gamma = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} \prod_{p\le N} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \qquad \text{(Mertens)}$$

$$\frac{6e^\gamma}{\pi^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N} \prod_{p\le N} \Big(1 + \frac{1}{p}\Big) \qquad \text{(Mertens)}$$

參考文獻

1. Eric W. Weisstein, *Euler-Mascheroni Constant*, http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html
2. X. Gourdon and P. Sebah, *The Euler Constant:* γ, http://numbers.computation.free.fr/Constants/Gamma/gamma.html.
3. X. Gourdon and P. Sebah, *Collection of formulae for Euler's constant* γ, http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.html

—本文作者現就讀於國立臺灣大學數學研究所碩士班—