數學傳播 30卷2期, pp. 51-54

由韋達定理引發的方程求根公式的數學之旅

朱 哲

在一次數學課上, 介紹一元二次方程的韋達定理後, 作爲教師的我向學生簡要說明一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$也有韋達定理: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$。同時和學生一起探索如何利用韋達定理解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$: 設 $x_1>x_2$, 由 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$, 可得 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}=\dfrac{b^2-4ac}{a^2}$, 則 $x_1-x_2=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$; 解方程組 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1-x_2=\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$。這樣, 由求根公式可得到韋達定理, 再由韋達定理求得求根公式, 學生對兩者及其聯繫都有了深刻的理解。

課後, 有個學生跑過來問我, 能不能由三次方程的韋達公式來求它的求根公式? 我當時並沒在意, 因爲三次方程求根公式很複雜, 對一個初中學生 (注) 來說可能是無法解決的, 但又不能打擊他的積極性, 於是淸描淡寫地說了一句: 那你試試看吧。沒想到, 第二天他拿了厚厚一疊草稿紙來找我, 說: “我本想把韋達定理變形爲 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=A \\ x_1+x_2-x_3=B \\ x_1-x_2-x_3=C \end{cases}$ 的形式, 然後解方程組, 但

注: 大陸初中(初級中學) 相當於臺灣的國民中學。

沒有成功。不過我把韋達定理變形為 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=A \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=B \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3=C \end{cases}$ 的形式 (變形過程參看本文附錄)。如果這個方程組解出了, 那我就解出了三次方程。可是, 這個方程組我也解不出, 但我覺得它的形式很漂亮。”

我不禁為學生的想法所震動。由二次方程向三次方程作類比與推廣, 運用所學知識對方程組進行變形, 這裏包含了學生對數學的興趣和對知識的渴求。於是我就和他一起去尋找這個方程組的解法, 我們嘗試了很多方法, 但卻一無所獲。最後求助於電腦, 其結果的複雜程度讓人難以置信: 螢幕上密密麻麻佈滿了數字與符號。如果這個工作由手工來完成, 是何等繁雜。

看到學生臉上露出失望和無奈的神情, 我想可以趁這個機會向他簡單介紹一下歷史上三、四次方程求根公式的方法。

對於一元三次方程 $y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0$, 作變換 $y=x-\dfrac{a_1}{3}$, 則可化為缺失 x^2 項的方程 $x^3+px+q=0$。利用 $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$, 令 $x=u+v$, 則原方程化為 $(u+v)^3+(-3uv)(u+v)+(-u^3-v^3)=0$。則只需解出 $\begin{cases} -3uv=p \\ -u^3-v^3=q \end{cases}$ 即可。將方程組變形為 $\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$, 由韋達定理可知, u^3, v^3 是二次方程 $z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0$ 的兩個根。解得 $z_{1,2}=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}$。$\therefore u=\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$, $v=\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}}}$, $\therefore x=u+v=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{q^3}{27}}}$。因為再往下解, 將遇到虛數, 所以沒向學生介紹, 但告訴他三次方程最多有三個解。

對於一元四次方程 $y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4=0$, 作變換 $y=x-\dfrac{a_1}{4}$, 則可化為缺失 x^3 項的方程 $x^4+qx^2+rx+s=0$。然後引入三個輔助量 u,v,w, 即令 $x=u+v+w$, 可得 $\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-\dfrac{q}{2} \\ u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=q^2-\dfrac{4s}{16} \\ uvw=-\dfrac{r}{8},\ (u^2v^2w^2=\dfrac{r^2}{64}) \end{cases}$。由韋達定理知 u^2,v^2,w^2, 是三次方程 $z^3+\dfrac{q}{2}z^2+(q^2-\dfrac{4s}{16})z-\dfrac{r^2}{64}=0$ 的根。若這個三次方程的根為 z_1,z_2,z_3, 則 $u=\pm\sqrt{z_1}$, $v=\pm\sqrt{z_2}$, $w=\pm\sqrt{z_3}$。這時 $x=u+v+w$ 有8種可能組合, 不過受 $uvw=-\dfrac{r}{8}$ 限制, 實際上只有4種組合, 所以一元四次方程最多有四個根。

這時, 學生注意到三次方程作了變換 $y=x-\dfrac{a_1}{3}$, 而四次方程作了 $y=x-\dfrac{a_1}{4}$, 可以分別使原方程缺失 x^2 和 x^3 的項。於是他說, 可不可以對一元二次方程 $y^2+a_1y+a_2=0$ 作變換 $y=x-\dfrac{a_1}{2}$, 使原方程缺失 x 項, 然後再直接開平方? 嘗試如下: $(x-\dfrac{a_1}{2})^2+a_1(x-\dfrac{a_1}{2})+a_2=0$, $\therefore x^2=\dfrac{a_1^2}{4}-a_2$, $\therefore x=\pm\sqrt{\dfrac{a_1^2}{4}-a_2}$, $\therefore y=x-\dfrac{a_1}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{a_1^2}{4}-a_2}-\dfrac{a_1}{2}$。這與我們使用配方法解在本質上是一樣的: 由 $y^2+a_1y+a_2=0$ 得 $y^2+a_1y+(\dfrac{a_1}{2})^2-\dfrac{a_1^2}{4}+a_2=0$, 則 $(y+\dfrac{a_1}{2})^2=\dfrac{a_1^2}{4}-a_2$。

原以爲我們對這一問題的探索到此就可以結束了, 沒想到第二天他又來找我, 興奮地告訴我他找到一種解二次方程的新方法:

對 $x^2+px+q=0$, 令 $x=a+b$, 則 $(a+b)^2-(a-b)(a+b)-2b(a+b)=0$。令 $a-b=-p$ ①, $2b(a+b)=-q$ ②, ①$^2+4\times$②$=(a-b)^2+8b(a+b)=(a+3b)^2$, $\therefore a+3b=\sqrt{p^2-4q}$ ③或 $a+3b=-\sqrt{p^2-4q}$ ④。$3\times$①+③得 $a=\dfrac{-3p+\sqrt{p^2-4q}}{4}$, 則 $b=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{4}$, $x=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$; 聯立 ①、④可得 $x=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$。

很明顯, 這種方法是受三次方程解法的啓示。他還告訴我, 他先是嘗試利用 $(a+b)^2-a(a+b)+(ab-b^2)=0$, 但失敗了。

回過頭看整個過程, 我覺得, 這是師生二人一起經歷了一次奇妙的數學之旅。在這個過程中, 對數學的興趣, 對知識的渴求, 使學生全身心地投入其中。雖然也經歷了挫折和失敗, 最後的結果也未必很有實用價值 (他得到的一元二次方程新解法就沒多大實用價值), 但是, 整個過程表現出的發現問題的意識和解決問題的方法, 對學生來講是一筆十分珍貴的財富。所以, 作爲教師, 應該保護學生的好奇心, 並適時地引導學生進行探索。

此外, 我嘗試把這一經歷設計成教學過程, 進行課堂教學, 但效果並沒筆者所設想的那麼成功。雖然對學生進行了啓發引導, 但很多學生的思路似乎是由教師牽著走。進行到最後, 很多學生的臉上都露出茫然的神色。也許, 這些教師認爲很有趣的知識, 並不是他們想要的。也許, 只有學生對教學內容產生濃厚的興趣, 他們才能全身心地投入其中。這也啓發我們, 教師應在調動學生的好奇心上下工夫。

附錄: 韋達定理的變形過程

對於三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有韋達定理: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-a \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b \\ x_1x_2x_3=-c \end{cases}$。

$\because (x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$,
$\therefore x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2-2b$。

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^3 &= [x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)](x_1+x_2+x_3)\\ &= (x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1+x_2+x_3)+2b(-a)\\ &= x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1(x_2^2+x_3^2)+x_2(x_1^2+x_3^2)+x_3(x_1^2+x_2^2)+2b(-a)\\ &= -a^3。\end{aligned}$$

$\therefore x_1(x_2^2+x_3^2)+x_2(x_1^2+x_3^2)+x_3(x_1^2+x_2^2) = -a^3+2ab-(x_1^3+x_2^3+x_3^3)$,

而 $(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$$\begin{aligned}&= x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_2^2+x_1x_2x_3+x_2^2x_3+x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2\\ &= 3x_1x_2x_3+x_1(x_2^2+x_3^2)+x_2(x_1^2+x_3^2)+x_3(x_1^2+x_2^2)\\ &= 3(-c)-a^3+2ab-(x_1^3+x_2^3+x_3^3) = -ab,\end{aligned}$$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -a^3+2ab-3c+ab = -a^3+3ab-3c$。

$$\therefore \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -a \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2-2b \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -a^3+3ab-3c \end{cases}。$$

—本文作者任教於浙江師範大學數理學院—